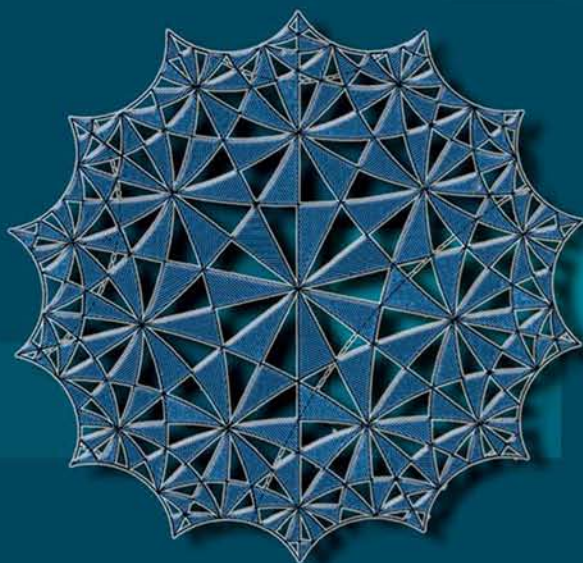


Henri Paul de Saint-Gervais

•

Uniformisation des surfaces de Riemann

Retour sur un théorème
centenaire



ENS ÉDITIONS



Les amis de Saint-Gervais

(Saint-Gervais-la-Forêt, juin 2007)

De gauche à droite :

Felix Klein, Frank Loray, Carl Gauss, Hermann Schwarz, Antonin Guilloux, Bertrand Deroin, Patrick Popescu-Pampu, Christophe Bavard, Alfred Clebsch, Aurélien Alvarez, Sorin Dumitrescu, François Béguin, Lazarus Fuchs, Pierre Py, Charles Frances, Bernhard Riemann, Jean-Claude Sikorav, Maxime Bourrigan, Émile Picard, Henri Poincaré, Étienne Ghys, Nicolas Bergeron, Carl Jacobi, Paul Koebe, Bruno Sévenec, Niels Abel, Karl Weierstrass

Uniformisation des surfaces de Riemann

Retour sur un théorème centenaire

Henri Paul de Saint-Gervais

ENS ÉDITIONS
2010

*Cet ouvrage est publié avec le concours de
l'Unité de mathématiques pures et appliquées
de l'ENS de Lyon, UMR 5669 du CNRS*

Éléments de catalogage avant publication

Uniformisation des surfaces de Riemann : retour sur un théorème centenaire / Henri Paul de Saint-Gervais. – Lyon, ENS Éditions, impr. 2010. – 1 vol. (544 p.) : 24 cm.
Bibliogr. : p. 517-540. – Index
ISBN 978-2-84788-233-9

Tous droits de représentation, de traduction et d'adaptation réservés pour tous pays.
Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'éditeur, est illicite et constitue une contrefaçon.
Les copies ou reproductions destinées à une utilisation collective sont interdites.

© ENS ÉDITIONS 2010
École normale supérieure de Lyon
15 parvis René Descartes
BP 7000
69342 Lyon cedex 07
ISBN 978-2-84788-233-9

L'ouvrage est en vente en librairie, ou à l'adresse suivante :
<http://www.lcdpu.fr/livre/?GCOI=27000100107890>

Sommaire

Les Auteurs	8
Avant-propos	9
Introduction générale	13
Partie A. Les surfaces de Riemann	33
I Travaux précurseurs	35
I.1 À propos du développement des nombres complexes	36
I.2 La cartographie	37
I.3 Un survol du développement des fonctions elliptiques	50
II Riemann	59
II.1 Préliminaires : fonctions holomorphes et surfaces de Riemann	60
II.2 Principe de Dirichlet et conséquences	80
II.3 Variété jacobienne et espaces de modules	101
III Surfaces de Riemann et surfaces riemanniennes	113
III.1 Felix Klein et l'illustration de la théorie de Riemann	114
III.2 Retour moderne à la théorie de Riemann	126
IV Le travail de Schwarz	137
IV.1 Structure conforme sur la sphère	138
IV.2 Problèmes explicites de représentation conforme	144
Intermezzo	155
V La quartique de Klein	157
V.1 Formes modulaires, invariant j	160

V.2	Comment Klein paramètre sa quartique	169
	Partie B. Méthode de continuité	183
VI	Groupes fuchsien	195
VI.1	Groupes fuchsien, polygone fondamental et pavage hyperbolique	195
VI.2	Exemples	214
VI.3	Algébrisation d'après Poincaré	218
VI.4	Appendice	226
VII	La « méthode de continuité »	229
VII.1	Préliminaires	230
VII.2	Représentations des groupes de surfaces	232
VII.3	Représentations réelles fidèles et discrètes	240
VII.4	Preuve de l'uniformisation	245
VIII	Équations différentielles et uniformisation	249
VIII.1	Préliminaires : quelques aspects des équations différentielles algébriques du premier ordre	249
VIII.2	L'approche de Poincaré	258
VIII.3	Équations différentielles linéaires d'ordre 2, équations normales et équations uniformisantes	261
VIII.4	L'ensemble des équations normales sur une courbe fixée	272
VIII.5	Monodromie des équations normales et uniformisation des courbes algébriques	278
IX	Exemples et développements	289
IX.1	Théorie de Fuchs locale	289
IX.2	Équation hypergéométrique de Gauss et liste de Schwarz	294
IX.3	Exemples de familles d'équations normales	312
IX.4	Uniformisation des sphères privées de 4 points	319
IX.5	Postérité	328
	Intermezzo	337
X	L'uniformisation des surfaces et l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$	339
X.1	L'uniformisation des surfaces et l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$	343
X.2	Comment Poincaré résout l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$	350

X.3 Conclusion : uniformisation des surfaces de Riemann algébriques, prescription de courbure et calcul des variations	374
Partie C. Vers le théorème d'uniformisation général	379
XI L'uniformisation des fonctions	395
XI.1 Uniformisation des domaines relativement compacts à bords	396
XI.2 Exhaustion par des domaines relativement compacts simplement connexes	403
XI.3 Paramétrage par un ouvert simplement connexe du disque	408
XI.4 Théorème d'Osgood	413
XI.5 Le problème des ramifications	416
XII La preuve de Koebe du théorème d'uniformisation	419
XII.1 Principe de la preuve	419
XII.2 Cas où la suite (c_k) est bornée	421
XII.3 Cas où la suite (c_k) tend vers l'infini	423
XIII La preuve de Poincaré du théorème d'uniformisation	429
XIII.1 Stratégie de la preuve	429
XIII.2 Existence d'une majorante de Green sur l'anneau A	431
XIII.3 La preuve plus directe de Koebe	442
Épilogue	447
Appendices	453
Correspondance entre Klein et Poincaré	455
Quelques repères historiques	493
Bibliographie	517
Index	541

Les auteurs

Aurélien Alvarez

Université d'Orléans, UFR Sciences, Bâtiment de mathématiques - Route de Chartres, B.P. 6759, 45067 Orléans Cedex 2.

Christophe Bavard

Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

François Béguin

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS-Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay.

Nicolas Bergeron

Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR CNRS 7586, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05.

Maxime Bourrigan

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, UMR 5669 CNRS-ENS de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon.

Bertrand Deroin

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS-Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay.

Sorin Dumitrescu

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS-Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay.

Charles Frances

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS-Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay.

Étienne Ghys

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, UMR 5669 CNRS-ENS de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon.

Antonin Guilloux

Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR CNRS 7586, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05.

Frank Loray

Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.

Patrick Popescu-Pampu

Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR CNRS 7586, Université Paris 7 Denis Diderot, Site Chevaleret, Case 7012, 75205 Paris Cedex 13.

Pierre Py

Department of Mathematics, University of Chicago, 5734 S. University Avenue, Chicago, IL, 60637, États-Unis.

Bruno Sévenec

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, UMR 5669 CNRS-ENS de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon.

Jean-Claude Sikorav

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, UMR 5669 CNRS-ENS de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon.

Avant-propos

Les mathématiciens entretiennent des relations ambiguës avec l'histoire de leur discipline. Ils sont fiers de décrire l'émergence progressive ou soudaine des concepts importants mais ils ont parfois tendance à enjoliver l'histoire, imaginant ce qu'aurait pu être un développement harmonieux et cohérent des idées. Cette tendance n'est pas sans agacer parfois les professionnels de l'histoire des sciences qui savent bien que la situation est souvent bien plus tortueuse.

Nous sommes convaincus que le théorème d'uniformisation est l'un des quelques résultats mathématiques majeurs du dix-neuvième siècle. Aujourd'hui, pourtant, son énoncé peut se formuler simplement :

Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe au plan, au disque ou à la sphère.

On trouve même dans la littérature contemporaine des démonstrations de ce résultat en quelques pages qui ne sont pas très compliquées (voir par exemple [Hub2006]). Et pourtant, il a fallu tout un siècle avant d'oser énoncer ce théorème et d'en donner une démonstration convaincante en 1907. Ce livre propose quelques points de vue sur la maturation de ce théorème.

Pourquoi ce théorème est-il intéressant ? Dans l'introduction de son célèbre article de 1900 [Hil1900b] contenant ses 23 problèmes ouverts, David Hilbert propose quelques « critères de qualité » caractérisant un bon problème. Le premier requiert un énoncé facile. C'est le cas puisque nous avons pu l'énoncer en deux lignes ! Le second demande que la preuve soit belle et nous laissons le soin au lecteur de vérifier que le critère s'applique. Enfin, et peut-être surtout, il doit engendrer

des connexions entre domaines différents et susciter des développements nouveaux. On le verra, l'évolution du théorème d'uniformisation s'est faite en parallèle avec l'apparition de la géométrie algébrique, la création de l'analyse complexe, les premiers balbutiements de l'analyse fonctionnelle, le foisonnement de la théorie des équations différentielles linéaires, la naissance de la topologie. Le théorème d'uniformisation est un des fils conducteurs du dix-neuvième siècle mathématique. D'ailleurs, le vingt-deuxième problème de Hilbert concerne précisément l'uniformisation.

Nous voudrions mettre en garde le lecteur et expliquer clairement que ce livre n'est qu'une contribution très modeste. Les auteurs du livre ne sont pas historiens (et beaucoup d'entre eux ne lisent même pas l'allemand !). Ce sont des mathématiciens qui ont souhaité jeter un regard furtif sur le passé de ce théorème si fondamental, espérant recueillir au passage quelques belles idées perdues au fond d'articles oubliés et qui pourraient leur être utiles. Les auteurs ne sont pas non plus les meilleurs spécialistes des visions modernes du théorème d'uniformisation. Ce livre n'est donc pas un traité complet et nous sommes conscients des trous béants que nous aurions dû boucher si nous en avons eu le temps.

La méthode employée dans ce livre est quelque peu inhabituelle. Il ne s'agit pas de décrire l'histoire d'un théorème mais de revenir sur des preuves anciennes, de les lire avec des yeux de mathématiciens modernes, de nous interroger sur la validité de ces preuves et d'essayer de les compléter, autant que possible en respectant les connaissances de l'époque, voire, si cela s'avère nécessaire, avec des outils mathématiques modernes qui n'étaient pas à la disposition de leurs auteurs. Les preuves qui en résultent ne sont pas nécessairement plus efficaces que les preuves contemporaines mais il nous semble qu'elles apportent beaucoup à la compréhension. On ne s'étonnera pas si le texte est rempli d'anachronismes, si l'on invoque par exemple Sobolev à la rescousse de Riemann ! On ne s'étonnera pas non plus si les énoncés présentés sont bien faibles par rapport à ceux que l'on rencontre aujourd'hui, si le théorème des coordonnées isothermes n'est présenté que dans le cas analytique traité par Gauss, alors qu'Ahlfors et Bers le démontrent dans le cas mesurable. Il nous semble que l'idée de Gauss est limpide et qu'elle mérite encore d'être présentée dans son contexte.

Nous espérons que ce livre sera utile aux mathématiciens d'aujourd'hui qui souhaitent jeter un regard sur l'histoire de leur discipline. Mais nous pensons également qu'il pourra permettre à des étudiants de niveau master d'accéder à ces concepts si importants de la recherche contemporaine en utilisant une voie originale.

En pratique, quinze mathématiciens se sont réunis dans un gîte rural de *Saint-Gervais-la-Forêt*, en Sologne, pendant une semaine en 2007, pour se présenter mutuellement quinze morceaux choisis de l'histoire du théorème d'uniformisation, finalement démontré en 1907. Une semaine de commémoration d'un centenaire mathématique! Rentrés chez eux, ils ont rédigé leurs contributions et fusionné l'ensemble. Une deuxième semaine dans le même gîte rural, une année plus tard, a consisté en une intense réécriture collective qui a permis la réalisation d'un unique manuscrit. De multiples réécritures, en petits groupes cette fois, ont mené à ce livre. Nous remercions l'ANR Symplexe BLAN06-3-137237 qui a permis la réalisation pratique de ce travail passionnant.

Nous remercions Mark Baker, Daniel Bennequin, Catherine Goldstein, Alain Hénaut, Christian Houzel, Frédéric Le Roux, Pierre Mounoud et Ahmed Sebbar pour d'utiles conversations, François Poincaré pour la traduction de la correspondance Klein-Poincaré, Arnaud Chéritat et Jos Leys pour leurs figures, ainsi que Marc Deroin et Karim Noui pour leurs photographies électrostatiques.

Le théorème d'uniformisation

L'étude des courbes du plan est l'un des sujets de préoccupation principaux des mathématiciens. Les Grecs anciens avaient déjà étudié en détail les droites, les cercles, mais aussi les coniques, et même quelques courbes plus élaborées comme les spirales d'Archimède. L'étude systématique des courbes n'a pu commencer sérieusement qu'après l'introduction des coordonnées cartésiennes, par Descartes et Fermat au cours de la première moitié du dix-septième siècle [Desc1637, Fer1636] : c'est le début de la géométrie algébrique. À propos de la préhistoire de la géométrie algébrique, le lecteur pourra consulter [BrKn1981, Cha1837, Die1974, Weil1981].

Deux points de vue sur les courbes

Une *courbe* plane peut être définie de deux manières, en quelque sorte duales :

- par une *équation implicite* $F(x, y) = 0$ où $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction numérique ;
- comme une *courbe paramétrée*, c'est-à-dire comme l'image d'une application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Nous allons voir que le *théorème d'uniformisation* permet de passer du premier point de vue au second. Lorsque F est un polynôme, on dit que la courbe est *algébrique* (on parlait autrefois de courbes *géométriques*) ; dans le cas contraire, on dit qu'elle est *transcendante* (les Anciens parlaient de courbes *mécaniques*). Une partie importante de ce livre est consacrée aux courbes algébriques mais nous verrons également que

le théorème d'uniformisation, dans sa dernière version, permet aussi d'étudier (presque) toutes les courbes.

Parmi les courbes transcendentes, on trouve les diverses spirales, les chaînettes, les brachistochrones et autres tautochrones qui ont joué un rôle fondamental dans le développement des mathématiques au dix-septième siècle.

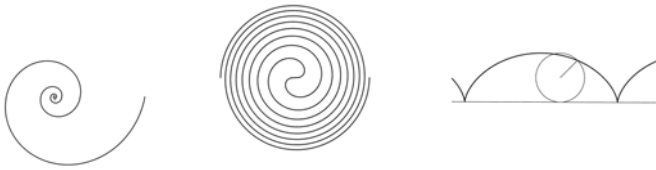


FIGURE 1. Quelques courbes transcendentes

Quant aux courbes algébriques, la période d'exploration a consisté en des études au cas par cas d'un grand nombre d'exemples, aux noms tout aussi compliqués (lemniscates, cardioïdes, folium, strophoïdes, cissoïdes, etc.) qui remplissaient jadis les livres d'exercices de classes préparatoires, et qui continuent à faire le plaisir de certains amateurs⁽¹⁾. Il fallait mettre de l'ordre dans cette jungle.

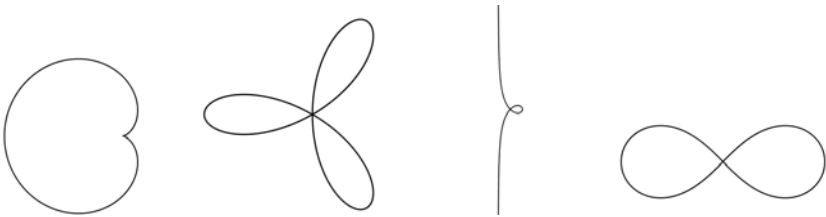


FIGURE 2. Quelques courbes algébriques

Le premier invariant qui s'impose pour une courbe algébrique est le *degré* du polynôme F dont on ne tarde pas à comprendre qu'il ne dépend pas du système de coordonnées (linéaires) utilisé dans le plan. Bien entendu, il est clair que les droites ne sont que les courbes de degré 1, et on prend conscience rapidement que les vénérables coniques

1. voir par exemple <http://www.mathcurve.com/> ou <http://www.2dcurves.com/>.

des Grecs ne sont autres que les courbes de degré 2. Dans un travail célèbre, Newton se lance dans la description « qualitative » des courbes algébriques de degré 3 et il en distingue 72 types⁽²⁾. À l'évidence, il est difficile, sinon impossible, de continuer de cette manière, puisque le nombre de cas possibles croît très vite et la situation devient rapidement inextricable.

Trois innovations

Trois innovations majeures vont successivement clarifier le paysage. Tout d'abord, on comprend que la projection d'un plan sur un autre plan, dans l'espace de dimension 3, à partir d'un point situé hors de ces plans, transforme une courbe algébrique en une autre courbe algébrique de même degré, dite *projectivement* équivalente. Par exemple, toute conique non dégénérée est l'image d'un cercle par une projection convenable ; de ce point de vue, la distinction entre ellipses, paraboles et hyperboles n'a donc plus lieu d'être : il n'existe qu'une seule classe d'équivalence projective de coniques non dégénérées. De même, après avoir défini une *parabole divergente* comme une courbe dont l'équation est de la forme $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, Newton énonce :

Qu'ainsi que le cercle, étant présenté à un point lumineux, donne par son ombre toutes les courbes du second degré, de même les paraboles divergentes donnent par leur ombre toutes les courbes du troisième degré.

Il s'agit bien sûr du début de la *géométrie projective*, initiée par Girard Desargues [Desa1639]. Au lieu de considérer une courbe $F(x, y) = 0$ dans le plan de coordonnées (x, y) , on considère une courbe dans le *plan projectif* de coordonnées homogènes $[X : Y : Z]$ définie par une équation polynomiale homogène en trois variables $\bar{F}(X, Y, Z) = 0$. Tout point du plan projectif pour lequel $Z \neq 0$ définit un point du plan affine de coordonnées $x = X/Z$ et $y = Y/Z$ si bien que le plan projectif apparaît comme le plan auquel on a ajouté la *droite à l'infini* $Z = 0$. On comprend alors qu'une hyperbole du plan affine rencontre l'infini en deux points, correspondant aux deux asymptotes, alors qu'une parabole est tangente à la droite à l'infini. Ainsi, l'utilisation de la géométrie projective simplifie la situation de manière importante et on revient à la situation initiale

2. même s'il en « oublie » 6, si sa définition du mot « type » a été critiquée par Euler, et si Plücker en a, quant à lui, distingué 219 types avec une autre définition.

en étudiant la position simultanée d'une *courbe algébrique projective* et d'une droite. L'adjonction de cette droite à l'infini présente de nombreux avantages : par exemple, deux droites projectives distinctes quelconques se coupent toujours en un point, peut-être situé à l'infini (lorsque les droites affines associées sont parallèles).

La seconde innovation majeure, au tournant du dix-neuvième siècle, est *l'utilisation systématique des nombres complexes en géométrie*. On est donc amené à considérer les points complexes de la courbe algébrique, c'est-à-dire les solutions complexes de l'équation $F(x, y) = 0$ et on autorise également des courbes définies par des polynômes à coefficients complexes. Le fait – dont on prend conscience progressivement, et qui sera définitivement établi au dix-neuvième siècle – que le corps des nombres complexes soit algébriquement clos apporte une unification considérable aux énoncés de géométrie. Évidemment, l'usage simultané de la géométrie projective et de la géométrie complexe s'impose naturellement et sera le cadre naturel de la géométrie algébrique jusqu'à une époque relativement récente.

À titre d'exemple simple, la droite $y = 0$ rencontre toujours la parabole $y = ax^2 + bx + c$ en deux points. Le signe du discriminant n'intervient plus (et d'ailleurs il n'a plus de signe !) mais s'il est nul, les deux racines sont « confondues ». Si $a = 0$, alors l'un de ces points est à l'infini et si $a = b = 0$, on a une « racine double à l'infini ». Seul le cas $a = b = c = 0$ est un cas d'exception... On voit donc la puissance unificatrice de cette géométrie algébrique projective complexe. Un exemple plus intéressant encore est fourni par les *points cycliques*, qui sont à la fois imaginaires et sur la droite à l'infini. Il s'agit simplement des points de coordonnées homogènes $[1 : i : 0]$ et $[1 : -i : 0]$. Il n'est pas difficile de voir qu'une conique du plan euclidien (considérée comme une conique du plan projectif complexe) est un cercle si et seulement si elle passe par les points cycliques. Ceci permet de démontrer un grand nombre de propriétés des cercles et de montrer qu'elles ne traitent en fait que de la position relative d'une conique et de deux points.

Même si l'on étudie les courbes algébriques complexes en s'autorisant des changements de variables projectifs, il reste illusoire d'envisager une étude systématique, sauf peut-être en petit degré. Il suffit d'observer, comme le fit Cramer en 1750, que l'espace des courbes algébriques de degré d est de dimension $d(d+3)/2$ et que le groupe des transformations projectives n'est « que » de dimension 8 [Cra1750].

La troisième innovation majeure, due entre autres à Poncelet, Plücker et Steiner [Ponc1822, Plü1831, Ste1832], a été la découverte du fait que l'on peut étudier les courbes en effectuant des *changements de coordonnées non linéaires*. Parmi ceux-ci, l'*inversion* joue un rôle important (et remplissait beaucoup de chapitres des ouvrages de géométrie des lycées jusqu'aux années 1960). Une version algébrique très simple est la transformation (dite de De Jonquières) qui envoie le point de coordonnées affines (x, y) sur le point $(1/x, 1/y)$. La version « homogénéisée » envoie le point de coordonnées projectives $[X : Y : Z]$ sur $[YZ : XZ : XY]$. Plusieurs remarques s'imposent. D'abord, cette « transformation » σ n'est pas définie partout. Lorsque deux des coordonnées homogènes sont nulles (c'est-à-dire aux trois sommets d'un triangle), l'image n'est pas définie (puisque $[0 : 0 : 0]$ ne correspond à aucun point). D'autre part, la transformation n'est pas injective : la droite à l'infini $Z = 0$ est envoyée entièrement sur le point $x = y = 0$. Mais, à part ces « détails » qui ne préoccupaient guère nos prédécesseurs, la transformation peut être considérée comme un changement de variables, et elle est « presque » bijective, puisqu'il s'agit d'une involution. Si σ est défini en un point p et en $\sigma(p)$, alors $\sigma \circ \sigma(p) = p$. Lorsque l'on transforme une courbe algébrique par σ , on obtient une autre courbe algébrique *dont le degré est différent*. Par exemple, l'image de la droite $x + y = 1$ est la conique $1/x + 1/y = 1$. Pour être précis, l'image n'est pas toute la conique car elle omet certains points. Ces transformations non linéaires forment un groupe (appelé de Cremona) beaucoup plus gros que le groupe projectif et on peut espérer une description à la fois précise et raisonnable des courbes à ces transformations non linéaires près. C'est le début de la *géométrie birationnelle*, l'une des grandes idées de Riemann. On dira que deux courbes algébriques projectives $\overline{F}(X, Y, Z) = 0$ et $\overline{G}(X, Y, Z) = 0$ sont *birationnellement équivalentes* si l'on peut trouver une transformation non linéaire $(X, Y, Z) \mapsto (p(X, Y, Z), q(X, Y, Z), r(X, Y, Z))$ dont les coordonnées sont des polynômes homogènes de même degré, qui envoie « bijectivement » la première courbe sur la seconde. Les guillemets sont relatifs au fait que la transformation, comme ci-dessus n'est pas nécessairement définie partout. On demande donc qu'il existe un ensemble fini de points sur chaque courbe tels que la transformation envoie bijectivement le complémentaire du premier sur le complémentaire du second.

L'un des intérêts de ces transformations birationnelles est qu'il permet de se débarrasser du problème des *points singuliers*. Très tôt, les géomètres ont étudié ces points : points doubles, points de rebroussement, etc. Du point de vue réel, l'étude de ces points singuliers s'est avérée relativement simple, tout au moins dans son aspect topologique. Au voisinage d'un point quelconque d'une courbe algébrique réelle, une courbe est constituée d'un nombre *pair* d'arcs. Par exemple, une courbe algébrique réelle ne présente pas de point d'arrêt.

Pour les courbes algébriques complexes, l'analyse locale de leurs points singuliers s'est avérée incroyablement riche : initiée par Newton puis développée par Puiseux [New1671, Pui1850, Pui1851], leur description topologique est liée à la théorie des nœuds, mais ceci n'entre pas dans le cadre de ce livre. Il suffira en effet de savoir que toute courbe algébrique est birationnellement équivalente à une autre qui ne présente que des points singuliers particulièrement simples : des points doubles ordinaires (Noether, Bertini, [Noe1873, Bert1882]). Autrement dit, un voisinage de ce point est décrit par deux courbes locales lisses dont les tangentes sont distinctes.



FIGURE 3. Quelques points singuliers

En résumé, les géomètres ont progressivement ramené l'étude des courbes algébriques planes à celle des courbes algébriques dont les points singuliers ne sont que des points doubles ordinaires, aux transformations birationnelles près.

Les courbes rationnelles

L'apparition des nombres complexes en géométrie va bien au-delà de la géométrie projective : le début du dix-neuvième siècle est aussi l'avènement de la théorie géométrique des fonctions holomorphes, qui

sont à la fois des fonctions d'une variable complexe et de deux variables réelles. Gauss prend non seulement conscience qu'il est utile de paramétrer le plan par un nombre complexe mais comprend également qu'il est possible de paramétrer *localement* n'importe quelle surface dans l'espace usuel par un seul nombre complexe, de manière *conforme* (voir chapitre I). Ainsi, les surfaces sont localement décrites par un seul nombre. Le pas est franchi : *une surface réelle devient une courbe complexe*. Une trentaine d'années plus tard, Riemann comprendra l'intérêt qu'il y a, réciproquement, à considérer une courbe complexe comme une surface réelle (voir chapitre II).

Nous pouvons maintenant aborder la question des *courbes paramétrées*. On dit qu'une courbe est *rationnelle* si elle est birationnellement équivalente à une droite. On disait jadis qu'elle est *unicursale* (c'est-à-dire qu'elle peut « se tracer d'un seul trait »). Concrètement, une courbe $F(x, y) = 0$ est rationnelle si elle peut être paramétrée par des fractions rationnelles.

$$x = p(t)/r(t) \quad ; \quad y = q(t)/r(t)$$

où p , q et r sont des polynômes en une variable (complexe) t , ce paramétrage étant une bijection en dehors d'un nombre fini de valeurs de t . Voici quelques exemples simples.

Les coniques non dégénérées sont rationnelles. Il suffit en effet de prendre un point m sur cette conique C et une droite projective D qui ne passe pas par m (voir figure 4). Pour chaque point t de D , la droite mt coupe la conique en deux points dont l'un est m . Si l'on désigne par $\gamma(t)$ l'autre point, l'application $\gamma : D \rightarrow C$ est une équivalence birationnelle.

Une cubique présentant un point double est également une courbe rationnelle. Il suffit de prendre une droite qui ne passe pas par le point singulier et de joindre chaque point de cette droite au point double (voir figure 4). L'intersection est constituée de trois points, deux d'entre eux étant le même point multiple situé au point singulier. Le troisième définit une équivalence birationnelle entre la droite et la cubique. Par exemple, l'origine est un point double de la courbe $y^2 = x^2(1 - x)$. Choisissons la droite $x = 2$. La droite passant par l'origine et le point $(2, t)$ a comme équation $y = tx/2$ et son intersection avec la cubique est donnée par $t^2x^2/4 = x^2(1 - x)$. Lorsqu'on retire la solution double $x = 0$, on trouve $x = 1 - t^2/4$ et donc $y = t(1 - t^2/4)/2$ et nous avons bien un paramétrage rationnel de la courbe.

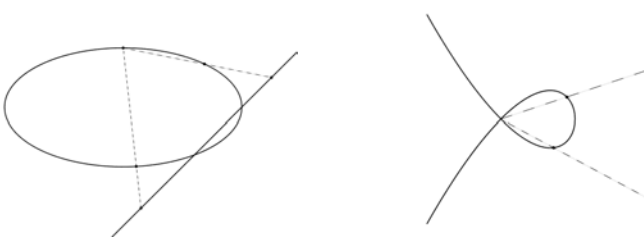


FIGURE 4. Paramétrage d'une conique et d'une cubique singulière

Les courbes rationnelles sont très intéressantes mais elles ne constituent qu'une petite partie des courbes algébriques. Nous ne savons pas à quel moment les mathématiciens ont pris clairement conscience que la majorité des courbes algébriques ne sont pas rationnelles. On peut s'en convaincre de plusieurs manières élémentaires, et nous verrons plus loin qu'un argument topologique rend ce fait « évident ». Par exemple, on peut constater que la courbe définie par $x = p(t)/r(t)$; $y = q(t)/r(t)$ est de degré d (où d est le plus grand des degrés des polynômes p, q, r) : il suffit en effet de compter le nombre de points d'intersection avec une droite générique qui est une équation de degré d . L'espace des triplets de polynômes de degrés d est de dimension $3(d + 1)$. Bien sûr, on peut multiplier p, q, r par le même scalaire ou effectuer sur t une fraction rationnelle (qui dépend de trois paramètres) sans changer la courbe. On obtient donc que l'espace des courbes rationnelles dépend d'au plus $3d - 1$ paramètres. Nous avons déjà vu que le décompte des coefficients dans un polynôme en deux variables montre que l'espace des courbes algébriques dépend de $d(d + 3)/2$ paramètres. Dès que $d \geq 3$, on obtient $d(d + 3)/2 > 3d - 1$ si bien que *les courbes algébriques de degré au moins 3 ne sont en général pas des courbes rationnelles*.

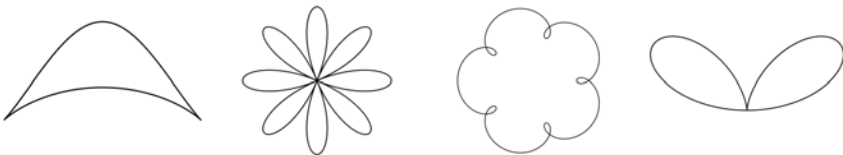


FIGURE 5. Quelques courbes rationnelles

Les courbes elliptiques

Très naturellement, l'effort s'est d'abord porté sur les cubiques. Nous avons vu que Newton lui-même en a commencé une classification qui n'était ni projective ni complexe, même si on y trouvait en germe un certain nombre d'ingrédients de cette nature. Il s'était attaché à comprendre en quelque sorte la nature topologique de la figure dans le plan : position des asymptotes, points singuliers, etc. Nous avons vu également que les cubiques singulières sont rationnelles. Les cubiques non singulières ne sont quant à elles jamais rationnelles. Nous recommandons au lecteur de le démontrer de manière élémentaire.

Nous allons ici nous limiter à une description rapide des résultats. Tout d'abord, toutes les cubiques lisses sont projectivement équivalentes à une forme normale, dite de Weierstrass (qu'on devrait appeler « de Newton ») :

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

où a, b sont des nombres complexes. Lorsque $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, la cubique est lisse. Dès le début de la théorie, pour des raisons essentiellement pratiques, les mathématiciens essayent d'évaluer les intégrales définies du genre

$$f(x) = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + ax + b}}.$$

On appelle ces intégrales « elliptiques » puisque le calcul de la longueur d'un arc d'ellipse mène à ce genre de formule. Plusieurs difficultés se présentent dès qu'on tente de donner un sens à ces intégrales lorsque x et y sont des nombres complexes. La première est que la valeur de l'intégrale dépend du choix d'une détermination du radical au dénominateur. La seconde, liée à la première, est que la valeur de l'intégrale dépend du chemin d'intégration choisi. La conclusion est qu'il faut se résigner à considérer f comme une « fonction multiforme ». En clair, cela signifie que chaque point x a plusieurs images, toutes notées $f(x)$ (ce qui n'est pas sans gêner un mathématicien contemporain, nourri de la définition ensembliste moderne de fonction).

L'idée géniale de Gauss, Abel et Jacobi (décrite au chapitre I) a été de comprendre que la fonction intéressante n'est pas f mais sa *réciroque*. Ils étaient probablement guidés par l'analogie avec le cercle

$$x^2 + y^2 = 1$$

(qui est bien sûr une courbe rationnelle) et l'intégrale

$$\int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x).$$

La « fonction » arcsin ainsi définie est multiforme, mais c'est la réciproque de la fonction sin, qui est une fonction dans le sens strict du terme (chaque point a une seule image), et la multiformité de arcsin se traduit par la *périodicité* de la fonction sin. De la même manière, la réciproque \wp de f est une « vraie » fonction méromorphe (pour insister sur le fait que le mot « fonction » est pris au sens moderne du terme on parle souvent de *fonction uniforme*), et la multiformité de f se traduit alors par la périodicité de la fonction uniforme \wp .

Il est important ici d'insister sur cette périodicité. Alors que la fonction sin est périodique de période 2π , la périodicité de la fonction méromorphe \wp est encore plus riche, puisqu'il existe *deux* périodes linéairement indépendantes. De manière plus précise, il existe un sous-groupe discret Λ de \mathbb{C} de rang 2 (qui dépend de a et b) tel que

$$\forall \omega \in \Lambda, \quad \wp(z) = \wp(z + \omega).$$

Les éléments de Λ ne sont autres que les intégrales de dx/y sur des courbes fermées dans le plan des x . On peut donc considérer que \wp est définie sur le quotient de \mathbb{C} par ce réseau Λ . Topologiquement, \mathbb{C}/Λ est un tore de dimension 2. Localement, un point de ce tore est défini par un nombre complexe z si bien que le tore hérite d'une structure de variété holomorphe de dimension complexe 1, qu'on appelle une *surface de Riemann* (voir chapitre II).

Bien sûr, si \wp est périodique, sa dérivée $\wp' = d\wp/dz$ l'est aussi, et on obtient donc une application (\wp, \wp') de la surface de Riemann \mathbb{C}/Λ privée des pôles de \wp, \wp' vers \mathbb{C}^2 . Il n'est pas difficile de montrer alors que cette application se prolonge de \mathbb{C}/Λ vers la cubique dans le plan projectif complexe (en y adjoignant ses trois points à l'infini, qui correspondent aux trois pôles). On obtient ainsi une identification entre la cubique projective et le tore \mathbb{C}/Λ .

Quelques remarques s'imposent. D'une part, on comprend maintenant *topologiquement* pourquoi la cubique n'est pas rationnelle. En effet, une droite projective complexe est homéomorphe à une sphère (de Riemann) et, même en lui ôtant un nombre fini de points, elle ne peut être homéomorphe à un tore.

Nous voyons ainsi que toutes les cubiques lisses, vues comme surfaces réelles (dans le plan projectif complexe), sont homéomorphes à un tore. Par contre, ces tores, considérés comme surfaces de Riemann, ne sont pas holomorphiquement équivalents les uns aux autres. Étant donnés deux réseaux Λ_1, Λ_2 dans \mathbb{C} , il n'y a en général pas de bijection holomorphe entre \mathbb{C}/Λ_1 et \mathbb{C}/Λ_2 (cela ne se produit que si $\Lambda_2 = k\Lambda_1$ pour un certain k non nul). Ainsi, contrairement aux courbes rationnelles qui sont toutes paramétrées par la droite projective complexe (la sphère de Riemann), les cubiques lisses ne sont pas toutes paramétrées par le même tore complexe \mathbb{C}/Λ ; elles dépendent d'un paramètre complexe (les réseaux à homothétie près) qu'on appelle un *module*. Le lecteur peut mesurer le progrès accompli depuis la tentative de Newton. Les classes d'équivalence birationnelles de cubiques lisses dépendent d'un seul paramètre complexe.

Même si la source \mathbb{C}/Λ du paramétrage d'une cubique lisse dépend de la cubique, il faut observer que le revêtement universel de \mathbb{C}/Λ est la droite complexe \mathbb{C} et ne dépend pas de la cubique. Précisons ce point qui n'est pas du tout évident *a priori*, quitte à faire un anachronisme puisque le concept de revêtement universel n'est apparu que progressivement au cours du dix-neuvième siècle, et n'a été solidement établi qu'au vingtième (il est d'ailleurs à noter que le développement de la topologie a été en partie motivé par l'étude des courbes). Un espace topologique X est dit *simplement connexe* si chaque lacet $c : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow X$ peut être contracté sur un point, c'est-à-dire qu'il existe une famille continue de lacets c_t avec $t \in [0, 1]$ telle que $c_0 = c$ et c_1 est un lacet constant. Il se trouve que si X est un espace « raisonnable » (ce qui est certainement le cas s'il s'agit d'une variété), il existe un espace simplement connexe \tilde{X} et une projection $\tilde{X} \rightarrow X$ telle que les fibres de π sont les orbites de l'action d'un groupe discret Γ qui agit sur \tilde{X} de manière libre et propre. On dit que \tilde{X} est le *revêtement universel* de X et que Γ est son groupe fondamental. Dans le cas du tore \mathbb{C}/Λ , sa description même indique que son revêtement universel est \mathbb{C} , et que son groupe fondamental est Λ , groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 . Dans le cas où X est une surface de Riemann, son revêtement universel est naturellement muni d'une structure de surface de Riemann, le plus souvent non compacte, et nous venons d'observer que les revêtements universels de toutes les cubiques lisses sont tous isomorphes à la

droite complexe \mathbb{C} . Ainsi, même si les classes d'isomorphismes birationnels des cubiques lisses dépendent d'un module, leurs revêtements universels sont tous isomorphes entre eux. Résumons en employant pour la première fois le mot uniformisation :

Pour toute cubique lisse C dans le plan projectif complexe, il existe une uniformisation holomorphe $\pi : \mathbb{C} \rightarrow C$ qui paramètre la courbe, dans le sens où deux points ont la même image par π si et seulement si leur différence appartient à un certain réseau Λ de \mathbb{C} .

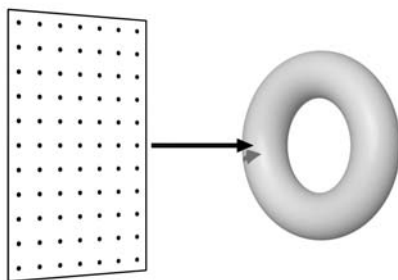


FIGURE 6. Uniformisation d'une courbe elliptique

La réciproque rend la théorie parfaitement harmonieuse. Pour chaque réseau Λ de \mathbb{C} , il existe une cubique lisse qui est holomorphiquement isomorphe à \mathbb{C}/Λ .

Au-delà des courbes elliptiques

Notre chapitre II est une invitation à la lecture des articles de Riemann consacrés aux fonctions algébriques et leurs intégrales. Ces textes importants dans l'histoire des mathématiques ne sont pas faciles d'accès et il a d'ailleurs fallu beaucoup de temps pour qu'ils soient digérés. Un certain nombre d'articles historiques les commentent et l'approche que nous proposons ici est de nature différente et ne cherche absolument pas à être exhaustive. La grande contribution de Riemann a été de fonctionner dans le sens opposé à celui de Gauss. S'il est utile de penser à des surfaces réelles comme des courbes complexes, il est encore plus utile de penser à une courbe complexe, disons d'équation $P(x, y) = 0$, comme une surface réelle. C'est la théorie des surfaces de Riemann, associant des idées

bidimensionnelles et unidimensionnelles. Riemann n'hésite pas à couper ces surfaces le long de courbes réelles par exemple, introduisant ainsi des méthodes topologiques en géométrie algébrique.

Considérer une courbe algébrique, un objet de dimension complexe 1 dans le plan projectif complexe, comme une surface, de dimension réelle 2, ne pose pas de difficulté lorsque la courbe est lisse puisqu'alors la surface réelle est également lisse, mais nous avons vu que ce n'est pas toujours le cas et que des points singuliers se présentent souvent. Dans ce cas, à équivalence birationnelle près, on peut supposer que les seules singularités sont des points doubles ordinaires si bien qu'il n'est pas difficile de définir une surface lisse : il suffit de considérer que le point double est en fait constitué de deux points différents, un sur chaque branche, et on construit de cette façon une surface lisse associée à la courbe algébrique. Riemann associe donc à chaque courbe algébrique une surface de Riemann, c'est-à-dire une variété holomorphe de dimension 1, ou si l'on préfère une variété réelle de dimension 2 munie d'une structure complexe. Nous reviendrons sur cela tout au long du livre. Riemann démontre alors (presque) les deux énoncés suivants :

- *Deux courbes algébriques sont birationnellement équivalentes si et seulement si les surfaces de Riemann qui leur sont associées sont holomorphiquement isomorphes.*
- *Toute surface de Riemann compacte « abstraite » est isomorphe holomorphiquement à la surface de Riemann d'une courbe algébrique.*

Le problème (algébrique) de la description des courbes algébriques se transforme ainsi en celui (transcendant) de la description des surfaces de Riemann. Le premier invariant utilisé par Riemann est purement topologique (et a eu d'ailleurs un impact majeur sur la topologie, puisque c'est entre autres en tentant de le généraliser que Poincaré donna naissance à la forme moderne de cette discipline). Toute surface compacte orientable est homéomorphe à une sphère à laquelle on a adjoint un certain nombre d'anses. On appelle de nos jours cet entier le *genre* de la surface. On peut donc associer à toute courbe algébrique un genre qui est invariant par équivalence birationnelle et qui est donc beaucoup plus pertinent que le degré.

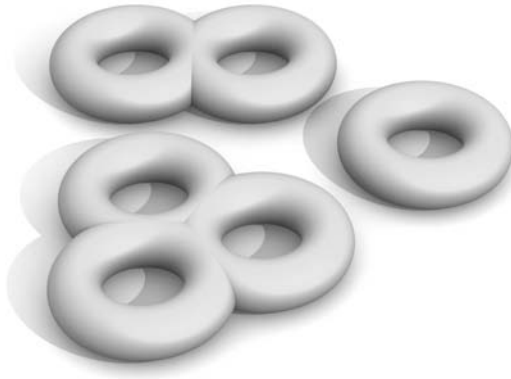


FIGURE 7. Surfaces topologiques, de genres 1, 2 et 3

Voici quelques-uns des résultats que nous rencontrerons dans ce livre.

Si le genre d'une courbe est nul, cela signifie que la surface de Riemann qui lui correspond est homéomorphe à la sphère de dimension 2. Il n'est pas *a priori* clair que cela entraîne qu'elle est isomorphe holomorphiquement à la sphère de Riemann. Ce fait sera démontré de deux manières différentes par Rudolf Clebsch (voir le chapitre II) et Hermann Schwarz (voir le chapitre IV) : toute métrique riemannienne sur une sphère est globalement conformément équivalente à la sphère usuelle. En d'autres termes (plus proches de ceux de Schwarz), toute surface de Riemann homéomorphe à la sphère est holomorphiquement équivalente à la sphère de Riemann. Autrement dit :

Les courbes algébriques de genre nul sont exactement les courbes rationnelles.

C'est une nouvelle étape vers l'uniformisation générale. Une information de nature topologique sur une courbe permet ici de la paramétrer rationnellement.

Si le genre est 1, cela signifie que la surface de Riemann est homéomorphe à un tore de dimension 2 réelle. Cela entraîne, même si ce n'est pas évident, qu'elle est isomorphe holomorphiquement à un quotient \mathbb{C}/Λ , comme le montra Clebsch en 1865 (voir le chapitre II) :

Les courbes algébriques de genre 1 sont birationnellement équivalentes à des cubiques lisses ; on les appelle les courbes elliptiques.

Le cas du genre supérieur ou égal à 2 est plus compliqué et ce livre lui est consacré. Avant de décrire rapidement la situation, clarifions le rapport entre genre et degré. Nous nous contenterons d'un énoncé extrêmement simple. Si C est une courbe de degré d ne possédant que k points singuliers qui sont des points doubles ordinaires, le genre g est donné par :

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - k.$$

Ainsi, une droite ou une conique sont de genre nul, une cubique lisse de genre 1, une cubique singulière de genre nul et une quartique lisse de genre 3.

L'œuvre de Riemann généralise le cas des courbes elliptiques de manière magistrale. Par exemple, si l'on fixe le genre $g \geq 2$, on peut chercher à décrire l'espace des modules des courbes de genre g , c'est-à-dire l'espace des courbes algébriques de genre g à transformation birationnelle près. Riemann montre que cet espace des modules est de dimension complexe $3g - 3$. Parmi les résultats de Riemann, il faut également citer celui qui affirme qu'un ouvert non trivial simplement connexe de \mathbb{C} est biholomorphiquement équivalent au disque. Il s'agit là d'un résultat fondamental même si la preuve proposée par Riemann laisse un peu à désirer (voir chapitre II). Aujourd'hui, il arrive qu'on confonde le « grand » théorème d'uniformisation qui est le thème de ce livre, avec ce cas particulier, certes fondamental, mais d'une portée bien moins impressionnante que le théorème qui traite de toutes les surfaces de Riemann, qui ne sont pas nécessairement des ouverts de \mathbb{C} .

Le travail de Riemann a eu une influence considérable sur ses successeurs immédiats. Nous décrivons dans le chapitre IV les efforts de Schwarz pour démontrer explicitement des cas particuliers du théorème de représentation conforme en évitant les difficultés techniques auxquelles la preuve de Riemann se heurtait.

Parmi ceux qui ont le mieux expliqué les idées de Riemann, il faut citer Felix Klein, un autre héros de notre livre. En 1881, il rédige son point de vue sur les travaux de Riemann, qu'il pense proche de l'intuition de Riemann, même si ses articles ne le mentionnent pas. Nous ne saurons jamais si tel était bien le cas, mais cette nouvelle approche, plus proche du contexte des métriques riemanniennes, nous semble particulièrement lumineuse. Elle consiste en une interprétation électrostatique ou

encore hydrodynamique, accessible à l'intuition. Nous décrivons ce point de vue et ses développements modernes dans le chapitre III.

Uniformiser les courbes algébriques de genre supérieur à 2

La question du paramétrage des courbes de genre g restait ouverte. Plus précisément, personne n'envisageait un paramétrage de toutes ces courbes par des fonctions holomorphes *uniformes*. Par contre, à la suite de Riemann, un certain nombre d'exemples remarquables ont été examinés.

Dans un article merveilleux, Klein étudie la courbe C dont une équation est $x^3y + y^3z + z^3x = 0$ en tant que surface de Riemann et montre qu'elle est isomorphe au quotient du demi-plan supérieur par un groupe explicite de transformations holomorphes. Autrement dit, il construit une fonction holomorphe (uniforme) π du demi-plan hyperbolique \mathbb{H} dans C dont les fibres sont les orbites d'un groupe Γ de transformations holomorphes agissant librement et proprement. L'analogie avec l'uniformisation des courbes elliptiques est frappante. Le demi-plan supérieur remplace la droite complexe et le groupe de transformations de Möbius Γ remplace le réseau Λ qui agit par translations. *La quartique de Klein C a donc été uniformisée par π .*

Même si cet exemple remarquable constitue le premier exemple d'uniformisation en genre supérieur, il apparaissait à l'époque comme un joyau unique, semblable aux polyèdres réguliers, et ne semblait pas susceptible de généralisation. À ce titre, il constitue un intermède parfait avant les tentatives d'uniformisation générale. Sa description occupe le chapitre V.

Avec des motivations très différentes, provenant des équations différentielles linéaires, Poincaré est amené à étudier de manière systématique les sous-groupes discrets Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, qu'il appelle *fuchsians*, et les quotients \mathbb{H}/Γ qu'on obtient de cette manière. Un quotient de ce type est une surface de Riemann qui peut être compacte d'un certain genre au moins 2. Il montre que la construction de ces groupes est flexible et dépend de paramètres (voir le chapitre VI).

Prenant connaissance de ces résultats, Klein comprend que les courbes algébriques qui sont uniformisées par \mathbb{H} ne sont pas des exemples particuliers, comme il le pensait jusque là, mais forment

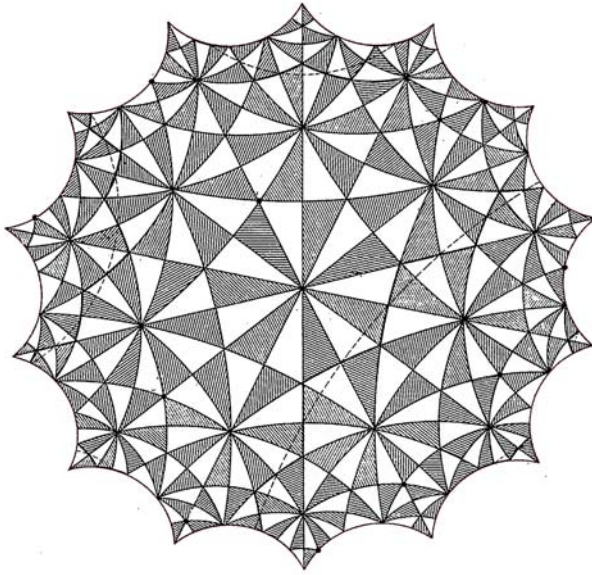


FIGURE 8. Le groupe fuchsien de Klein (vu ici comme un groupe d'automorphisme du disque unité, plutôt que comme un groupe d'automorphismes du demi-plan)

des familles continues, dépendant de paramètres à préciser. Presque simultanément, Klein et Poincaré comprennent qu'il est possible que les constructions de Poincaré soient suffisamment flexibles pour que *toutes* les surfaces de Riemann compactes soient uniformisées par \mathbb{H} . Un décompte des dimensions montre rapidement que l'espace des groupes fuchsien de Poincaré (à conjugaison près) qui mènent à une surface de genre g dépend de $6g - 6$ paramètres réels alors que Riemann avait montré que les surfaces de Riemann dépendent de $3g - 3$ modules *complexes*. La course entre Klein et Poincaré pour démontrer le théorème est lancée. Nous encourageons le lecteur à lire la correspondance passionnante entre nos deux héros à ce sujet que nous avons reproduite à la fin du livre. Klein et Poincaré mettent en place une méthode de démonstration, dite *de continuité*.

Ni la preuve de Klein, ni celle de Poincaré, ne nous semblent pleinement convaincante. Dans le chapitre VII, nous tentons de mettre sur

piéd une preuve suivant l'approche de Klein⁽³⁾ ; pour obtenir une preuve rigoureuse, nous devons cependant utiliser des outils modernes, provenant de techniques quasiconformes, dont Klein et Poincaré ne disposaient bien sûr pas. Dans le chapitre VIII, nous tentons de restituer – au moins partiellement – l'approche de Poincaré, qui n'est pas directement inspirée par l'uniformisation mais par la résolution des équations différentielles linéaires. Le lecteur y verra l'émergence d'un grand nombre de concepts qui nous sont aujourd'hui familiers. Le chapitre IX reprend quelques exemples explicites d'uniformisation de surfaces de genre supérieur.

En 1882, Klein et Poincaré tiennent pour acquis le théorème d'uniformisation suivant :

Théorème. — *Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. Il existe un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agissant librement et proprement sur \mathbb{H} tel que X soit isomorphe au quotient \mathbb{H}/Γ . Autrement dit, le revêtement universel de X est holomorphiquement isomorphe à \mathbb{H} .*

En résumé, Klein et Poincaré sont maintenant capables de résoudre l'un des principaux problèmes légués par les fondateurs de la géométrie algébrique : paramétrer une courbe algébrique $F(x, y) = 0$ (de genre au moins 2) par des fonctions uniformes méromorphes $x, y : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Ce résultat grandiose complète les cas particuliers des courbes rationnelles et des courbes elliptiques. Les *fonctions fuchsiennes* généralisent ainsi les fonctions elliptiques. Bien entendu, comme pour les fonctions elliptiques, il faut ensuite faire entrer ces nouvelles transcendentes dans le bestiaire des objets mathématiques de base, les écrire comme des séries convergentes, etc. Poincaré consacrera par la suite de nombreux articles à ces questions.

Au-delà des courbes algébriques

Mais pourquoi se limiter aux courbes algébriques ? Qu'en est-il des courbes « transcendentes » ? Ayant pris confiance grâce au cas des courbes algébriques, autrement dit des surfaces de Riemann compactes, Poincaré s'attaque au problème des surfaces de Riemann non compactes,

3. La réalité est en fait plus complexe : en effet, certaines parties de la preuve du chapitre VII sont plus proches de certains arguments de Poincaré que de ceux de Klein.

qui n'ont donc *a priori* rien à voir avec la géométrie algébrique. La méthode de continuité ne peut plus s'appliquer. Pourtant, en 1883, Poincaré montre déjà qu'on peut uniformiser toute surface de Riemann qui admet une fonction méromorphe non constante, si on accepte d'affaiblir le sens du mot « uniformiser » : il faut se contenter d'un paramétrage qui n'est peut-être pas localement injectif, autrement dit qui peut présenter des points de ramifications. Ce résultat est l'objet de notre chapitre XI. La question de l'uniformisation des surfaces non algébriques semble ensuite stagner. Mais, dans sa conférence au congrès international des mathématiciens en 1900, Hilbert souligne le caractère incomplet du résultat de Poincaré et encourage les mathématiciens à se remettre à l'ouvrage ; c'est le vingt-deuxième problème de Hilbert. En 1907, Poincaré et Koebe parviennent indépendamment au théorème d'uniformisation général :

Théorème. — *Toute surface de Riemann simplement connexe est holomorphiquement isomorphe à la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, au plan complexe \mathbb{C} ou au demi-plan \mathbb{H} .*

Les approches de Koebe et de Poincaré sont décrites aux chapitres XII et XIII.

Bien sûr, la description des surfaces de Riemann simplement connexes entraîne immédiatement celle de toutes les surfaces de Riemann. En effet toute surface de Riemann est le quotient de son revêtement universel par un groupe agissant holomorphiquement, librement et proprement. Le théorème précédent permet alors d'identifier toute surface de Riemann soit à la sphère de Riemann, soit au quotient de \mathbb{C} par un groupe discret de translations, soit au quotient du demi-plan \mathbb{H} par un groupe fuchsien. L'approche de Poincaré et Koebe, qui ouvrira une page de la théorie du potentiel, est présentée dans la partie C. Ceci clôt une époque importante des mathématiques.

Dans les années 1890-1900, Picard et Poincaré mettront au point une nouvelle preuve du théorème d'uniformisation, suggérée par Schwarz, valable au moins dans le cas compact, et basée sur la résolution de l'équation $\Delta u = e^u$. Nous la présentons au chapitre X.

Le théorème d'uniformisation aura été au cœur du développement des mathématiques au dix-neuvième siècle. Par la diversité de ses aspects algébriques, géométriques, analytiques, topologiques et même

arithmétiques, il constitue en quelque sorte un symbole des mathématiques de ce siècle.

Notre livre s'arrête en 1907, même si, bien sûr, l'histoire du théorème d'uniformisation continue. Parmi les développements ultérieurs, on pourrait citer des travaux de Teichmüller sur l'espace des modules, ou ceux d'Ahlfors et Bers dans les années 1960 autour du concept d'applications quasiconformes (voir par exemple [Hub2006]). On pourrait aussi discuter de la situation en dimension supérieure, et de la classification de Kodaira des surfaces complexes (de dimension complexe 2). Mais ceci est une autre histoire !

PARTIE A

Les surfaces de Riemann

Travaux précurseurs

On ne peut pas aborder l'étude du théorème d'uniformisation sans commencer par une description des méthodes de Riemann et de ses successeurs immédiats⁽¹⁾. C'est le but de cette première partie.

Riemann est sans aucun doute celui qui a marqué le plus profondément la théorie des courbes algébriques, au milieu du dix-neuvième siècle. Voici par exemple les premières phrases de Hermite dans sa préface aux œuvres complètes de Riemann.

L'œuvre de Bernhard Riemann est la plus belle et la plus grande de l'Analyse à notre époque : elle a été consacrée par une admiration unanime, elle laissera dans la Science une trace impérissable. Les géomètres contemporains s'inspirent dans leurs travaux de ses conceptions, ils en révèlent chaque jour par leurs découvertes l'importance et la fécondité.

Dans ce chapitre préliminaire, nous voudrions présenter succinctement deux thèmes qui étaient encore récents à l'époque de Riemann (en 1851) et qui ont probablement servi de « détonateur » pour les travaux de Riemann...

- L'utilisation par Gauss des nombres complexes en *cartographie* et le théorème d'uniformisation « locale » permettant de paramétrer localement n'importe quelle surface par une « carte conforme ».

1. Même si la correspondance entre Klein et Poincaré reproduite à la fin de cet ouvrage montre clairement que Poincaré n'avait pas lu Riemann au début de ses travaux sur les fonctions fuchsiennes !

- Le développement de la théorie des *fonctions elliptiques*, initié par Euler et qui a atteint sa maturité avec les travaux d'Abel et Jacobi juste avant la thèse de Riemann.

Avant de revenir sur la cartographie et les fonctions elliptiques, nous présentons très brièvement la naissance de la vision géométrique des nombres complexes comme points du plan.

I.1. À propos du développement des nombres complexes

L'histoire des nombres complexes est d'une grande richesse et a été étudiée en détail dans de nombreux ouvrages, comme par exemple [Mar1996, Neue1981]. Notre but n'est certainement pas ici de revenir sur cette histoire mais plutôt de rappeler quelques étapes importantes, pour que le lecteur puisse avoir conscience du caractère novateur des travaux de Gauss, Abel et Jacobi que nous décrirons dans les paragraphes suivants.

Pour plus de détails, nous nous référons à [Mar1996], pages 121–132.

Même si Euler avait repéré un point du plan par un nombre complexe $x + iy$ dès 1777, cette vision géométrique des nombres complexes ne sera pas formalisée avant le début du dix-neuvième siècle (Wessel en 1799, Argand, Buée, en 1806), et elle mettra du temps avant de s'imposer définitivement « comme allant de soi ».

Bien sûr, Gauss avait compris beaucoup de choses avant les autres... Sa première « preuve » du théorème fondamental de l'algèbre, dès 1799, ne peut se comprendre qu'avec une approche géométrique et topologique des nombres complexes⁽²⁾. Selon [Mar1996], ce n'est qu'après un article de Gauss de 1831 (*Theoria residuorum biquadraticorum*) que le concept de nombre complexe vu comme un point du plan a reçu un accord unanime.

La théorie des fonctions analytiques, ou holomorphes, a elle aussi mis beaucoup de temps avant de se stabiliser, tout au moins dans son aspect géométrique. Le grand acteur de la théorie est Cauchy. Toujours selon [Mar1996], la route qu'il a suivie fut longue et compliquée. En 1821, il parle encore d'expressions imaginaires : *une équation imaginaire n'est*

2. Pour montrer que le polynôme non constant P s'annule dans le plan complexe, il étudie le comportement à l'infini des courbes $\operatorname{Re} P = 0$ et $\operatorname{Im} P = 0$. Il en déduit qu'elles se coupent nécessairement [Sti2002].

que la représentation symbolique de deux équations en deux variables. Ce n'est qu'en 1847 qu'il change de terminologie et qu'il parle de « quantités géométriques » et qu'il envisage enfin une fonction visuellement comme nous le faisons aujourd'hui, transformant un point mobile dans le plan de départ en un autre point mobile dans le plan d'arrivée.

Le concept d'intégrale $\int f(z) dz$ le long d'un chemin, la dépendance de cette intégrale par rapport au chemin, la théorie des résidus : tous ces théorèmes familiers ont eu également une longue période de gestation, essentiellement sous l'impulsion de Cauchy. Le premier article de Cauchy sur ces questions date de 1814 mais la théorie des résidus date de 1826–1829.

Sur ce point également, Gauss avait de l'avance mais il n'avait pas publié non plus ses idées. Une lettre de Gauss à Bessel datant de 1811 montre qu'il avait une idée claire de l'intégrale sur des chemins et qu'il avait compris le concept de résidu correspondant aux pôles des fonctions à intégrer.

En résumé, Riemann avait à sa disposition, en 1851, une théorie géométrique des fonctions holomorphes encore toute récente. En créant le concept de surface de Riemann, il affranchira les fonctions holomorphes des coordonnées x et y et la théorie deviendra fondamentalement géométrique. Par contre, Abel et Jacobi, vingt-cinq ans plus tôt, n'avaient à leur disposition aucun des concepts de base et n'utilisaient pas par exemple la formule des résidus de Cauchy.

I.2. La cartographie

La science de la cartographie, aussi bien terrestre que céleste, a amené les savants de l'Antiquité à se poser la question de la représentation d'une portion de sphère sur une carte plane. *La Géographie* de Ptolémée présente déjà plusieurs solutions. Il devient vite apparent que les distorsions sont inévitables et se manifestent sous différents aspects en altérant les formes, les distances, les aires, etc.

En 1569, Mercator propose une projection qu'il réalise dans une carte du monde, dont les propriétés sont particulièrement adaptées à la navigation. Sa méthode de construction est empirique mais ouvre la voie au rapprochement de l'analyse mathématique et de la cartographie. C'est au dix-huitième siècle qu'elles se rejoignent définitivement à la suite

d'une série de travaux de Johann Heinrich Lambert, Leonhard Euler et Joseph Louis Lagrange. Lambert publia ses travaux en 1772 ; ils donnent naissance à la cartographie mathématique moderne. Selon Lagrange, Lambert est le premier à avoir formulé certains des problèmes issus de la représentation d'un morceau de sphère sur un plan en termes d'équations aux dérivées partielles.

En 1822, inspirée par des méthodes et des problèmes cartographiques, la Société royale de Copenhague propose comme sujet pour l'attribution de son prix la question de « représenter les parties d'une surface donnée sur une autre surface de telle sorte que la représentation soit semblable à l'original dans les parties infiniment petites ». C'est l'occasion pour Gauss, passionné de cartographie, tant théoriquement que sur le terrain, de prouver l'existence d'une représentation conforme locale des surfaces analytiques réelles, premier pas vers les questions d'uniformisation. L'explication de ce théorème est le but principal de ce paragraphe.

I.2.1. De la pratique à la théorie

Premières constructions. — Écrit par Ptolémée au deuxième siècle de notre ère, le fameux traité de cartographie *La Géographie* fera autorité jusqu'à la Renaissance. Il décrit (et applique) plusieurs méthodes pour représenter aussi précisément que possible le monde connu sur une carte plane. Les géomètres et astronomes de l'Antiquité étaient néanmoins conscients de l'impossibilité de représenter une portion de la sphère par une carte plane en préservant toutes les informations pertinentes (distances, angles, aires, etc.), c'est-à-dire isométriquement.

En termes modernes, cette impossibilité est une des conséquences de la courbure de la sphère, courbure définie par Gauss pour les surfaces. Évidemment les astronomes ne disposaient pas d'une artillerie mathématique aussi sophistiquée, mais il est certain qu'une des manifestations de cette courbure s'était déjà présentée à eux. On peut par exemple penser à un triangle géodésique obtenu en coupant la sphère en huit, dont tous les angles sont droits et qui de ce fait n'est pas représentable dans le plan, voir la figure I.1.

Ajoutons aussi que, même si Ptolémée et ses inspirateurs (Ératosthène au troisième siècle avant notre ère, Hipparque le siècle suivant) considèrent déjà un modèle avec une planète ronde, les questions posées par

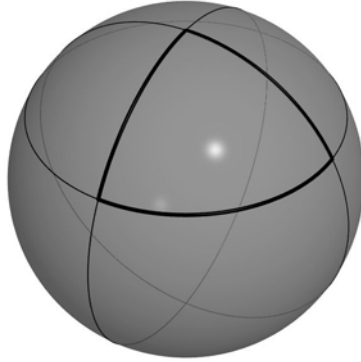


FIGURE I.1. Un triangle sphérique

la représentation de la voûte céleste posent le problème d'une représentation plane intelligente de la sphère indépendamment de la question de la forme de la Terre.

Les contraintes de représentation de grandes portions d'une sphère dépendent de l'usage à laquelle la carte est destinée. Un gouverneur collectant des impôts proportionnels à l'aire cultivée, un marin naviguant avec sa boussole et son astrolabe ou un astronome observant la voûte céleste n'ont pas les mêmes besoins. Sans prendre en compte (d'importantes) questions esthétiques, il peut paraître pertinent de demander, par exemple :

- que les aires soient préservées (ou, évidemment, multipliées par une même constante) : on parle alors de carte *équivalente*;
- que les angles soient préservés (carte *conforme*) ;
- que les distances par rapport à un point de référence soient préservées (carte *équidistante*) ;
- que certaines courbes privilégiées soient envoyées sur des segments de droite. On pense naturellement aux géodésiques (carte *orthodromique*), mais un marin privilégiera volontiers les routes à cap constant (carte *loxodromique*)...

On peut évidemment multiplier les contraintes qu'on veut imposer à notre carte, ce qui donne autant de problèmes différents à résoudre ou pour lesquels on prouve qu'il n'y a pas de solutions. Le livre [Sny1993] constitue une bonne introduction à cette histoire de la cartographie.

Encadré I.1 : Applications conformes

Nous allons revenir de nombreuses fois sur le concept de cartes conformes dans ce livre et il n'est peut-être pas inutile de préciser la terminologie. Étant donnée une application linéaire L d'un espace vectoriel euclidien $(E, \|\cdot\|)$ dans lui-même, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- L préserve les angles,
- L est une similitude : il existe une constante $c \neq 0$ telle que $\|L(v)\| = c\|v\|$ pour tout vecteur v de E .

Le mot français similitude insiste sur la préservation de la forme ; en allemand, on trouve l'adjectif *winkeltreu*, qui insiste lui sur la préservation des angles.

Un difféomorphisme entre deux ouverts du plan euclidien est dit *conforme* si sa différentielle vérifie ces propriétés en chaque point. L'expression « *semblable en ses parties infiniment petites* » était aussi couramment employée, en français comme en allemand. Nous verrons plus loin qu'une fois qu'on identifie le plan au plan complexe \mathbb{C} , on peut aussi dire que le difféomorphisme est holomorphe ou anti-holomorphe. On notera les analogies entre les racines grecques et latines : *morphe* et *forme*, de même que l'idée de préservation véhiculée par les préfixes *holo-* et *con-*.

Les savants de l'Antiquité disposaient, avant même la contribution de Ptolémée, de plusieurs projections. Une étape intermédiaire cruciale, tant théoriquement que pratiquement, est l'introduction des concepts de latitude et de longitude, déjà connus d'Hipparque. Le but est de donner un moyen de représenter deux villes distantes dans un même système de coordonnées. Pour cela, des critères astronomiques, notamment d'observation des étoiles, peuvent être utilisés. Typiquement, étant données deux villes A et B dans l'hémisphère Nord, si une étoile donnée est toujours visible par un observateur en A mais qu'un observateur en B voit au cours de la nuit cette étoile se lever et se coucher, on peut en déduire que A est plus au nord que B.

Une façon de construire une carte est donc d'imposer des contraintes sur les images du réseau des cercles à latitude constante – appelés *parallèles* – et des grands cercles à longitude constante – appelés *méridiens* –

dans la carte. Les cartographes appellent cette image le *graticule*. Ainsi, les cartes *rectangulaires* sont celles où les parallèles et les méridiens sont envoyés sur des droites, respectivement horizontales et verticales : le graticule est composé de rectangles. Et parmi celles-ci la carte *équirectangulaire* (aussi appelée *plate carrée*), antérieure à *La Géographie* de Ptolémée, traduit de plus par un espacement constant des écarts égaux de latitude et de longitude. Le graticule est donc un réseau carré (figure I.2).

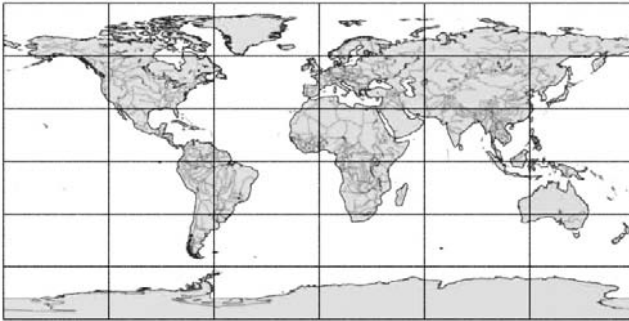


FIGURE I.2. La plate carrée

Une autre méthode naturelle de construction de cartes est de faire de simples opérations géométriques dans l'espace contenant la sphère afin d'en obtenir une image plane : on peut projeter sur un plan orthogonalement ou par rapport à un point, voire sur un cône ou un cylindre fictif avant de le déplier. Une très ancienne mise en application de cette pratique est la projection stéréographique. Connue d'Hipparque et probablement antérieure, elle est obtenue en projetant la surface de la Terre sur un plan tangent en un point (par exemple le pôle Sud) par rapport au point diamétralement opposé (figure I.3). On obtient ainsi une carte plane représentant toute la surface terrestre, sauf le point de projection. Évidemment, la distorsion introduite par cette méthode augmente quand on s'éloigne du point de tangence.

La propriété essentielle de cette carte est sa conformité : les angles dessinés sur la sphère sont égaux à ceux sur la carte. Cette propriété, précieuse pour les cartes du ciel comme pour les cartes terrestres ou maritimes, semble avoir été remarquée et démontrée pour la première fois

par le célèbre astronome anglais Edmond Halley à la fin du dix-septième siècle. Le livre [HiCo1932] contient une preuve élégante de ce fait.

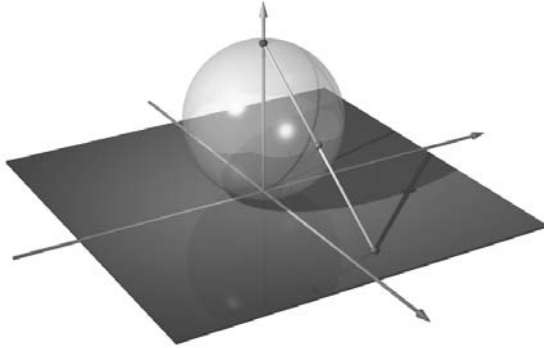


FIGURE I.3. Projection stéréographique

Même si on peut encore leur trouver des applications (la projection stéréographique sert encore à tracer des cartes du ciel et la carte équivalente reste le moyen le plus simple de tracer sur ordinateur une carte représentant des villes dont on connaît les latitudes et longitudes), ces deux cartes ne sont plus guère utilisées. Le planisphère qui nous est le plus familier est celui dû à Mercator en 1569.

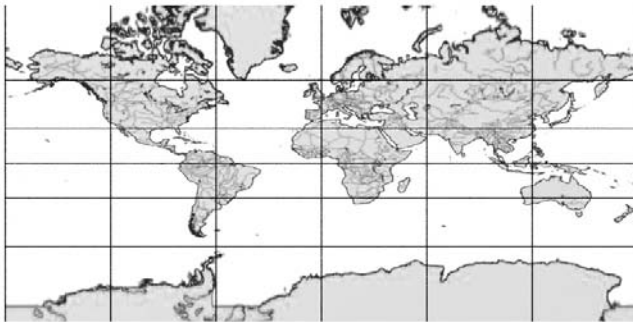


FIGURE I.4. La projection de Mercator

Le but de Mercator était de construire une carte rectangulaire, dans le même esprit que la plate carrée. La contrainte supplémentaire que Mercator se fixe est d'imposer aux routes à cap constant d'être envoyées sur des droites, ce qui rend l'utilisation pour la navigation plus aisée. Cela impose d'espacer de plus en plus les images des parallèles au voisinage des pôles, ce qui est la cause des distorsions des aires auxquelles nous sommes habitués. Mercator a effectivement construit un modèle de sa carte, probablement en calculant par une méthode graphique l'écartement nécessaire entre deux parallèles dont la latitude diffère de dix degrés. Après la projection stéréographique, celle de Mercator est la deuxième construction d'une projection conforme.

Introduction du calcul différentiel. — D'un point de vue mathématique, le dix-huitième siècle marque le renouveau de la conception et de l'étude de cartes géographiques, grâce à l'application du calcul différentiel. Le pionnier dans ce domaine est Johann Heinrich Lambert.

Également connu pour ses travaux en sciences physiques (*loi de Beer-Lambert* décrivant l'absorption de lumière par une solution chimique en fonction de sa concentration) et surtout pour la première preuve de l'irrationalité de π , Lambert a défini dans son ouvrage *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*⁽³⁾ et en particulier dans *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land und Himmelscharten*⁽⁴⁾ [Lam1772], écrit entre 1765 et 1772, de nombreuses méthodes de représentations cartographiques, et a ouvert la voie à l'étude analytique systématique des différentes contraintes, notamment l'équivalence et la conformité. Pratiquement, on lui doit par exemple la *projection conique conforme de Lambert*, projection officielle pour les cartes de France métropolitaine, mais il est aussi l'auteur des premières preuves analytiques de la conformité des cartes stéréographiques et de Mercator, qu'Euler redémontrera en 1777 dans [Eul1777].

Remarquant la traduction effectuée par Lambert des questions cartographiques dans un langage mathématique, Lagrange [Lag1779] entrevoit que le sujet permet de poser des questions plus générales que la réalisation de cartes conformes et la démonstration de leurs propriétés. Pour lui se pose la question de déterminer toutes les cartes conformes que l'on peut faire de la surface de la Terre, en affinant même

3. *Contribution à l'utilisation des mathématiques et à leur application.*

4. *Notes et commentaires sur la construction des cartes terrestres et célestes.*

le modèle communément utilisé : il postule que la forme de la Terre est plutôt « sphéroïdique », c'est-à-dire une surface « engendré[e] par la révolution d'une courbe quelconque autour d'un axe fixe ».

En résumant l'histoire de la conception de cartes, Lagrange note, sans explicitement citer Mercator, que la conception de cartes conformes qui ne soient pas directement obtenues par projection de la surface terrestre sur un cône ou un cylindre tangent a permis d'aborder le problème sous un angle plus général et plus fécond, et a transformé le problème pratique en question mathématique :

Cette recherche [de cartes conformes], également intéressante par les artifices analytiques qu'elle demande et par l'utilité dont elle peut être pour la perfection des Cartes géographiques, me paraît digne de l'attention des Géomètres et propre à fournir la matière d'un Mémoire.

Il propose donc de déterminer toutes les représentations conformes d'un solide de révolution. L'idée est ici d'imiter la projection de Mercator, c'est-à-dire d'explicitier les contraintes sur l'espacement des parallèles qu'impose la condition de conformité.

Introduisons les notations : la surface considérée est obtenue en faisant tourner un arc plan autour de l'axe joignant ses extrémités : les *pôles*. Une des coordonnées sur la surface sera donc la longitude φ , l'autre étant la longueur s de l'arc joignant le point de la courbe à l'un des pôles (dans le cas de la sphère de rayon égal à un, c'est le complément à $\pi/2$ de la latitude). Chaque point (φ, s) de la surface appartient donc à un cercle (le parallèle) de rayon noté $q(s)$. Dans le cas de la sphère, ce rayon est le sinus de s , autrement dit le cosinus de la latitude.

Avec ces notations, la métrique riemannienne⁽⁵⁾ (appelée aussi première forme fondamentale) de la surface s'écrit $ds^2 + q(s)^2 d\varphi^2$. Représenter conformément la surface revient donc à exprimer x et y , les coordonnées d'un point du plan, en fonction de s et φ , afin de satisfaire la relation de proportionnalité entre formes quadratiques suivante :

$$dx^2 + dy^2 = n(s, \varphi)^2 (ds^2 + q(s)^2 d\varphi^2).$$

Ici n est une fonction qui ne s'annule pas et qui représente le facteur de dilatation des distances au point considéré.

5. N'hésitons pas à employer la terminologie métrique « riemannienne » en parlant d'un théorème bien antérieur à Riemann.



FIGURE I.5. Une surface de révolution

Lagrange introduit alors un système de coordonnées solution de cette équation, généralisation au cadre de son étude de la projection de Mercator. Soit en effet les coordonnées

$$\begin{aligned} u(s) &= \int_0^s \frac{d\sigma}{q(\sigma)} \\ v &= \varphi. \end{aligned}$$

Ce changement de variables vérifie

$$du^2 + dv^2 = \frac{ds^2}{q(s)^2} + d\varphi^2 = \frac{1}{q(s)^2} (ds^2 + q(s)^2 d\varphi^2)$$

et définit donc (localement, hors des pôles) un système de coordonnées conformes pour la surface de révolution.

Le mémoire se poursuit sur la question de déterminer les autres systèmes de coordonnées conformes, maintenant que l'un d'eux est connu, et sur le cas particulier des cartes dont le graticule (c'est-à-dire les réseaux des images des méridiens et des parallèles) est formé de cercles, pour des raisons pratiques de conception. L'aboutissement théorique de l'évolution de la cartographie fournit en tout cas ici le premier exemple de coordonnées conformes sur une famille relativement générale de surfaces.

I.2.2. Le problème de la représentation conforme vu par Gauss

En 1822, la Société royale des sciences de Copenhague propose pour son prix le problème de la représentation des parties d'une surface donnée sur une autre surface donnée de telle sorte que la représentation soit « semblable à l'original dans les parties infiniment petites ». C'est

en 1825 que Gauss publie dans les *Astronomische Abhandlungen* de Schumacher son mémoire célèbre sur le sujet, que l'on retrouve dans ses *Œuvres* [Gau1825].

Le terme de *représentation conforme* n'est introduit par Gauss qu'en 1844 dans l'article I de la première partie de son mémoire sur la géodésie supérieure. Ce mémoire dépasse largement le problème tout particulier des cartes géographiques et joue dans la théorie des fonctions un rôle analogue à son travail *Disquisitiones generales circa superficies curvas* dans la théorie des surfaces.

Gauss démontre que *toute surface (analytique) est localement conformément équivalente au plan euclidien* (et donc que deux surfaces analytiques quelconques sont toujours localement conformément équivalentes)⁽⁶⁾. On appelle *carte conforme* un système de coordonnées locales $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dans lequel la métrique prend la forme $m(x, y)(dx^2 + dy^2)$. Le théorème de Gauss s'énonce alors :

Théorème I.2.1 (Gauss). — *Soit g une métrique riemannienne analytique réelle, définie au voisinage d'un point p sur une surface analytique. Alors il existe une carte conforme $V \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie sur un voisinage ouvert de p et à valeurs dans le plan euclidien.*

Nous allons donner les grandes lignes de la magnifique démonstration de Gauss.

Après avoir pris des coordonnées au voisinage de p , on dispose donc d'une métrique analytique g dans un voisinage U de l'origine dans \mathbb{R}^2 .

Nous allons commencer par démontrer un théorème exactement analogue mais dans le cas où l'ouvert U est muni d'une métrique *lorentzienne* g . On se donne donc en chaque point de U une forme quadratique de signature $(+, -)$ et il s'agit de montrer que cette métrique lorentzienne est conforme à la métrique lorentzienne standard $dx^2 - dy^2$ de \mathbb{R}^2 (pour une généralisation évidente du concept de conformité dans le cadre lorentzien). Voici comment on procède.

En chaque point de U , la métrique g définit deux droites sur lesquelles elle s'annule : les deux directions isotropes. Localement, on peut trouver deux champs de vecteurs non singuliers qui paramètrent ces directions. Lorsqu'on les intègre, on définit ainsi deux réseaux de courbes isotropes

6. Mentionnons que, pour Gauss, les surfaces sont plongées dans l'espace et munies de la métrique induite.

qui s'intersectent transversalement. Pour la métrique lorentzienne standard $dx^2 - dy^2$, ces courbes ne sont bien entendu que les droites parallèles de pente ± 1 .

On fixe maintenant l'origine O comme point base dans U et on choisit arbitrairement un point P_0 de \mathbb{R}^2 . Par le point O passent deux courbes isotropes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Par P_0 passent deux droites isotropes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de la métrique lorentzienne standard de \mathbb{R}^2 . On envoie \mathcal{C}_1 sur \mathcal{D}_1 par un difféomorphisme f_1 arbitraire, et \mathcal{C}_2 sur \mathcal{D}_2 par un autre difféomorphisme f_2 . Soit maintenant un point m de U suffisamment proche de l'origine. Par m passent deux courbes isotropes $\tilde{\mathcal{C}}_1$ et $\tilde{\mathcal{C}}_2$. Quitte à restreindre l'ouvert U en un ouvert plus petit V , on peut supposer que $\tilde{\mathcal{C}}_1$ intersecte \mathcal{C}_2 en un seul point p_2 , et l'autre, $\tilde{\mathcal{C}}_2$, intersecte \mathcal{C}_1 en un seul point p_1 .

La carte ψ que l'on cherche à construire est celle qui envoie le point m de V sur le point $M = \psi(m)$ de \mathbb{R}^2 , intersection des droites isotropes de \mathbb{R}^2 passant par les points $P_1 = f_1(p_1)$ et $P_2 = f_2(p_2)$. La transformation ψ ainsi définie envoie courbes isotropes de V sur droites isotropes de \mathbb{R}^2 et donc directions isotropes de la métrique lorentzienne g sur V sur directions isotropes de la métrique lorentzienne standard de \mathbb{R}^2 .

Remarquons – c'est un point important – que deux formes quadratiques de signature $(+, -)$ sur un espace vectoriel réel de dimension 2 sont proportionnelles si et seulement si elles ont les mêmes directions isotropes.

On peut donc écrire $\psi_*g = m(x,y)(dx^2 - dy^2)$ où m est une fonction qui ne s'annule pas. Autrement dit, ψ est une carte conforme et le théorème de Gauss est établi *dans le cadre lorentzien* (sans hypothèse d'analyticité).

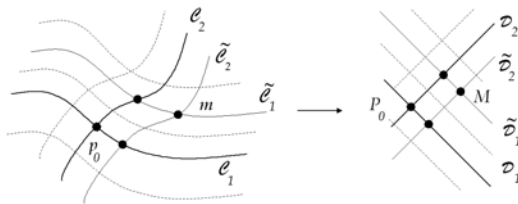


FIGURE I.6. Théorème de GAUSS, version lorentzienne

Dans le cas où g est une métrique *riemannienne* analytique réelle, il n'y a bien sûr pas de direction isotrope. Mais c'est la même idée qui est mise en œuvre avec, cependant, plus d'imagination. Exprimons d'abord les idées en termes modernes. On commence par complexifier l'ouvert U en un ouvert $\hat{U} \subset \mathbb{C}^2$; c'est un voisinage ouvert de U considéré maintenant comme contenu dans \mathbb{C}^2 . On notera $\hat{g}_0 = dx^2 + dy^2$ la métrique « riemannienne complexe » standard de \mathbb{C}^2 , où x et y sont les coordonnées (complexes!) usuelles sur \mathbb{C}^2 (à strictement parler ce n'est pas une métrique riemannienne puisque cette forme quadratique prend des valeurs complexes). Les coefficients de la métrique g étant des fonctions analytiques réelles, on peut – quitte à diminuer \hat{U} – prolonger g de manière unique en une métrique \hat{g} analytique complexe (*i.e.* holomorphe) sur l'ouvert \hat{U} . Puisque les coefficients de g sont réels, \hat{g} est invariant par la conjugaison complexe $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$. Sur \mathbb{C}^2 on dispose de deux réseaux transverses de droites complexes isotropes pour la métrique standard \hat{g}_0 , d'équations $y = \pm ix + \text{cte}$. Sur \hat{U} on dispose de deux champs de droites complexes holomorphes, isotropes pour la métrique \hat{g} . On les intègre pour obtenir deux champs de courbes holomorphes se coupant transversalement (ces courbes dans \mathbb{C}^2 correspondent à des surfaces dans \mathbb{R}^4).

On envoie alors l'origine O de U sur un point réel arbitraire P_0 de $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$. Par O passe une courbe complexe isotrope \mathcal{C}_1 . Par O passe également la courbe complexe \mathcal{C}_2 transformée par conjugaison complexe de la courbe \mathcal{C}_1 . À l'aide de ces courbes on définit, exactement comme dans le cadre lorentzien, une transformation $\hat{\psi}$ d'un voisinage \hat{V} de O inclus dans \hat{U} , à image dans \mathbb{C}^2 . Le difféomorphisme $\hat{\psi}$ a la propriété additionnelle d'être invariant par la conjugaison complexe. Il induit donc un difféomorphisme de $V = \hat{V} \cap \mathbb{R}^2$ sur son image $\hat{\psi}(\hat{V}) \cap \mathbb{R}^2$. Le fait que la complexification d'un difféomorphisme ψ préserve les directions isotropes de la complexification d'une métrique signifie précisément que la carte est conforme. Le théorème de Gauss est établi. \square

Gauss ne s'exprime pas exactement de cette manière même si c'est la méthode qu'il emploie.

Il écrit d'abord g sous la forme

$$g = a(x, y) dx^2 + 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dy^2, \quad ac > b^2.$$

Puis il décompose la forme quadratique en un produit de deux formes linéaires conjuguées (qui définissent les directions isotropes) :

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{a} \left(a dx + (b + i\sqrt{ac - b^2}) dy \right) \left(a dx + (b - i\sqrt{ac - b^2}) dy \right) \\ &= \frac{1}{a} \omega \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Ici ω est ce que nous appelons aujourd'hui une 1-forme holomorphe des variables complexes (x, y) . L'équation $\omega = 0$ peut être considérée comme une équation différentielle dont les solutions prennent localement la forme $f(x, y) = \text{cste}$ pour une certaine fonction f localement définie au voisinage de l'origine. Autrement dit, ω prend la forme $h df$ pour une certaine fonction h . En décomposant f en parties réelle et imaginaire $u + iv$, il vient

$$\omega = h(du + idv) \quad (\text{et donc aussi } \bar{\omega} = \bar{h}(du - idv))$$

d'où finalement

$$g = \frac{h\bar{h}}{a} (du^2 + dv^2).$$

Les coordonnées (u, v) obtenues sont réelles, par construction ; le coefficient de dilatation $m := \frac{f\bar{f}}{a}$ est visiblement une fonction analytique réelle de (x, y) . Le théorème I.2.1 est donc établi. \square

Bien entendu, les cartes conformes locales ψ ne sont pas uniques. Deux d'entre elles diffèrent par une transformation conforme du plan. Il s'agit donc de décrire la nature des transformations $(x, y) \mapsto (X, Y)$ entre ouverts de \mathbb{R}^2 préservant la structure conforme standard ce qui s'exprime par $dX^2 + dY^2 = m(x, y)(dx^2 + dy^2)$ pour une certaine fonction m .

Autrement dit, il faut et il suffit que la différentielle soit une similitude en tout point. Si l'on suppose que l'orientation est préservée (similitude directe), ceci s'écrit en formules

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

On reconnaît bien sûr les équations de « Cauchy-Riemann » qui expriment que $X + iY$ est une fonction holomorphe de $x + iy$. On trouve d'ailleurs cette manière d'exprimer le caractère conforme d'une carte en termes de $dx + idy$ dès 1777 chez Euler!

Résumons en termes modernes ce que Gauss obtient.

Toute surface (analytique et orientée) peut être représentée par des cartes locales conformes préservant l'orientation à valeurs dans le plan euclidien, identifié au plan complexe. Deux de ces cartes diffèrent d'un « changement de cartes » holomorphe.

Nous dirons bientôt que toute métrique riemannienne sur une surface orientée définit une *surface de Riemann*.

Le théorème de Gauss que nous avons établi dans le cas des métriques analytiques réelles reste vrai pour des métriques C^∞ ou même mesurables, mais il est alors bien plus difficile. Il sera démontré par Korn en 1914 et Lichtenshtein en 1916 dans le cadre C^∞ , et finalement par Ahlfors et Bers en 1960 dans le cadre mesurable (voir [Ahl2006]).

Gauss ne s'en tient pas là et illustre sa méthode par de nombreux exemples : il commence par représenter la surface d'un plan, puis celle d'un cône et d'une sphère sur un plan. Mais Gauss ne perd pas de vue le problème concret qui a soulevé cette question de l'Académie et c'est pourquoi il termine son mémoire en développant le cas d'un ellipsoïde de révolution. La détermination des cartes conformes sur un ellipsoïde qui n'est pas de révolution nécessite l'utilisation des intégrales elliptiques qui sont le thème du paragraphe suivant.

I.3. Un survol du développement des fonctions elliptiques

À la fin du dix-neuvième siècle, les fonctions elliptiques étaient au cœur des mathématiques. On les rencontrait partout, en géométrie, en algèbre, en théorie des nombres, en analyse, en mécanique et elles faisaient partie d'une culture mathématique commune à tous.

Certes les fonctions elliptiques ont permis d'uniformiser certaines courbes algébriques (celles de genre 1) et elles sont donc importantes pour notre sujet. Mais de manière plus importante encore, cette théorie a servi de source d'inspiration pour Riemann, Klein et Poincaré, entre autres, dans leurs études des courbes algébriques générales. Poincaré par exemple a présenté sa théorie des fonctions fuchsiennes comme une « simple » généralisation de celle des fonctions elliptiques. C'est surtout pour cette raison que nous allons décrire rapidement la théorie et son développement.

Il existe beaucoup de livres excellents sur les fonctions elliptiques, y compris d'un point de vue historique. Parmi nos préférés, on pourra consulter par exemple [McKMo1997, Bos1992, Hou1978]. L'existence de ces livres nous autorise donc à ne raconter une longue histoire qu'à grands traits, en nous concentrant sur ce dont nous avons besoin dans la suite.

Au dix-neuvième siècle, les analystes disposent d'un petit nombre de *fonctions élémentaires* : les polynômes et les fractions rationnelles bien sûr, les *fonctions algébriques* $y(x)$ vérifiant une équation polynomiale $F(x, y) = 0$ (même si elles sont multiformes) mais aussi les fonctions exponentielles et trigonométriques. La première tentative pour « trouver de nouvelles transcendentes qui enrichissent l'analyse » consiste à étudier les primitives des fonctions déjà connues. Cette technique avait déjà fait ses preuves pour « découvrir » par exemple le logarithme

$$\log(x) = \int \frac{dx}{x}.$$

Euler, Gauss, Legendre, Abel, Jacobi, entre autres, s'attaquèrent à l'étude générale des intégrales que, suivant Jacobi, on appelle aujourd'hui *intégrales abéliennes*, c'est-à-dire de la forme

$$\int R(x, y) dx$$

où R est une fraction rationnelle en deux variables x, y et où y est une fonction algébrique de x . Nous présentons ici brièvement leurs contributions respectives.

I.3.1. Euler

La première étude est un calcul un peu « magique » fait par Euler alors qu'il commentait un article de Fagnano. Il s'agit d'étudier l'une des premières primitives qu'on ne pouvait exprimer par des fonctions élémentaires :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

qui entre dans le cadre précédent avec $y^2 = 1 - x^4$ et $R(x, y) = 1/y$. Cette primitive intervient lorsque l'on veut calculer la longueur d'un arc de lemniscate dont l'équation en coordonnées polaires est $r^2 = \sin(2\theta)$ (c'est la dernière courbe de la figure 2, page 14).

Euler démontre un « théorème d'addition » en 1752 :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

avec

$$z = (x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}) / (1+x^2y^2).$$

Sa motivation provient sans aucun doute de l'intégrale analogue

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(x).$$

Si bien que la formule

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

donne la formule d'addition :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

avec

$$z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Il faut noter qu'à ce stade, ces identités sont établies pour des x, y dans l'intervalle $[0, 1]$. Mais elle pose des problèmes de choix de détermination de la racine carrée dès qu'on sort de cet intervalle. Mentionnons en outre qu'Euler ne fait pas explicitement usage de variables complexes dans ce travail.

1.3.2. Gauss

Gauss n'a rien publié de son vivant sur le sujet mais ses lettres attestent qu'il avait compris la question, à partir de 1796. Sa première idée est d'inverser la fonction

$$a = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

et de considérer x comme une fonction de a , qu'il note $x = \text{lemn}(a)$. Là encore, on peut penser à l'analogie avec le cercle ; il est agréable de paramétrer le cercle par longueur d'arc, en sinus et cosinus. Suivant Euler, il peut établir une formule d'addition pour $\text{lemn}(a+b)$ mais il ne s'arrête pas là.

Même s'il hésite encore (à cette époque) à considérer l'intégrale précédente lorsque x est un nombre complexe, il est tenté de choisir x imaginaire pur, de la forme iy , et de considérer l'intégrale

$$\int_0^y \frac{i dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

On est donc amené à poser $\operatorname{sin lemn}(ib) = i \operatorname{sin lemn}(b)$. Puisque l'on dispose d'une formule d'addition, cela permet de définir $\operatorname{sin lemn}(a + ib)$ en fonction de $\operatorname{sin lemn}(a)$ et $\operatorname{sin lemn}(b)$. La fonction elliptique $\operatorname{sin lemn}$ d'une variable complexe $a + ib$ venait de naître.

Gauss continue alors l'étude de cette fonction par analogie avec la fonction sinus. À partir de la formule d'addition, convenablement étendue sur tout \mathbb{R} , on montre que la fonction $\operatorname{sin lemn}$ est périodique de période

$$2\varpi = 4 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

De la même façon, on trouve une seconde période égale à $2i\varpi$ ⁽⁷⁾. La fonction $\operatorname{sin lemn}$ admet donc deux périodes linéairement indépendantes, ce qui est la définition des fonctions elliptiques. La terminologie « elliptique » provient du fait que ces transcendentes interviennent non seulement pour calculer la longueur des arcs de la lemniscate, mais aussi des ellipses.

La suite du travail de Gauss est également importante mais elle nous éloigne quelque peu de notre but. On note cependant de magnifiques expressions en produit infini pour $\operatorname{sin lemn}(z)$, comme celle-ci :

$$\operatorname{sin lemn}(z) = z \frac{\prod'_{m,n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_{m,n}}\right)}{\prod'_{m,n} \left(1 - \frac{z}{\beta_{m,n}}\right)}$$

où \prod' désigne le produit sur tous les couples (m, n) dans $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\alpha_{m,n} = (m + in)\varpi$ et $\beta_{m,n} = ((2m - 1) + i(2n - 1))\varpi/2$. On notera l'apparition des fameux « entiers de Gauss ».

7. 2ϖ est le périmètre de la lemniscate considérée. C'est pour cette raison que la notation ϖ a été introduite.

I.3.3. Abel et Jacobi

Nous avons vu que Gauss n'a rien publié de ses découvertes sur le sujet. Vingt-cinq ans plus tard, Abel et Jacobi reprendront le chemin suivi par Gauss. Mais autour de 1827 ils iront beaucoup plus loin, en partie indépendamment et en partie en se stimulant mutuellement dans une compétition relativement tendue. On pourra lire à ce sujet la correspondance passionnante entre le jeune Jacobi et un Legendre vieillissant qui joue souvent le rôle d'intermédiaire [LeJa1875].

C'est l'occasion de signaler que Legendre doit être considéré également comme l'un des précurseurs de la théorie puisqu'il y consacra quarante années de sa vie, à partir de 1786. Son travail culminera avec son *Traité des fonctions elliptiques* (trois volumes) en 1830. Il faut cependant noter que les fonctions elliptiques de Legendre sont des fonctions d'une variable réelle et que l'une des motivations principales est d'en établir des tables numériques, en vue d'applications. On notera également que Legendre n'avait pas pensé à la double périodicité de la *réci-proque* de la primitive de $1/\sqrt{1-t^4}$.

Rappelons que les primitives de la forme $\int p(x)/\sqrt{q(x)} dx$ – où p est un polynôme de degré quelconque et q est un polynôme de degré au plus 2 – peuvent se calculer à l'aide de logarithmes et de fractions rationnelles. Géométriquement, cela revient au fait que la courbe d'équation $y^2 = q(x)$ est une conique. On peut donc la paramétrer rationnellement si bien qu'on est ramené à calculer la primitive d'une fraction rationnelle, qui peut se calculer à partir du cas particulier de la primitive de $1/x$: le logarithme.

L'une des contributions de Legendre est d'étudier systématiquement les primitives de la forme $\int p(x)/\sqrt{q(x)} dx$ lorsque le degré de q est au plus 4. Si le degré est 3 ou 4, Legendre montre comment on peut ramener le calcul à trois espèces précises, qui jouent en quelque sorte le rôle du logarithme, et qu'il peut ensuite tabuler.

Quoi qu'il en soit, Abel et Jacobi étudient

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

et ont la bonne idée de penser à x comme une fonction de u (sans savoir que Gauss avait eu la même idée). Le module « module » k étant fixé, ils notent $x = \sin \operatorname{am}(u)$. Ils « établissent » que x est une fonction

méromorphe uniforme et doublement périodique de u , qui vérifie une formule d'addition. Ils obtiennent par ailleurs un grand nombre de développements en séries de ces fonctions.

Un thème central de leurs études est celui des « transformations ». Il s'agit de formules qui semblent quelque peu magiques, reliant les valeurs de $\sin \operatorname{am}(u)$ pour des valeurs différentes du module k (certains cas avaient d'ailleurs été trouvés par Euler). C'est le début de la théorie des équations modulaires que nous ne décrivons pas ici, même si elles apparaîtront lors de notre discussion de la quartique de Klein.

1.3.4. Jacobi et les fonctions ϑ

En 1835–1836, Jacobi développe des outils extrêmement puissants pour construire des fonctions elliptiques comme quotients de fonctions holomorphes. Ce sont les fonctions ϑ . Leur écriture est relativement simple. Partant d'un paramètre ω complexe, on pose $p = \exp(i\pi z)$ et $q = \exp(i\pi\omega)$. On note alors :

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z) &= \vartheta_1(z|\omega) = i \sum (-1)^n p^{2n-1} q^{(n-1/2)^2}, \\ \vartheta_2(z) &= \vartheta_2(z|\omega) = i \sum p^{2n-1} q^{(n-1/2)^2}, \\ \vartheta_3(z) &= \vartheta_3(z|\omega) = i \sum p^{2n} q^{n^2}, \\ \vartheta_4(z) &= \vartheta_4(z|\omega) = i \sum (-1)^n p^{2n} q^{n^2}.\end{aligned}$$

Lorsqu'on a $\operatorname{Im} \omega > 0$, ces séries convergent et définissent des fonctions 1-périodiques de z . Elles ne sont néanmoins pas elliptiques dans le sens où elles n'ont pas d'autre période linéairement indépendante. Cependant $\vartheta_i(z + \omega)$ s'exprime très simplement à partir de $\vartheta_i(z)$. Par exemple :

$$\vartheta_1(z + \omega) = -p^{-2}q^{-1}\vartheta_1(z).$$

L'intérêt est donc que des quotients de deux fonctions ϑ peuvent être des fonctions doublement périodiques. Ainsi ϑ_1/ϑ_4 est une fonction elliptique de périodes 1 et ω . Les fonctions ϑ vérifient un nombre incroyable d'identités aussi étonnantes les unes que les autres et leurs applications – notamment en théorie des nombres – n'ont cessé de prouver leur intérêt.

On peut consulter par exemple [McKMo1997, Mum1983, Mum1999], pour en savoir *beaucoup* plus.

I.3.5. La mise en forme : Eisenstein, Liouville et Weierstrass

Après 1840, la théorie des *fonctions elliptiques* allait se stabiliser et prendre la forme qu'on lui connaît aujourd'hui. On appelle dorénavant fonction elliptique toute fonction méromorphe f dans le plan complexe qui admet deux périodes indépendantes ω_1, ω_2 :

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ et m, n entiers relatifs.

Les fonctions obtenues par Abel et Jacobi comme réciproques de primitives de $1/\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ sont des exemples de telles fonctions, mais y en a-t-il d'autres ? Peut-on choisir arbitrairement les périodes ? Ici encore, nous devons nous limiter à des énoncés rapides, résultats des travaux indépendants d'Eisenstein, Liouville et Weierstrass, qui pouvaient être considérés comme acquis lorsque Riemann commence à travailler sur sa thèse.

Partant de deux nombres complexes ω_1 et ω_2 (linéairement indépendants sur \mathbb{R}) le réseau qu'ils engendrent est l'ensemble Λ des nombres complexes de la forme $m\omega_1 + n\omega_2 \in \mathbb{C}$ avec m, n entiers relatifs. C'est un sous-groupe discret de \mathbb{C} et la périodicité signifie que la fonction f est en fait définie sur le tore quotient \mathbb{C}/Λ qui est un exemple fondamental de surface de Riemann comme nous le verrons bientôt.

La fonction de Weierstrass est définie par :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

On vérifie que la série converge et qu'elle définit bien une fonction méromorphe elliptique dont le réseau des périodes est précisément Λ . Elle présente un pôle d'ordre 2 à l'origine de \mathbb{C}/Λ et elle est holomorphe ailleurs.

La seconde étape est d'établir une *équation différentielle* pour cette fonction. On introduit les *sommes d'Eisenstein* :

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-4}$$

$$g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-6}$$

puis on montre que

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Pour montrer ce genre d'égalité, on utilise une méthode à la Liouville : la différence entre les deux membres est une fonction méromorphe elliptique et les coefficients ont été choisis pour que le pôle disparaisse. On conclut en remarquant qu'une fonction elliptique *holomorphe* est constante (par la compacité de \mathbb{C}/Λ et le principe du maximum).

Concrètement, cela montre que la courbe algébrique projective C d'équation affine

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

est *uniformisée* par le tore \mathbb{C}/Λ via le paramétrage

$$z \in \mathbb{C}/\Lambda \mapsto (\wp(z), \wp'(z)) \in C.$$

Il faut encore montrer que réciproquement, étant donnés g_2 et g_3 tels que la courbe C est non singulière, c'est-à-dire tels que $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, on peut trouver un réseau Λ dont les invariants d'Eisenstein sont égaux à g_2 et g_3 . On peut y parvenir de plusieurs manières mais la plus simple est de considérer l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}},$$

et de l'inverser comme l'ont fait Gauss, Abel et Jacobi. Les périodes de la fonction elliptique ainsi obtenue répondent à la question.

Pour terminer, on peut aussi montrer que toute courbe lisse de degré 3 dans le plan projectif est projectivement équivalente à une courbe du type précédent (la forme dite de Weierstrass, déjà décrite par Newton) : il suffit de rejeter à l'infini la tangente en l'un des points d'inflexion.

Le résultat de cette discussion est que toute courbe lisse de degré 3 dans le plan (projectif complexe) est isomorphe à un tore \mathbb{C}/Λ et que cet isomorphisme est donné par une fonction elliptique.

Encore un point pour terminer ce chapitre préliminaire : \mathbb{C}/Λ est bien sûr un groupe abélien si bien que la courbe cubique lisse associée l'est également. Nous l'avons déjà observé grâce aux formules d'addition d'Euler. Il se trouve que la loi d'addition sur la cubique est extrêmement simple. On fixe d'abord un point d'inflexion sur la cubique, qu'on déclare être l'élément neutre et ensuite on déclare que les trois points d'intersection de la cubique avec une droite quelconque sont de somme nulle. Cela définit entièrement la loi d'addition. La démonstration que cette construction géométrique correspond effectivement à une loi de

groupe est un exercice intéressant de géométrie projective (voir par exemple [McKMo1997]).

Il est intéressant de constater que la définition projective simple de cette structure semble avoir été inconnue des héros de ce chapitre. On apprend même dans [Cat2004, Scha1991] que Poincaré n'avait peut-être pas l'idée claire que les points rationnels d'une cubique définie sur \mathbb{Q} forment un groupe abélien (même s'il énonce qu'il est de « rang fini »).

Riemann

On étudie ici deux mémoires de Bernhard Riemann : sa thèse de doctorat [Rie1851] soutenue à Göttingen en 1851 dans laquelle il développe la théorie des fonctions holomorphes et démontre le théorème de représentation conforme, et son article sur les fonctions abéliennes [Rie1857] publié au journal de Crelle six ans plus tard. Dans ce dernier, Riemann utilise les techniques développées dans sa thèse pour construire une théorie générale des fonctions algébriques et des intégrales abéliennes qui leur sont attachées. Rappelons qu'une fonction $s(z)$ est dite algébrique si elle vérifie une équation polynomiale $P(s(z), z) = 0$ et qu'une intégrale abélienne est une intégrale du type $\int F(s(z), z) dz$, où F est une fraction rationnelle à deux variables.

Par la suite, l'article [Rie1857] a été considéré comme étant fondateur de grandes lignées de recherches en mathématiques, parmi lesquelles la topologie et la géométrie analytique des surfaces de Riemann compactes, leurs espaces de modules, le problème de Riemann–Roch, la géométrie birationnelle, la théorie des fonctions thêta générales et des variétés abéliennes, le problème de Dirichlet, la théorie de Hodge, etc. En ne regardant que son futur proche, pendant les 25 années suivantes, ses résultats ont été géométrisés par Clebsch, puis Brill et Noether, ensuite arithmétisés par Dedekind et Weber ; ils ont également commencé à être étendus aux surfaces algébriques par Clebsch et Noether.

Il est passionnant d'essayer de découvrir les germes de tous ces concepts dans cet article.

II.1. Préliminaires : fonctions holomorphes et surfaces de Riemann

II.1.1. Fonctions holomorphes

Nous expliquons maintenant les travaux de Riemann sur l'uniformisation des ouverts simplement connexes du plan. Ces travaux sont contenus dans sa thèse [Rie1851], publiée en 1851.

Rappelons tout d'abord comment Riemann introduit la notion de fonction holomorphe, dans le tout premier paragraphe de ce mémoire. Il considère une fonction $w(z) = u(z) + iv(z)$, à valeurs complexes, d'une grandeur $z = x + iy$ variant dans un ouvert U du plan complexe. Il étudie alors le rapport

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{z' \rightarrow z} \frac{w(z) - w(z')}{z - z'}$$

et observe :

lorsque la dépendance de la grandeur w de z est prise arbitrairement, le rapport $\frac{du+idv}{dx+idy}$ variera, d'une manière générale, avec les valeurs de dx et de dy .

On peut reformuler cela comme suit : si l'on note

$$dw_z : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

la différentielle, au sens réel, de la fonction w en un point z , et si l'on considère un petit accroissement $dz = \varepsilon e^{i\varphi}$ de la variable z , on a

$$\begin{aligned} \frac{dw_z(\varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) e^{-2i\varphi}. \end{aligned}$$

Si le terme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

ne s'annule pas au point z , la quantité $\frac{dw_z(\varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}}$ varie lorsque $e^{i\varphi}$ varie. Mais Riemann observe que pour toutes les fonctions w obtenues par « des opérations élémentaires du calcul » à partir de z , la quantité $\frac{dw_z(\varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}}$ ne dépend pas de $dz = \varepsilon e^{i\varphi}$. Il propose donc de prendre cette propriété comme définition de ce qu'il appelle une *fonction d'une variable complexe* :

Une grandeur variable complexe w est dite une fonction d'une autre grandeur variable complexe z lorsqu'elle varie avec elle de telle sorte que la valeur de la dérivée $\frac{dw}{dz}$ est indépendante de la valeur de la différentielle dz .

Autrement dit, le terme « fonction d'une variable complexe » désigne toujours, chez Riemann, une fonction holomorphe. Par définition, ces fonctions sont donc celles qui vérifient les équations de Cauchy–Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (\text{II.1})$$

ce qui équivaut encore au fait que la 1-forme différentielle complexe

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy)$$

est fermée. On peut montrer que dans ce cas la fonction $f'(z) := \frac{df}{dz}$ est bien définie et à nouveau holomorphe : f est alors indéfiniment différentiable.

Si la fonction $f = u + iv$ est holomorphe, la double différentiabilité de f et les équations de Cauchy–Riemann impliquent que les fonctions u et v vérifient

$$\Delta u = \Delta v = 0,$$

où $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le laplacien associé à la coordonnée complexe z . On dit dans ce cas que u et v sont *harmoniques*. Les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques.

Réciproquement, si l'ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est simplement connexe et u est harmonique sur U , il existe une fonction holomorphe $f_u : U \rightarrow \mathbb{C}$, définie à une constante imaginaire pure près, telle que $u = \text{Re}(f_u)$. La fonction f_u est simplement une primitive de la 1-forme holomorphe

$$du - i du \circ i.$$

La fonction $u^* = \text{Im}(f_u)$, définie à une constante près, est appelée *fonction conjuguée* de u .

Cette parenté profonde entre fonctions holomorphes et harmoniques est au cœur des méthodes de [Rie1851, Rie1857], puisque c'est par l'étude des fonctions harmoniques et notamment celle du principe de Dirichlet que Riemann démontrera le théorème de représentation conforme et l'existence de certaines intégrales abéliennes.

Rappelons également que les fonctions harmoniques vérifient la propriété de la moyenne. Si le disque $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}$ est

contenu dans U , alors on a

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z_0, r)} u(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Cette propriété caractérise d'ailleurs les fonctions harmoniques : une fonction continue (et même mesurable) est harmonique si et seulement si elle vérifie la propriété de la moyenne. Une conséquence de ceci est que les fonctions harmoniques vérifient le *principe du maximum* : si u admet un extremum local en un point z_0 de U , u est constante au voisinage de z_0 . Une autre conséquence est qu'une fonction $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ qui est limite uniforme sur les compacts de fonctions harmoniques est lisse et harmonique.

Il est à noter que, contrairement à Abel, dont l'approche est essentiellement algébrique, composée de manipulations de fonctions de plusieurs variables et d'équations algébriques et différentielles, Riemann étudie constamment les fonctions indépendamment de toute expression, uniquement à partir de leurs propriétés, comme il l'explique dans l'introduction de [Rie1857] :

Je considérerai comme fonction de $x + yi$ toute grandeur w qui varie avec cette quantité en satisfaisant toujours à l'équation

$$i \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

sans faire l'hypothèse d'une expression de w en x et y .⁽¹⁾

Ce souci de ne pas partir d'expression des fonctions est repris un peu plus loin :

D'après un théorème connu, dont on a parlé précédemment, la propriété d'être uniforme revient pour une fonction à la possibilité d'être développée suivant les puissances entières positives ou négatives des accroissements des grandeurs variables, et la ramification de la fonction revient à la non-possibilité d'un tel développement. Mais il ne semble pas utile d'exprimer les propriétés, qui sont indépendantes du mode de représentation, à l'aide de ces caractères, qui reposent sur une forme déterminée explicite de l'expression de la fonction.

1. On reconnaît là une autre formulation des équations de Cauchy-Riemann.

Voici un point de vocabulaire nécessaire à la lecture de l'article de Riemann : lorsqu'il parle de « *fonction de x, y* », il s'agit d'une fonction sans hypothèse supplémentaire ; mais lorsqu'il parle de « *fonction de $x + yi$* », il s'agit nécessairement d'une fonction holomorphe, dans les deux cas ces fonctions pouvant être multiformes ou discontinues. L'extrait suivant de sa thèse [Rie1851, § 5] précise le type de discontinuités qu'il envisage, mais il est en même temps intéressant par la définition qu'il donne de l'expression « *d'une manière générale* ».

Une grandeur variable, qui, d'une manière générale, c'est-à-dire sans exclure sans faire d'exception en des lignes ou points isolés, prend en tout point O de la surface T une valeur déterminée variant d'une manière continue avec la position de ce point, peut être évidemment regardée comme une fonction de x, y , et, partout où dorénavant il sera question de fonctions de x, y , nous adopterons cette définition.

II.1.2. Surfaces de Riemann

Définition moderne. — Aujourd'hui, une surface de Riemann est définie comme une variété complexe de dimension 1 :

Définition II.1.1 (Surface de Riemann). — Une *surface de Riemann* est un espace topologique X (connexe, séparé) muni d'un *atlas* $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ où $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ forme un recouvrement ouvert de X et les $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda$ sont des homéomorphismes vers des ouverts de \mathbb{C} (*les cartes*) tels que les compositions

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$$

sont des transformations biholomorphes (c'est-à-dire des bijections holomorphes).

Avec cette définition, on peut étendre immédiatement les propriétés et objets locaux de \mathbb{C} et définir les notions de fonctions et de formes holomorphes ou méromorphes, d'applications holomorphes et de biholomorphismes (ou isomorphismes) entre surfaces de Riemann.

Le théorème de Gauss nous fournit d'ores et déjà une large source d'exemples : on peut maintenant le réinterpréter en disant que toute métrique riemannienne analytique réelle sur une surface analytique la munit d'une structure de surface de Riemann. L'interaction entre cette structure et la géométrie de la métrique sera au cœur des travaux de Klein au chapitre suivant.

La sphère de Riemann. — En plus de \mathbb{C} et de ses ouverts, les premiers exemples sont les tores \mathbb{C}/Λ rencontrés dans l'introduction et celui de la *sphère de Riemann* : on peut en effet recouvrir la sphère unité

$$\mathbb{S}^2 := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 ; X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$$

par les deux ouverts $\mathbb{S}^2 \setminus N$ et $\mathbb{S}^2 \setminus S$ (où $S = (0, 0, -1)$ et $N = (0, 0, 1)$ sont les pôles sud et nord) que l'on munit des *projections stéréographiques*

$$\begin{aligned} \varphi_N : \quad \mathbb{S}^2 \setminus N &\rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \\ P = (X, Y, Z) &\mapsto \frac{X+iY}{1-Z} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_S : \quad \mathbb{S}^2 \setminus S &\rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \\ P = (X, Y, Z) &\mapsto \frac{X-iY}{1+Z}. \end{aligned}$$

Pour un point P de la sphère différent des pôles, on vérifie l'équation $\varphi_N(P) = 1/\varphi_S(P)$; puisque $z \mapsto 1/z$ est une fonction holomorphe sur \mathbb{C}^* , cela munit la sphère d'une structure de surface de Riemann, notée $\overline{\mathbb{C}}$, que l'on peut penser comme la compactification naturelle de \mathbb{C} par un point à l'infini, ou de manière équivalente comme la droite projective $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Les deux notations cohabitent d'ailleurs dans tout ce livre.

Comme le rappelle [Cho2007, page 98], la construction de la sphère de Riemann par projection stéréographique est parue pour la première fois par écrit dans [Neum1865], qui est le premier manuel consacré à la théorie des surfaces de Riemann. Dans l'introduction de son livre, Neumann mentionne que Riemann enseignait cette construction, qui ne s'est transmise qu'oralement.

Le disque, le plan, la sphère et leurs automorphismes. — Avec le disque \mathbb{D} et le plan \mathbb{C} , cette sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ constitue le dernier modèle auquel le théorème d'uniformisation ramène toute surface de Riemann simplement connexe. Décrivons les groupes d'automorphismes de ces exemples.

Tout d'abord, si

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$$

alors l'application

$$z \mapsto w = i \frac{1+z}{1-z} \tag{II.2}$$

est un isomorphisme holomorphe de \mathbb{D} sur le *demi-plan supérieur*

$$\mathbb{H} := \{w \in \mathbb{C} ; \text{Im } w > 0\}.$$

Ainsi les groupes d'automorphismes de \mathbb{D} et \mathbb{H} sont isomorphes et l'on peut passer concrètement d'une action à l'autre à l'aide de (II.2). L'avantage du modèle \mathbb{H} est que l'on voit plus simplement que le groupe d'automorphismes est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$. Précisément, un élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ agit à gauche sur \mathbb{H} par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot w = \frac{aw + b}{cw + d}.$$

Le groupe des automorphismes de \mathbb{C} est simplement le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ des transformations affines complexes de \mathbb{C} :

$$(a, b) \cdot z = az + b,$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Quant au groupe des automorphismes de $\overline{\mathbb{C}}$, il s'agit de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, agissant à gauche par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Ces transformations s'appellent *homographies*.

Ces trois groupes d'automorphismes sont diversement transitifs :

1. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ est 1-transitif et un élément de ce groupe est complètement déterminé par l'image d'un point de \mathbb{D} et d'un point de $\partial\mathbb{D}$ (auquel l'action du groupe se prolonge par continuité).
2. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est 2-transitif et un élément de ce groupe est complètement déterminé par les images de deux points distincts de \mathbb{C} .
3. $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ est 3-transitif et un élément de ce groupe est complètement déterminé par les images de trois points distincts de $\overline{\mathbb{C}}$.

Fonctions multiformes et surfaces de Riemann. — Notre définition de surface de Riemann est un anachronisme : pour Riemann ces surfaces apparaissent comme une manière de traiter les *fonctions multiformes*. En partant d'une fonction holomorphe définie sur un ouvert du plan complexe, on cherche à la prolonger analytiquement. La première phrase de la citation qui suit énonce le principe du prolongement analytique et la deuxième explique comment on peut tomber ainsi sur un problème de multiformité. Ceci motive précisément l'introduction du terme de « *fonction multiforme* », qui n'est bien sûr pas une fonction au sens ensembliste moderne.

Une fonction de $x + yi$, qui est donnée en une portion du plan des (x, y) , ne peut être prolongée au-delà d'une manière continue que d'une seule façon. [...] Maintenant, d'après la nature de la fonction à prolonger, elle reprendra, ou non, toujours la même valeur pour une même valeur de z , quel que soit le chemin suivant lequel le prolongement a lieu.

Dans le premier cas, je la nommerai *uniforme* ; c'est alors pour toute valeur de z une fonction parfaitement déterminée et elle ne devient jamais discontinue le long d'une ligne. Dans le second cas, où l'on dira qu'elle est *multiforme*, on doit avant tout, pour saisir la marche de cette fonction, porter son attention sur certains points du plan des z , autour desquels la fonction se prolonge en une autre. Un tel point, par exemple, est le point a pour la fonction $\log(z - a)$.

Ces points autour desquels s'échangent par prolongement analytique les déterminations d'une fonction sont si importants pour la suite que Riemann leur donne un nom :

On nommera les divers prolongements d'une fonction pour une même portion du plan des z les *branches* de cette fonction, et un point autour duquel une branche se prolonge en une autre un *point de ramification* de la fonction. Partout où il ne se trouve aucune ramification, la fonction est dite *monodrome* ou *uniforme*.

Après ces mises au point sur les types de fonctions qu'il va considérer, il introduit les surfaces qui depuis portent son nom, en reprenant là aussi une construction faite dans sa thèse [Rie1851]. Ce qui est nouveau ce sont les images intuitives qu'il propose, du « *corps infiniment mince* » et de « *l'hélicoïde* » de « *pas de vis infiniment petit* » :

Concevons une surface étendue sur le plan des (x, y) et coïncidant avec lui (ou si l'on veut un corps infiniment mince étendu sur ce plan), qui s'étend autant et seulement autant que la fonction y est donnée. Lorsque la fonction sera prolongée, cette surface sera donc également étendue davantage. En une région du plan où se présentent deux ou plusieurs prolongements de la fonction, la surface sera double ou multiple. Elle se composera alors de deux ou de plusieurs feuillets dont chacun correspond à une branche de la fonction. Autour d'un point de ramification de la fonction, un feuillet de la surface se prolongera en un autre feuillet, et de telle sorte que, dans le voisinage de ce point, la surface pourra être regardée comme un hélicoïde dont l'axe est perpendiculaire au plan des (x, y) en ce point et dont le pas de vis est infiniment petit. Mais lorsque la fonction, après que z a décrit plusieurs tours autour de la valeur de ramification, reprend sa valeur initiale (comme, par exemple, $(z - a)^{\frac{m}{n}}$, m, n étant premiers entre eux, après n tours décrits

par z autour de a), on devra alors supposer que le feuillet supérieur de la surface se raccorde avec le feuillet inférieur en passant à travers le reste des feuillets.

Ces dernières lignes montrent bien que Riemann imagine la surface dans l'espace tridimensionnel de l'intuition commune. Ou bien utilise-t-il ce langage uniquement parce qu'il est commode pour se faire comprendre par ses lecteurs, et la comprend-il en tant que variété abstraite ? Par ailleurs, comme le mentionne [Cho2007, page 59], Hensel et Landsberg [HeLa1902, page 91] présentent une image proche de celle décrite par Riemann :

Concevons donc n plans numériques placés les uns au-dessus des autres à une distance infiniment petite [...] de sorte que leurs origines et leurs axes se superposent [...]

Le fait de décrire la surface dans un espace de dimension 3 oblige Riemann à parler de feuillets qui se traversent, ce qui a été historiquement une source de difficultés pour les apprentis de sa théorie. Le fait que ces intersections ne doivent pas en fait être considérées est impliqué par la propriété suivante d'une telle surface :

La fonction multiforme admet en chaque point d'une surface, qui en représente ainsi le mode de ramification, *une seule* valeur déterminée, et peut donc être regardée comme une fonction parfaitement déterminée du lieu (d'un point) sur cette surface.

On voit donc que la surface associée à une fonction multiforme est pensée comme un moyen de résoudre le problème de la multiformité.

Encadré II.1 : Surface de Riemann d'un germe de fonction

Nous expliquons ici comment se construit de nos jours la surface de Riemann associée à un germe de fonction holomorphe $f : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}$.

Soit $\mathcal{G} = \left\{ \text{germes de fonctions holomorphes } (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{C} \right\}$.

On va munir cet ensemble d'une topologie séparée.

Pour tout ouvert U de \mathbb{C} et toute fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, on définit

$$\mathcal{U}(U, f) = \left\{ \text{germes } f_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C} \mid x \in U \right\}$$

et on munit \mathcal{G} de la topologie engendrée par les $\mathcal{U}(U, f)$. En particulier, l'application

$$\pi: \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (f_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}) & \mapsto & x \end{array}$$

est continue et induit des homéomorphismes locaux en restriction aux ouverts $\mathcal{U}(U, f)$. Ceux-ci permettent de munir \mathcal{G} d'une structure de surface de Riemann (à ceci près qu'elle n'est pas à base dénombrable d'ouverts).

Cette topologie est séparée. En effet, deux germes basés en deux points différents sont déjà séparés par la fonction continue π . Prenons maintenant $f_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}$ et $g_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}$ deux germes basés en x . Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} contenant x tel que f_x et g_x soient les germes de $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$. Si on a un germe $h_y : (\mathbb{C}, y) \rightarrow \mathbb{C}$ dans l'intersection $\mathcal{U}(U, f) \cap \mathcal{U}(U, g)$, les fonctions f et g coïncident sur un ouvert de définition de h donc sont égales, ce qui implique $f_x = g_x$. Ainsi, si $f_x \neq g_x$, les ouverts $\mathcal{U}(U, f)$ et $\mathcal{U}(U, g)$ sont disjoints, et séparent donc les deux germes.

Soit maintenant $f_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}$ un germe de fonction holomorphe. On appelle *surface de Riemann de f_x* la composante connexe $\mathcal{S}(f_x)$ de \mathcal{G} contenant f_x . Les germes $g_y : (\mathbb{C}, y) \rightarrow \mathbb{C}$ dans $\mathcal{S}(f)$ sont obtenus par prolongement analytique de $(f_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C})$ le long d'un chemin joignant x à y . En particulier, si $f_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}$ est le germe d'une détermination au voisinage de x d'une fonction multiforme f , la surface $\mathcal{S}(f_x)$ contiendra un point « au-dessus » de x (c'est-à-dire dans $\pi^{-1}\{x\}$) pour chaque détermination de f en x . La surface $\mathcal{S}(f_x)$ vient donc avec une application holomorphe (uniforme) $\hat{f} : \mathcal{S}(f) \rightarrow \mathbb{C}$ qui « détermine » f .

Le théorème de Poincaré-Volterra assure que cette surface $\mathcal{S}(f)$ est à base dénombrable d'ouverts (voir l'encadré XI.1).

On peut imiter la construction de $\mathcal{S}(f)$ en étudiant d'autres classes de régularités de germes. Par exemple, on pourrait construire de la même façon le prolongement méromorphe maximal. Plus généralement, ce processus fut étendu à un faisceau sur un espace topologique, fournissant ce que l'on appela vers 1950 *l'espace étalé* associé au faisceau.

Surface de Riemann associée à une fonction algébrique. — On considère dans ce paragraphe la surface de Riemann associée à une fonction algébrique $s(z)$. Le graphe de s , dans $\overline{\mathbb{C}}_z \times \overline{\mathbb{C}}_s$, est défini par une équation polynomiale irréductible $F(z, s) = 0$. Une telle équation définit une *courbe algébrique* irréductible dans $\overline{\mathbb{C}}_z \times \overline{\mathbb{C}}_s$. Riemann n'utilise jamais ce langage géométrique dans son article, même s'il est conscient de cette interprétation, comme l'explique Klein dans [Kle1928] :

Dès le début Riemann reconnut la signification de sa théorie pour la géométrie algébrique. Mais dans ses cours il ne considéra de manière approfondie que les quartiques. Cela ne fut connu que beaucoup plus tard, par des notes de cours. Une activité dirigée beaucoup plus vers l'extérieur était nécessaire afin d'introduire ses méthodes à un public plus large. Celui qui réalisa ceci fut Clebsch.

Riemann se propose de « *déterminer le mode de ramification de la fonction s ou de la surface T qui la représente* ». Dans un premier temps, T est la surface de Riemann de la partie régulière de la fonction, c'est-à-dire le prolongement analytique maximal de n'importe lequel de ses germes réguliers (holomorphes et uniformes). Ensuite, il montre qu'il existe une unique compactification lisse de T que l'on obtient comme suit. Il définit d'abord les points de ramification les plus simples possibles sur la surface T :

Un point de la surface T , où se rattachent ensemble seulement deux branches d'une fonction de telle sorte qu'autour de ce point la première branche se prolonge en la seconde et la seconde en la première, je le nommerai *un point de ramification simple*.

Nous reconnaissons là une ramification analogue à celle de la fonction multiforme \sqrt{z} à l'origine. Tout autre point de ramification est perçu comme limite de points de ramification simples :

Un point d'une surface autour duquel celle-ci tourne sur elle-même $(\mu + 1)$ fois, peut alors être regardé comme formant μ points de ramification simples coïncidents (ou infiniment voisins).

Riemann introduit alors des *paramètres locaux* (nous disons de nos jours aussi *uniformisantes locales*) au voisinage de tous ces points de la surface fermée T , en les choisissant comme fonctions explicites de z . Ainsi, au voisinage d'un point où la surface T n'est pas ramifiée et où $z = a$, il considère $z - a$, puis :

Pour un point où la surface T tourne sur elle-même μ fois, il en est ainsi, lorsque z est égal à une valeur finie a , de $(z - a)^{\frac{1}{\mu}}$ [...]; mais, lorsque $z = \infty$, c'est $(\frac{1}{z})^{\frac{1}{\mu}}$ qui devient infiniment petit du premier ordre.

Il explique ensuite comment se développent en série à l'aide d'un tel paramètre local « *les fonctions que nous aurons à traiter ici* », c'est-à-dire les fonctions méromorphes et leurs intégrales.

On voit que Riemann *désingularise* ici la courbe définie par l'équation $F(z, s) = 0$ en n'utilisant que la monodromie locale des déterminations de s autour de chaque point de ramification a : un ensemble de μ branches qui s'échangent autour de a sont simultanément données par une même fonction méromorphe de $(z - a)^{\frac{1}{\mu}}$. Chaque composante irréductible locale de la courbe se trouve donc paramétrée par un disque, à savoir l'image de $\{|z - a| < \varepsilon\}$ par $(z - a)^{\frac{1}{\mu}}$. On a bien sûr ajouté un point au dessus de a à T pour compactifier la composante irréductible locale. Riemann court-circuite de cette manière l'algorithme dit *de Newton-Puiseux* (qu'il ne cite pas, d'ailleurs). L'unicité de la compactification obtenue résulte immédiatement d'un autre théorème de Riemann, le théorème d'extension des fonctions holomorphes bornées sur un disque épointé.

Il résulte de tout ceci que les surfaces de Riemann associées à deux courbes algébriques birationnellement équivalentes (voir la sous-section II.3.1) sont isomorphes : après avoir ôté un nombre fini de points sur chacune d'elles, l'application birationnelle donnée définira un isomorphisme en restriction qui s'étendra automatiquement aux surfaces compactes.

Riemann ouvre ainsi le chemin menant à la notion moderne de surface de Riemann abstraite, dans laquelle tous les paramètres locaux, obtenus les uns des autres par biholomorphismes, sont équivalents.

Algébricité des surfaces de Riemann compactes. — Nous avons vu dans l'encadré II.1 que tout germe de fonction holomorphe f donne naturellement naissance à une surface de Riemann $\mathcal{S}(f)$. Lorsque la fonction est algébrique, cette surface se compactifie en une surface de Riemann compacte : son prolongement analytique méromorphe maximal. On s'intéresse ici à la réciproque de ce théorème : si le prolongement analytique méromorphe maximal de f est compact, alors f est algébrique.

En anticipant sur la théorie de Riemann-Roch, voir section II.2.4 corollaire II.2.13, remarquons que toute surface de Riemann (abstraite)

porte suffisamment de fonctions méromorphes pour séparer les points. Cela permet de montrer le théorème suivant.

Théorème II.1.2. — *Toute surface de Riemann T compacte est isomorphe à la surface de Riemann associée à une fonction algébrique.*

Démonstration. — Soit f_1 une fonction méromorphe non constante sur T . On voit f_1 comme un revêtement ramifié de degré d de $\overline{\mathbb{C}}$, et on considère l'une de ses fibres génériques $\{P_1, \dots, P_d\}$. Soit alors f_2 une fonction méromorphe qui sépare ces d points. L'image de S par (f_1, f_2) est une courbe C analytique de $\overline{\mathbb{C}}_z \times \overline{\mathbb{C}}_w$. Nous voulons montrer que cette courbe est algébrique.

Puisque la fonction non constante $f_1 : T \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_z$ définit un revêtement ramifié, la fibre $f_1^{-1}(z)$ au-dessus de z contient toujours le même nombre d d'éléments de T , sauf pour un nombre fini de points z_1, \dots, z_k de $\overline{\mathbb{C}}_z$. Soit donc $z \in \overline{\mathbb{C}}_z - \{z_1, \dots, z_k\}$. Posons $f_1^{-1}(z) = \{P_1(z), \dots, P_d(z)\}$. On prendra garde au fait que les $P_i(z)$ sont multiformes : l'ensemble $\{P_1(z), \dots, P_d(z)\}$ est bien défini mais il n'est pas possible d'ordonner ses éléments pour former d fonctions holomorphes globales sur $\overline{\mathbb{C}}_z - \{z_1, \dots, z_k\}$. Les ordonnées des d points où la droite $\{z\} \times \overline{\mathbb{C}}_w$ coupe C sont données par $w_i(z) = f_2(P_i(z))$ pour i variant de 1 à d . Là encore, on obtient ainsi d « fonctions » w_i multiformes sur $\overline{\mathbb{C}}_z - \{z_1, \dots, z_k\}$. Pour conclure, on fait usage des fonctions symétriques des $w_i(z)$:

$$\begin{aligned} S_1(z) &= w_1(z) + \dots + w_d(z), \\ S_2(z) &= w_1(z)w_2(z) + \dots + w_{d-1}(z)w_d(z), \\ &\vdots \\ S_d(z) &= w_1(z) \cdots w_d(z). \end{aligned}$$

Ces fonctions sont méromorphes sur $\overline{\mathbb{C}}_z$; ce sont donc des fractions rationnelles en la variable z . Le polynôme $F(z, w)$ obtenu à partir de $w^d - S_1(z)w^{d-1} + \dots + (-1)^d S_d(z)$ par multiplication par un polynôme convenable de z , pour chasser les dénominateurs, a pour lieu d'annulation la courbe C . La surface de Riemann T n'est autre que la surface de Riemann de n'importe quel germe $w(z)$ annulant le polynôme précédent : elles sont toutes les deux compactes et coïncident en dehors d'un nombre fini de points. □

Remarquons que nous avons montré que le corps $\mathbb{C}(f_1, f_2)$ est de degré d sur $\mathbb{C}(f_1)$. La même preuve montre que pour toute autre fonction méromorphe g , le corps $\mathbb{C}(f_1, g)$ est de degré au plus d . Ainsi, d'après le théorème de l'élément primitif, le corps engendré par f_1 , f_2 et g est le même que celui engendré par f_1 et f_2 . Finalement le corps des fonctions méromorphes sur T est $\mathbb{C}(f_1, f_2)$.

On déduit de ces considérations que si l'on choisit deux autres fonctions f'_1 et f'_2 comme dans la démonstration ci-dessus, alors la courbe C' construite est birationnellement équivalente à C : en effet f'_1 et f'_2 s'écrivent comme fonctions rationnelles de f_1 et f_2 . Cela a pour conséquence que deux surfaces de Riemann isomorphes donnent naissance à une unique courbe algébrique à transformation birationnelle près. C'est ce que Riemann explique dans les sections XI et XII de [Rie1857], point de départ de son étude du problème des modules.

Notons que le théorème II.1.2 peut être rendu plus précis :

Théorème II.1.3. — *Toute surface de Riemann compacte S admet une immersion dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, injective en dehors d'un nombre fini de points, et dont l'image est une courbe algébrique C qui ne présente comme singularités que des points doubles à tangentes distinctes.*

Pour se convaincre de ceci, on plonge tout d'abord la surface de Riemann dans un espace projectif $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Ce plongement est donné en coordonnées projectives par

$$z \mapsto (1 : f_1(z) : f_2(z) : \cdots : f_n(z))$$

où l'on aura rajouté aux deux fonctions f_1 et f_2 précédemment construites ce qu'il faut de fonctions f_i méromorphes sur S pour supprimer les accidents :

- lorsque chaque f_i prend la même valeur sur deux points donnés de S , on ajoute une fonction prenant des valeurs distinctes en ces deux points ;
- lorsqu'un point de S est critique pour tous les f_i , on ajoute une fonction régulière en ce point.

On peut construire ces fonctions à la main à partir de f_1 et f_2 (dans le corps engendré) ou encore mieux, avec l'aide du théorème de Riemann-Roch. Ceci étant fait, une projection linéaire générique $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ nous fournit l'immersion cherchée.

En fait, le théorème de Riemann-Roch permet de donner un représentant privilégié d'une surface de Riemann compacte comme courbe algébrique dans un espace projectif. En genre $p \geq 2$, la dimension de cet espace est $p - 1$ pour toutes les courbes non hyperelliptiques, cf. par exemple [GrHa1978].

II.1.3. Théorèmes de l'« Analysis Situs »

Un problème majeur – déjà évoqué – est maintenant de construire sur toute surface de Riemann des fonctions et des formes méromorphes. Ce sera l'objet principal de la section II.2.

Riemann base sa construction des fonctions et des formes méromorphes sur ce qu'il appelle *le principe de Dirichlet*, déjà présent dans sa thèse [Rie1851]. Pour cela, il a besoin d'intégrer une forme fermée $Xdx + Ydy$ (c'est-à-dire telle que $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$). L'intégration se fait le long de chemins tracés sur une surface recouvrant le plan des variables x, y . Il commence la section en annonçant qu'il aura besoin de théorèmes d'*Analysis Situs* (c'est-à-dire de topologie). Il s'agit d'un saut conceptuel majeur : envisager l'étude d'une fonction algébrique à l'aide de méthodes topologiques sur une surface associée au problème. Nous présentons ici ces idées.

Grâce à un cas particulier du théorème de Stokes, Riemann montre tout d'abord que :

[...] l'intégrale $\int (Xdx + Ydy)$, prise entre deux points fixes, le long de deux chemins différents, a la même valeur lorsque ces deux chemins réunis forment l'encadrement complet d'une partie de la surface T .

En termes modernes, l'intégrale d'une forme fermée sur un chemin ne dépend que de la classe d'homologie du chemin à extrémités fixes.

Riemann introduit ensuite une mesure de la connexité d'une surface, estimant son éloignement par rapport à la simple connexité. Cette définition est l'ancêtre des nombres de Betti à coefficients entiers. Riemann utilise implicitement des surfaces compactes connexes dont le bord n'est pas vide. Dans le cas contraire, il commence par enlever un disque de la surface considérée.

Une surface simplement connexe (homéomorphe à un disque) est par définition d'ordre de connexion 1. Lorsqu'une surface n'est pas simplement connexe, Riemann la découpe à l'aide de sections successives jusqu'à la rendre simplement connexe :

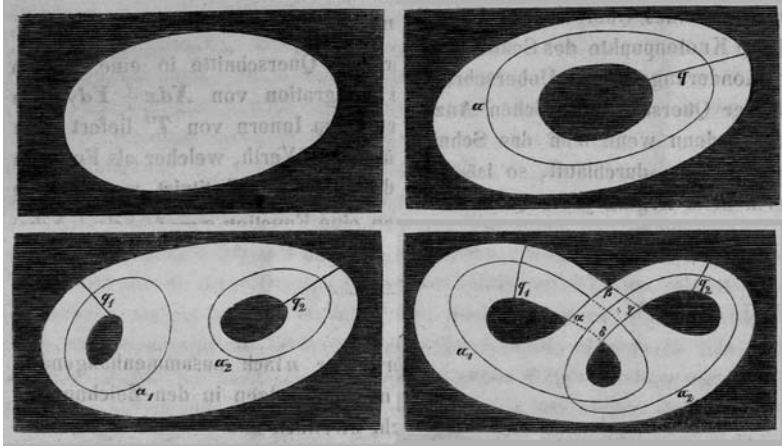


FIGURE II.1. Les « surfaces de Riemann » (pages 99 et 100 de [Rie1857])

Une surface multiplément connexe peut être transformée, par l'effet de coupures, en une surface simplement connexe. [...]

Quand sur une surface F l'on peut mener n courbes fermées a_1, a_2, \dots, a_n qui, soit qu'on les considère séparément, soit qu'on les considère réunies, ne forment pas un contour d'encadrement complet d'une partie de cette surface, mais qui, jointes à toute autre courbe fermée, forment alors le contour d'encadrement complet d'une partie de la surface, la surface sera dite $(n + 1)$ fois connexe.

Riemann donne quatre illustrations, pour faire mieux comprendre les notions de surface multiplément connexe et d'*ordre de connexion*. Ce sont les seules illustrations de l'article [Rie1857] !

Comment s'applique tout ceci à l'intégration d'une forme fermée de degré 1 ? Après la découpe le long de sections, le domaine de la surface qui en résulte est simplement connexe de sorte que la forme fermée est exacte dans ce domaine et y possède ainsi une primitive uniforme. Au passage de chaque section, cette primitive présente des sauts de discontinuités constants. Ces sauts sont appelés par Riemann les *modules de périodicité*. Aujourd'hui, on parle plutôt de *périodes*, qui sont les intégrales de la forme fermée sur des lacets, si bien que les modules de périodicité de Riemann et les périodes sont des concepts duaux. Ainsi, dans la figure II.2 le module de périodicité correspondant à une section transverse XX' est égal à la période prise le long du lacet dual l_X .

Encadré II.2 : La simple connexité

Notons l'évolution du vocabulaire : actuellement, une surface est *simplement connexe* si tout lacet sur la surface est homotope à un lacet constant. En revanche, la définition qu'utilise Riemann est différente :

Ceci donne lieu à une distinction des surfaces en simplement connexes, où chaque courbe fermée encadre complètement une partie de la surface [...] et en surfaces multiples connexes, où ce fait n'a pas lieu.

Un lecteur moderne remarque ici une définition homologique : une surface est simplement connexe si tout lacet borde une sous-surface. En dimension supérieure, cette définition (qui revient à $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$) est plus faible que celle évoquée plus haut (équivalente elle à $\pi_1(X) = 0$, alors que l'on sait que $H_1(X, \mathbb{Z})$ est toujours l'abélianisé de $\pi_1(X)$). Cependant, pour une surface, ces définitions sont équivalentes.

Une conséquence importante est l'annulation du premier groupe de cohomologie : toute 1-forme fermée sur une surface simplement connexe est exacte.

Pour finir cette parenthèse terminologique, remarquons qu'en 1905, Poincaré n'utilise pas encore l'expression « simplement connexe » au sens actuel. Pour lui, une variété compacte de dimension 3 est « simplement connexe » si elle est homéomorphe à une boule. La célèbre *conjecture de Poincaré* est alors assez étrange pour un lecteur moderne :

Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe ?

Voici ce qu'en dit Riemann :

Lorsque la surface T [...] est n fois connexe, on la décomposera en une surface T' simplement connexe en pratiquant n sections transverses. [...] on obtient une fonction de $x, y, z = \int (Xdx + Ydy)$ complètement déterminée pour tout point de T' et variant partout à l'intérieur de T' de manière continue, mais qui, à la traversée d'une section transverse, varie en général d'une

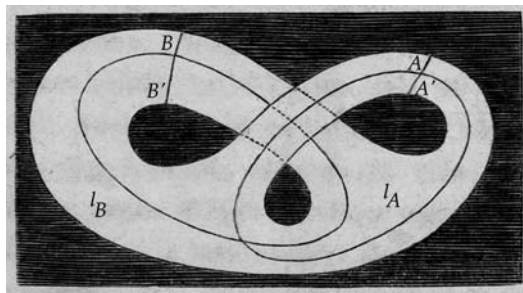


FIGURE II.2. Module/Périodes

grandeur finie constante le long de la ligne qui mène d'un nœud du réseau de sections à un autre nœud.

On se trouve ici face à une deuxième méthode (la première étant la considération de la surface de Riemann associée) pour passer d'une fonction multiforme à une fonction uniforme : choisir une détermination de la fonction sur un sous-domaine du domaine de définition. Les deux méthodes seront utilisées tout au long de l'article, la première principalement lorsqu'il s'agit d'une fonction algébrique, et la deuxième lorsqu'il s'agit d'une intégrale abélienne.

On peut s'interroger sur la raison qui a empêché Riemann d'appliquer la première méthode aux intégrales abéliennes. Dans ce cas il aurait dû décrire un revêtement ramifié de degré infini du plan complexe, ce qu'il aurait pu illustrer avec l'exemple de $\log(z - a)$, utilisé au paragraphe 2.1 pour expliquer le phénomène de multiformité. Mais lorsqu'il explique comment penser aux revêtements ramifiés, il illustre cela uniquement avec des revêtements de degré fini, associés aux expressions $(z - a)^{\frac{m}{n}}$. Ressent-il une sorte de crainte face aux revêtements infinis ?

Remarquons aussi que Riemann a considéré dans cette section des *différentielles* $Xdx + Ydy$ qui sont des objets réels, mais qu'il ne parle à aucun moment dans l'article d'objets complexes analogues (c'est-à-dire de formes holomorphes ou méromorphes). Par la suite, lorsqu'il parlera d'intégrales abéliennes, il s'agira en termes modernes de primitives (multiformes) de formes méromorphes sur la surface considérée.

Dans le cas particulier d'une *surface fermée*, c'est-à-dire compacte, connexe et sans bord, Riemann introduit l'invariant topologique fondamental qu'on appelle aujourd'hui le *genre*.

Concevons [...] que l'on ait décomposé cette surface en une surface simplement connexe T' . Comme la courbe d'encadrement d'une surface simplement connexe est formée par un contour unique, mais qu'une surface fermée prend, par l'effet d'un nombre impair de sections, un nombre pair de portions d'encadrement, et, par l'effet d'un nombre pair de sections un nombre impair de portions d'encadrement, pour effectuer cette décomposition de la surface, il sera donc nécessaire de pratiquer un nombre pair de sections. Soit $2p$ le nombre de ces sections transverses.

Encadré II.3 : Ordre de connexion, genre et caractéristique d'Euler

Soit S une surface (topologique) compacte, connexe et orientable. On dispose sur S de deux invariants topologiques entiers : la *caractéristique d'Euler* $\chi(S)$ et le *genre* $g(S) \geq 0$.

Lorsque le bord de S est vide ces deux invariants sont reliés par la formule

$$\chi(S) = 2 - 2g(S).$$

Le genre $g(S)$ admet les interprétations suivantes :

- c'est $\frac{1}{2} \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}} H_1(S)$;
- c'est le nombre maximal de courbes fermées simples deux à deux disjointes tracées sur S et indépendantes homologiquement.

Lorsque le bord de S est non vide, alors son genre $g(S)$ est par définition le genre au sens précédent de la surface S obtenue en recollant un disque le long de chaque composante connexe du bord ∂S de S . On a alors la formule

$$\chi(S) = 2 - 2g(S) - b(S),$$

où $b(S)$ désigne le nombre de composantes de ∂S .

Cette formule permet de montrer que, si $c(S)$ désigne l'ordre de connexion de S introduit par Riemann, alors

$$c(S) = 2 + 2g(S) - b(S).$$

La figure II.3 montre les $c(S) - 1$ étapes d'un découpage menant à un disque pour le quatrième exemple de Riemann, ce qui par la formule précédente montre que S est une surface de genre 1.

Ici Riemann utilise subrepticement le fait que les surfaces qu'il considère sont *orientables*. En effet, dans le cas d'une surface non orientable, si on fait une section suivant une courbe le long de laquelle l'orientation locale est renversée, on introduit une seule « *portion d'encadrement* ». Une telle courbe admet un voisinage qui est une bande de Möbius, que ce dernier n'allait décrire que quelques années plus tard, dans [Möb1886] (voir aussi Pont [Pont1974, page 108]). Dans l'article de Riemann n'apparaît à aucun moment l'opposition *orientable/non orientable* (ou *bilatère/unilatère*, comme on allait dire pendant un certain temps).

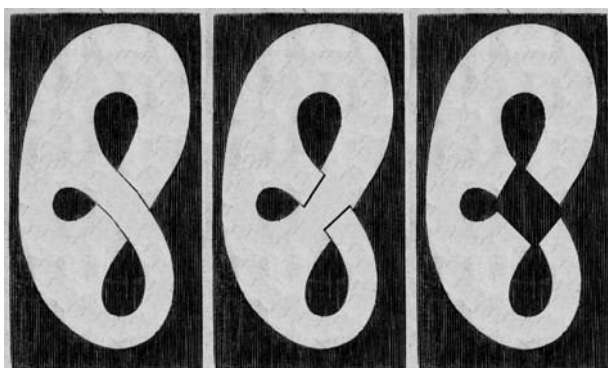


FIGURE II.3. «Découpages»

Remarquons l'utilisation de la lettre g , qui est encore largement utilisée de nos jours pour désigner diverses notions de genre en géométrie algébrique (genres arithmétiques et géométriques des courbes et des surfaces principalement). Par contre Riemann ne donne pas de nom à cette quantité ; il semble que c'est Clebsch qui introduit le terme de « genre » dans [Cle1865a].

Revenons à la surface T associée à une fonction algébrique $w(z)$ définie par une équation polynomiale irréductible $F(z, w) = 0$. Riemann se propose de calculer son genre g . À cette occasion, il prouve le cas particulier du théorème de Riemann-Hurwitz (voir l'encadré II.4) où la surface-but est la sphère de Riemann. Il en déduit que si la courbe algébrique irréductible de bidegré m, n dans $\overline{\mathbb{C}}_z \times \overline{\mathbb{C}}_w$ définie par $F(z, w) = 0$ a comme seules singularités r points doubles à tangentes distinctes, alors T est de genre $g = (n - 1)(m - 1) - r$.

De la même manière, une courbe de \mathbb{CP}^2 définie par un polynôme de degré n avec pour seules singularités r points doubles à tangentes distinctes, est de genre

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - r. \quad (\text{II.3})$$

Encadré II.4 : Le théorème de Riemann-Hurwitz

Soient S et S' deux surfaces de Riemann compactes et connexes et f une application holomorphe de S dans S' . Un point $s \in S$ où $df = 0$ est appelé *un point critique* de f . L'image d'un point critique par f est appelée *un point de ramification* de f .

À tout point $s \in S$ on associe un *indice de ramification* $v(s) \geq 1$, égal par définition au degré local de f au voisinage de s . Il existe alors des coordonnées locales z au voisinage de s et w au voisinage de $f(s)$ telles que f s'écrive $w = z^{v(s)}$. On voit ainsi que les points critiques sont précisément les points de S dont les indices de ramification valent au moins 2.

Si f n'a pas de points critiques (c'est alors un revêtement non ramifié), les genres g de S , g' de S' et le degré global d de f sont reliés simplement par la formule $2 - 2g = d(2 - 2g')$.

Le *théorème de Riemann-Hurwitz* généralise ceci au cas où il y a des points critiques (nécessairement en nombre fini, à cause de la compacité de S) :

$$2 - 2g = d(2 - 2g') - \sum_{s \in S} (v(s) - 1).$$

Une preuve simple part d'une triangulation de S' dont l'ensemble des sommets contient tous les points de ramification de f . On la relève en une triangulation de S , et on montre que la caractéristique d'Euler de cette dernière est égale au membre droit de la formule précédente. Par ailleurs elle est égale aussi au membre gauche.

II.2. Principe de Dirichlet et conséquences

II.2.1. Le problème de Dirichlet

Étant donné un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et une fonction $\underline{u} : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$, par exemple continue, le *problème de Dirichlet* est de trouver une fonction $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique sur U et prolongeant \underline{u} par continuité.

Commençons par une construction fondamentale : en tant que partie imaginaire de fonction holomorphe, la fonction $w \mapsto \text{Im } w$ est évidemment harmonique. Elle est identiquement nulle le long de l'axe réel. Le biholomorphisme $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} ; w \mapsto z = \frac{w-i}{w+i}$ du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\}$ sur le disque unité $\mathbb{D} = D(0, 1)$ permet de pousser cette fonction sur le disque. La fonction $z \mapsto \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ ainsi obtenue est automatiquement harmonique, et se prolonge à $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ par la fonction nulle. Cependant, la formule de la moyenne implique que pour tout rayon $0 < r < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D(0,r)} f = f(0) = 1.$$

Notre fonction f est donc harmonique sur le disque ouvert et semble se prolonger au bord par une « fonction » nulle sur le cercle privé de 1, tout en étant d'intégrale égale à 1. C'est une charge ponctuelle, ou *masse de Dirac* en 1.

Cette observation et la linéarité du problème de Dirichlet permettent de retrouver la formule de Poisson, qui résout ce problème sur le disque unité⁽²⁾. En effet, étant donnée une fonction $\underline{u} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, une extension harmonique u de \underline{u} à \mathbb{D} tout entier est :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2} \underline{u}(e^{i\theta}) d\theta. \quad (\text{II.4})$$

2. La formule de Poisson ne semble pas connue de Riemann et de ses successeurs immédiats. Schwarz donne cette formule comme nouvelle dans [Schw1870a]. Selon [Die1978], Green est le premier à avoir montré en 1828 qu'une fonction continue sur le bord d'une courbe quelconque s'étend en une fonction harmonique dans l'intérieur. Pour le cas d'une sphère, Poisson avait donné une formule explicite « en 1820 ». Prym, commentant en 1871 les travaux de Riemann constate pourtant que la seule méthode connue pour prolonger harmoniquement une fonction sur le cercle consiste à développer la fonction en série de Fourier, alors que la convergence de cette série n'est pas garantie si la fonction est continue [Pry1871].

Lorsque la fonction \underline{u} au bord n'est plus continue, mais seulement intégrable, l'extension u obtenue aura encore pour limites radiales

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta}) = \underline{u}(e^{i\theta})$$

pour presque tout angle θ (au sens de la mesure de Lebesgue).

Le but est maintenant de résoudre le problème de Dirichlet sur un ouvert U simplement connexe du plan, dont le bord ∂U est une courbe de Jordan lisse et pour une fonction $\underline{u} : \partial U \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

Commençons par remarquer qu'il existe au plus une solution. Si u_1 et u_2 sont deux solutions, la fonction $u_1 - u_2 : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée et harmonique sur U . Soit z_0 un point de \bar{U} tel que :

$$|u_1(z_0) - u_2(z_0)| = \max_{\bar{U}} |u_1 - u_2|.$$

Si $z_0 \in U$, $u_1 - u_2$ est constante par le principe du maximum, donc nulle puisque cette fonction s'annule sur le bord de U . Si z_0 est dans le bord de U , on a $u_1(z_0) = u_2(z_0)$, donc $u_1 = u_2$ sur U .

Dans les paragraphes XVI à XVIII de [Rie1898], Riemann explique comment résoudre le problème de Dirichlet par *minimisation* d'une fonctionnelle. On part d'une fonction lisse $\alpha : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\alpha = \underline{u}$ sur le bord de U . On peut lui ajouter une fonction λ nulle sur le bord de U et chercher à faire en sorte que $\alpha + \lambda$ soit harmonique. Pour cela, Riemann cherche λ comme la fonction qui minimise l'intégrale

$$\Omega(\alpha + \lambda) = \int_U \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 dx dy.$$

Se pose alors le problème de l'existence d'un minimum pour la fonctionnelle $\lambda \mapsto \Omega(\alpha + \lambda)$. Notons $L = \int_U \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 dx dy$. Citons le passage du texte dans lequel Riemann justifie l'existence d'un minimum pour la fonctionnelle Ω :

Ω , pour chaque fonction λ , prend une valeur finie qui tend vers l'infini avec L et varie d'une manière continue avec la forme de λ , mais a pour limite inférieure 0 ; par conséquent, pour une forme au moins de la fonction $\alpha + \lambda$, l'intégrale Ω atteint une valeur minima.

C'est l'existence d'une fonction réalisant le minimum que Riemann appelle « principe de Dirichlet ». Insistons ici sur le saut conceptuel qu'a pu représenter ce principe : une fonction est définie implicitement comme un point particulier dans un espace de dimension infinie.

Riemann démontre ensuite que pour une fonction λ_0 qui minimise l'intégrale $\Omega(\alpha + \lambda)$, la fonction $\alpha' = \alpha + \lambda_0$ est harmonique. Riemann pense donc avoir résolu le problème de Dirichlet.

L'argument de Riemann concernant l'existence du minimum n'est cependant pas rigoureux, et pas seulement aux yeux du lecteur du vingt-et-unième siècle : Weierstrass a déjà critiqué cet argument de Riemann dans [Weie1870]. Le lecteur pourra également consulter le tome II du *Traité d'analyse* [Pic1893d, page 38] dans lequel Picard reprend les critiques de Weierstrass, ainsi qu'un contre-exemple donné dans [Weie1870] de fonctionnelle qui n'atteint pas sa borne inférieure. Comme le dit Picard (page 39 de [Pic1893d]) :

On ne peut être certain *a priori* qu'il existe une fonction u satisfaisant aux conditions de continuité, pour laquelle l'intégrale atteigne effectivement sa limite inférieure. C'est là une objection capitale et M. Weierstrass a montré sur un exemple très simple le danger de ce mode de raisonnement.

Reprenons nous aussi le contre-exemple de Weierstrass. Il considère l'espace des fonctions $y(x)$ de classe C^1 sur l'intervalle $[-1, 1]$ dont les valeurs au bord sont prescrites égales à a et b (avec $a \neq b$). Il note alors

$$J(y) = \int_{-1}^1 x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que si l'on note

$$y_\varepsilon(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{2\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

alors $J(y_\varepsilon)$ tend vers 0 avec ε . La borne inférieure de J est donc 0, qui n'est atteint pour aucune fonction de notre espace puisque nous avons supposé $a \neq b$. Ceci est possible car l'espace $C^1([-1, 1])$ n'est pas complet. De même, l'espace de travail pour Riemann est l'ensemble des fonctions continues sur \bar{U} et lisses à l'intérieur, qui n'est pas complet.

La solution moderne pour contourner cet écueil, imaginée dans un célèbre article par Hilbert en 1900 [Hil1900a], est de travailler dans un espace de fonctions plus grand, mais complet, voir par exemple [Jos2002].

II.2.2. Le théorème de représentation conforme

Citons le théorème de représentation conforme tel qu'il est énoncé par Riemann :

Deux surfaces planes, simplement connexes données, peuvent toujours être rapportées l'une à l'autre, de telle sorte qu'à chaque point de l'une corresponde un point unique de l'autre dont la position varie d'une manière continue avec celle du premier, et de telle sorte que les plus petites parties correspondantes des surfaces soient semblables ; de plus, pour un point de l'intérieur et pour un point de l'encadrement de la surface, les points correspondants de l'autre surface peuvent être donnés quelconques ; mais alors la correspondance est déterminée par cela même pour tous les points.

L'énoncé moderne de ce théorème est plus général car il traite de la régularité du bord : rappelons qu'on appelle *courbe de Jordan* tout plongement continu du cercle dans le plan.

Théorème II.2.1. — *Soit U un ouvert simplement connexe du plan, différent du plan lui-même. Alors il existe une application biholomorphe de $f : U \rightarrow \mathbb{D}$.*

Si de plus le bord de U est une courbe de Jordan, alors f se prolonge en un homéomorphisme de l'adhérence de U sur le disque unité fermé.

Remarquons que Riemann suppose implicitement que le bord – qu'il appelle encadrement de la surface – est une courbe de Jordan car il définit l'image des points du bord. Dans cette partie nous allons prouver le théorème de représentation conforme en nous inspirant directement des idées de Riemann. Nous supposons toujours que le bord est une courbe de Jordan, et même une courbe de Jordan lisse.

Les méthodes utilisées quand le bord n'est pas une courbe de Jordan sont différentes, voir par exemple [Rud1987, chapitre 14].

Preuve de la première affirmation du théorème de représentation conforme (en supposant qu'on sait résoudre le problème de Dirichlet) :

Soit $U \subset \mathbb{C}$, simplement connexe. Commençons par une définition. Ici, z_0 est un point fixé de l'ouvert U .

Définition II.2.2. — Une *fonction de Green* pour U par rapport au point z_0 est une fonction $u : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

1. u est harmonique sur l'ouvert $U \setminus \{z_0\}$;

2. la fonction $z \in U \setminus \{z_0\} \mapsto u(z) + \log|z - z_0|$ s'étend en z_0 en une fonction harmonique ;
3. $u(z)$ tend vers 0 lorsque z tend vers le bord de U .

Remarquons qu'il existe au plus une telle fonction : la preuve est analogue à celle de l'unicité dans le problème de Dirichlet. Un raisonnement semblable assure qu'une fonction de Green u est strictement positive sur U . En effet, si u prenait une valeur négative ou nulle en un point z_1 de U , en utilisant le fait que $\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = +\infty$ et $\lim_{z \rightarrow \partial U} u(z) = 0$, on obtiendrait que u atteint son minimum sur $U \setminus \{z_0\}$; u serait donc constante, ce qui est absurde, puisqu'elle a un pôle logarithmique en z_0 .

Construisons maintenant une fonction de Green par rapport à un point $z_0 \in U$ en admettant que l'on sait résoudre le principe de Dirichlet.

Soit la fonction $\underline{v} : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\underline{v}(z) = \log|z - z_0|$. Puisque le problème de Dirichlet est résolu sur U , on dispose de son extension harmonique $v : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Posons $u_U(z, z_0) = v(z) - \log|z - z_0|$ pour z dans $U \setminus \{z_0\}$. Puisque v est continue sur \bar{U} , la fonction $u_U(\cdot, z_0)$ tend vers 0 au bord de U . Ainsi $u_U(\cdot, z_0)$ est la fonction de Green de U par rapport au point z_0 .

Exemple II.2.3. — Considérons le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et le point $z_0 = 0$. La fonction de Green correspondante est alors

$$u_{\mathbb{D}}(z, 0) = -\log|z|.$$

Soit v^* une fonction conjuguée de v . Considérons la fonction holomorphe sur U

$$\varphi(z) = (z - z_0)e^{-(v(z) + iv^*(z))}.$$

Remarquons que « formellement » on peut écrire

$$\varphi(z) = e^{-(u_U(z, z_0) + iu_U(z, z_0)^*)},$$

en convenant qu'une fonction conjuguée de $\log|z - z_0|$ est la fonction qui à z associe l'argument de $(z - z_0)$. Nous avons déjà observé que la fonction de Green est strictement positive, ce qui assure que φ est à valeurs dans le disque unité. La condition

$$u_U(z, z_0) \xrightarrow{z \rightarrow \partial U} 0$$

assure que φ est propre. Elle est donc surjective (son image est ouverte et fermée) et le cardinal (avec multiplicité) des fibres est constant. La fibre

au-dessus de 0 étant $\{z_0\}$ de cardinal 1, l'application φ est injective. Nous avons donc bien construit un biholomorphisme entre U et \mathbb{D} .

Remarque II.2.4. — La seconde partie du théorème a été démontrée par Carathéodory en 1916 (voir [Coh1967] par exemple). Il est intéressant de remarquer que, réciproquement, elle permet de résoudre le problème de Dirichlet dans le cas où le bord de U est une courbe de Jordan. Le théorème de représentation conforme de Riemann et le théorème de Carathéodory sont donc équivalents au fait de pouvoir résoudre le problème de Dirichlet sur U .

□

II.2.3. Intégrales abéliennes

Rappelons que notre objectif est de construire des fonctions méromorphes sur une surface. Riemann les cherche comme primitives de formes méromorphes.

Nous avons vu comment associer une surface de Riemann T à une fonction algébrique.

Un pareil système de fonctions algébriques à mêmes ramifications et d'intégrales de ces fonctions fera d'abord l'objet de notre étude.

Autrement dit, une fois construite la surface T , on étudie l'espace des fonctions méromorphes sur T (qui ont donc les mêmes ramifications que l'équation qui a permis de construire T) et leurs primitives.

Voici le titre choisi par Riemann pour présenter sa vision de la construction des fonctions :

Détermination d'une fonction d'une grandeur variable complexe par les conditions qu'elle remplit relativement au contour et aux discontinuités.

Les fonctions doivent être déterminées par leurs valeurs au bord et par leur comportement au voisinage des discontinuités. L'holomorphic de la fonction recherchée fait que toute autre donnée serait superflue. Et c'est à nouveau le « principe de Dirichlet » qui permet de construire des fonctions à partir d'un « système de conditions indépendantes entre elles ».

Voici le théorème sur lequel Riemann base toute sa théorie des fonctions d'une variable complexe, théorème déjà présent dans sa thèse [Rie1851] :

Lorsque sur une surface connexe T , décomposée par des sections transverses en une surface T' simplement connexe, l'on donne une fonction complexe $\alpha + \beta i$ de x, y , pour laquelle l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT \quad (\text{II.5})$$

étendue à toute la surface, possède une valeur finie, cette fonction peut toujours, et cela d'une manière unique, être transformée en une fonction de $x+y i$ par la soustraction d'une fonction $\mu + \nu i$ de x, y , qui satisfait aux conditions suivantes :

1. Sur le contour $\mu = 0$, ou du moins diffère de zéro seulement en des points isolés ; en un point, ν est donnée d'une manière arbitraire ;

2. Les variations de μ sur T , celles de ν sur T' ne sont discontinues qu'en des points isolés, et cela seulement de telle sorte que les intégrales

$$\int \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right] dT \text{ et } \int \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} \right)^2 \right] dT \quad (\text{II.6})$$

relatives à toute la surface, restent finies ; de plus les variations de ν le long d'une section transverse sont égales sur les deux bords.

En termes intrinsèques modernes, les pas de la preuve esquissée par Riemann sont expliqués par Ahlfors dans [Ahl1953]. Ils utilisent de l'analyse harmonique sur laquelle nous reviendrons dans la section III.1. Expliquons brièvement l'énoncé ci-dessus.

Pour faciliter l'explication du texte de Riemann, nous avons choisi de noter par la minuscule latine correspondante a, b, m, n les différentielles (fermées mais pas exactes) des fonctions discontinues α, β, μ, ν utilisées par Riemann.

Si T est une surface de Riemann (éventuellement à bord), son fibré tangent réel est muni d'un opérateur J de carré -1 : la multiplication par i . Si a est une forme différentielle réelle de degré 1 sur T , sa différentielle conjuguée est définie par $*a = -a \circ J$. On dit qu'une forme est *co-fermée* si sa conjuguée est fermée. Désignons aussi par $D[a] = \int_T a \wedge *a$ la norme (aussi appelée *énergie de Dirichlet*) de a . On voit alors que les trois intégrales de l'énoncé de Riemann sont $D[a + *b], D[m], D[n]$.

Étant donnée une forme différentielle réelle fermée a sur T ayant des périodes, des singularités (isolées) et des valeurs au bord fixées, on suppose qu'il existe une forme différentielle fermée b telle que l'énergie

$D[a + *b]$ est finie. On choisit alors une forme exacte m , dont la restriction au bord s'annule, et telle que sa distance en norme à $a + *b$ est minimale.

On rencontre ici des difficultés pour démontrer l'existence de cette forme m , analogues à celles que nous avons déjà rencontrées dans la section II.2.1 lors de la preuve par minimisation du principe de Dirichlet. Ici aussi, il faut pour contourner ces difficultés travailler dans de meilleurs espaces fonctionnels inaccessibles à Riemann.

L'existence de m est équivalente à l'existence d'une décomposition orthogonale $a + *b = m + *n$, avec m exacte et n fermée, de laquelle il s'ensuit que $a - m = *n - *b$ est à la fois fermée et co-fermée, donc harmonique.

S'ensuit le théorème d'existence : il existe une forme différentielle harmonique $a - m$ ayant des valeurs au bord, des périodes et des singularités fixées (celles de a). Si $u := a - m$ et $v := b - n$, alors $u + iv$ est une forme holomorphe dont les intégrales sont les « fonctions de $x + yi$ » sur T de l'énoncé de Riemann.

Riemann utilise ce théorème d'existence de formes harmoniques pour construire des formes méromorphes. Il part d'une surface de Riemann fermée T . Il se donne un nombre fini de points P_1, \dots, P_m sur T , et des parties principales de la forme :

$$(A_i z_i^{-1} + B_i z_i^{-2} + C_i z_i^{-3} + \dots) dz_i \tag{II.7}$$

(sommées finies) au voisinage de chacun des points P_i , en termes de paramètres locaux z_i . De plus, il fixe $2g$ coupures rendant la surface simplement connexe, et ne passant pas par les points P_i . Il établit alors le théorème d'existence qui s'écrit en langage moderne de la façon suivante :

Théorème II.2.5 (Existence de 1-formes méromorphes)

On suppose que la somme des résidus A_i est nulle. Alors, pour chaque système de $2g$ nombres réels, il existe une unique forme méromorphe sur T qui possède des pôles uniquement aux points P_i avec les parties principales données et dont les périodes évaluées sur les $2g$ coupures ont comme parties réelles les $2g$ nombres donnés.

L'importance de ce théorème sera reconnue bien avant qu'une preuve parfaitement rigoureuse soit disponible. Il influença les successeurs de Riemann, au premier rang desquels Hermann Schwarz et Felix Klein,

dont il sera question dans le prochain chapitre. On pourra consulter [Coh1967] pour une preuve moderne dans l'esprit de Riemann et nous en donnerons une autre dans la sous-section III.2.1, inspirée de [Spr1957].

Certaines des formes ainsi construites joueront un rôle particulier ; ce sont les formes dites de première, deuxième et troisième espèce. Une forme est dite de nos jours *de première espèce* si elle est holomorphe, elle est *de deuxième espèce* si elle est méromorphe ayant tous ses résidus nuls, et enfin elle est *de troisième espèce* si elle est méromorphe et n'admet que des pôles simples. Les formes de deuxième espèce les plus simples sont celles qui n'ont qu'un pôle P sur T : leurs primitives multiformes sont ce que Riemann appelle *intégrales de deuxième espèce*, notées t_P . Les formes de troisième espèce les plus simples sont celles qui n'ont que deux pôles simples P_1, P_2 : leurs primitives sont ce que Riemann appelle *intégrales de troisième espèce* ϖ_{P_1, P_2} . Ce vocabulaire lui a été inspiré par celui utilisé par Legendre dans sa classification des intégrales elliptiques.

Riemann montre d'abord à l'aide du théorème II.2.5 que l'espace vectoriel complexe des intégrales de première espèce est de dimension $g + 1$ (1 de plus que l'espace des formes holomorphes, à cause de la constante d'intégration). Ceci fournit une interprétation analytique du genre g , introduit d'abord topologiquement. Il montre aussi qu'une telle intégrale est uniquement déterminée, à l'addition d'une constante près, par les parties réelles des modules de périodicité par rapport à un système de sections transverses rendant la surface T simplement connexe.

De la même manière, une intégrale de troisième espèce est déterminée de manière unique à une constante près par la donnée de ses pôles, des résidus de sa différentielle en ces pôles et par les parties réelles de ses modules de périodicité par rapport à des sections transverses ne passant pas par les pôles.

Existence de 1-formes méromorphes sur les courbes algébriques. — Il a fallu attendre le début du vingtième siècle pour que soit rendu rigoureux le principe de Dirichlet et la « preuve » imaginée par Riemann de l'existence de 1-formes méromorphes à pôles prescrits sur les surfaces qui portent son nom. Il s'agit cependant ici de 1-formes méromorphes sur des surfaces de Riemann *abstraites*. En effet, à la suite des travaux d'Abel et Jacobi, les mathématiciens du dix-neuvième siècle savaient

construire explicitement des 1-formes méromorphes (ou plutôt leurs intégrales multiformes : les intégrales abéliennes) sur les surfaces de Riemann définies comme courbes algébriques; nous allons expliquer comment ils faisaient.

Partons d'une surface de Riemann T compacte. D'après le théorème II.1.3, T s'immerge dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ comme une courbe algébrique C dont tous les points singuliers sont doubles à tangentes distinctes. Pour un choix convenable de carte affine, la courbe C est transverse à la droite à l'infini et, au voisinage de chaque point double, la première projection $x : C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est une coordonnée sur chaque branche.

Commençons par construire des 1-formes holomorphes sur T . Notons E l'espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{C}[x, y]$ de degré au plus $d - 3$ et qui s'annulent en chaque point double de C . Soit $P \in E$. Notons ω_P le relevé à T de la différentielle abélienne

$$P(x, y) \frac{dx}{F'_y} \tag{II.8}$$

où $F'_y = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Proposition II.2.6. — 1. Pour tout polynôme P de E , la forme ω_P est holomorphe sur T .

2. L'application $P \mapsto \omega_P$ de E vers l'espace $\Omega^1(T)$ des 1-formes holomorphes sur T est linéaire et injective.

3. La dimension de E est supérieure ou égale à g , le genre de T .

Démonstration. — 1. L'expression (II.8) définit *a priori* une 1-forme holomorphe sur C privée :

- des points où la première projection $x : C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ne définit pas une coordonnée holomorphe locale, c'est-à-dire des points d'intersection de C avec la droite à l'infini, et des points de ramifications de $x : C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$;
- des points où F'_y s'annule, c'est-à-dire des points doubles de C et des points de ramifications de $x : C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$;
- des points où $P(x, y)$ devient infini, c'est-à-dire des points d'intersection de C avec la droite à l'infini.

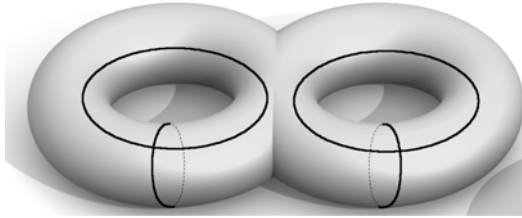


FIGURE II.4. Une base symplectique de l'homologie

En fait, la 1-forme définie par l'expression (II.8) se prolonge de manière holomorphe aux points de ramification de $x : C \rightarrow \mathbb{CP}^1$. En effet, en utilisant l'égalité $F'_x dx + F'_y dy = 0$, on voit que l'égalité (II.8) peut se réécrire

$$\omega = -\frac{P(x,y)}{F'_x} dy$$

(là où cela a un sens) ; cette expression définit une 1-forme holomorphe au voisinage de tout point de ramification de x . En chaque point double de C , le polynôme F'_y a un zéro d'ordre 1 et le polynôme $P(x,y)$ s'annule, le relevé de la 1-forme définie par l'expression (II.8) se prolonge donc en une forme holomorphe au-dessus des points doubles de T . Enfin, en se plaçant dans les variables $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$, on voit que la 1-forme définie par (II.8) se prolonge de manière holomorphe aux points d'intersection de C avec la droite à l'infini puisque le polynôme P est de degré inférieur ou égal à $d - 3$ (on utilise ici le fait que C est transverse à la droite à l'infini).

2. Le point 2 est immédiat.

3. Comptons les dimensions. Les polynômes en les variables x, y de degré au plus $d - 3$ forment un espace vectoriel de dimension $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Pour s'annuler en chacun des r points doubles de C , un polynôme doit vérifier r équations linéaires. La dimension de l'espace E est donc supérieure ou égale à

$$\frac{(d-2)(d-1)}{2} - r$$

qui est égal au genre de T d'après (II.3). □

Nous allons maintenant voir que la dimension de E est en fait égale à g . Comme Riemann, fixons maintenant $2g$ coupures rendant la surface T simplement connexe. Ces coupures correspondent à des lacets

sur T . En termes plus modernes considérons le produit d'intersection

$$H_1(T, \mathbb{Z}) \times H_1(T, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Ce produit est bilinéaire et antisymétrique, c'est même une forme symplectique. De plus $H_1(T, \mathbb{Z})$ possède des bases qui sont *symplectiques* relativement au produit d'intersection, c'est-à-dire des bases $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ telles que pour $i, j = 1, \dots, g$:

$$a_i \cdot a_j = 0, \quad b_i \cdot b_j = 0, \quad a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$$

(voir figure II.4). Il correspond à toute base symplectique un découpage de T en un polygone à $4g$ côtés. Riemann montre alors – à l'aide du théorème de Stokes – que pour toute base symplectique $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ de $H_1(T, \mathbb{Z})$ et pour deux 1-formes fermées η et η' sur T , on a

$$\int_T \eta \wedge \eta' = \sum_{i=1}^g \left(\int_{a_i} \eta \int_{b_i} \eta' - \int_{a_i} \eta' \int_{b_i} \eta \right). \quad (\text{II.9})$$

Il découle de (II.9) que l'application linéaire

$$\Psi : \begin{cases} \Omega^1(S) & \longrightarrow & \mathbb{C}^g \\ \omega & \longmapsto & \left(\int_{a_i} \omega \right)_{i=1 \dots g} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

est injective. Une 1-forme holomorphe ω non nulle vérifie en effet

$$i \int_T \omega \wedge \bar{\omega} > 0.$$

C'est la démonstration que donne Riemann dans le paragraphe XX de [Rie1857] ; c'est aussi la première moitié de la démonstration des *relations bilinéaires de Riemann*, voir [Bos1992] pour plus de détails. Plutôt que de considérer l'application Ψ on aurait pu considérer l'application linéaire

$$\Phi : \begin{cases} \Omega^1(T) & \longrightarrow & (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^g \\ \omega & \longmapsto & \left(\operatorname{Re} \left(\int_{a_i} \omega \right), \operatorname{Re} \left(\int_{b_i} \omega \right) \right)_{i=1 \dots g}. \end{cases}$$

De la même manière cette application est encore injective. On retrouve ainsi l'unicité dans le théorème II.2.5. Pour ce qui est des formes holomorphes, la partie existence – problématique chez Riemann – peut être remplacée par la proposition II.2.6. L'application linéaire Ψ est

alors un isomorphisme et on obtient le théorème II.2.5 pour les formes holomorphes.

Proposition II.2.7. — *Pour tout g -uplet $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_g)$ de nombres complexes, il existe une unique 1-forme holomorphe $\omega_{\mathbf{n}}$ sur S dont l'intégrale le long du lacet α_i est égale à n_i pour $i = 1, \dots, g$.*

Notons de plus que la 1-forme $\omega_{\mathbf{n}}$ dépend de manière linéaire (donc, en particulier, holomorphe) du g -uplet $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_g)$.

Dans la suite nous allons construire des formes *méromorphes*. Fixons donc $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ des lacets représentant les classes a_1, \dots, a_g et notons A leur réunion. Vérifions le théorème II.2.5 pour les formes de seconde et troisième espèce.

Intéressons-nous d'abord aux 1-formes méromorphes n'ayant que des pôles simples. Une telle forme peut toujours s'écrire comme combinaison linéaire de 1-formes méromorphes ayant chacune exactement deux pôles simples de résidus respectifs $+1$ et -1 . Par ailleurs, quitte à soustraire des 1-formes holomorphes, la proposition II.2.7 autorise à ne considérer que des 1-formes dont les intégrales le long des lacets $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ sont nulles. On est donc ramené à montrer le résultat suivant :

Proposition II.2.8. — *Étant donnés deux points distincts $p, q \in T \setminus A$, il existe une unique 1-forme méromorphe $\omega_{p,q}$ sur T , ayant des pôles simples en p et q de résidus respectifs $+1$ et -1 , n'ayant pas d'autre pôle, et dont l'intégrale le long de chacun des lacets $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ est nulle.*

Démonstration. — On considère l'espace vectoriel $\Omega_{p,q}$ des 1-formes méromorphes sur T ayant éventuellement des pôles simples en p et en q , et aucun autre pôle. On note $\Theta : \Omega_{p,q} \rightarrow \mathbb{C}^{g+1}$ l'application linéaire qui à un élément de $\Omega_{p,q}$ associe son intégrale le long de chacun des lacets $\alpha_1, \dots, \alpha_g$, et son résidu en p (le résidu en q est l'opposé du résidu en p). Montrer la proposition équivaut à montrer que Θ est bijective. On sait qu'elle est injective : en effet, deux éléments de son noyau diffèrent d'une 1-forme holomorphe dont l'intégrale le long de chacun des lacets $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ est nulle. Il suffit donc de prouver que la dimension de l'espace vectoriel $\Omega_{p,q}$ est au moins égale à $g + 1$.

La démonstration est similaire à celle de la proposition II.2.6. On construit les formes cherchées sur la courbe C . On peut supposer que les projetés de p et q dans C ne sont pas des points singuliers et

n'appartiennent pas à la droite à l'infini ; nous continuons à les noter p et q .

Soit D la droite de \mathbb{CP}^2 qui passe par p et q . On choisit une équation $(ax + by + c = 0)$ de D et on cherche des éléments de $\Omega_{p,q}$ qui s'écrivent

$$\omega = \frac{P(x,y)}{(ax + by + c)F'_y} dx, \tag{II.11}$$

où $P(x,y)$ est un polynôme. La droite D intersecte la courbe C en d points, comptés avec multiplicités ; pour simplifier on va supposer que ces points sont deux à deux distincts et ne sont pas situés sur la droite à l'infini. La formule (II.11) définit *a priori* une 1-forme holomorphe sur la courbe C privée des points de ramification de $x : C \rightarrow \mathbb{CP}^1$, des points d'intersection de C avec la droite à l'infini, des points doubles de C et des points d'intersection de C avec la droite D . Le même raisonnement que dans la preuve de la proposition II.2.6 montre que la formule (II.11) se relève en un élément de $\Omega_{p,q}$ si et seulement si :

- le polynôme P a un degré inférieur ou égal à $d - 2$;
- le polynôme P s'annule en chaque point double de C ;
- le polynôme P s'annule en chacun des $d - 2$ points d'intersection de C avec D distincts de p et de q .

Les polynômes en les variables x, y de degré au plus $d - 2$ forment un espace vectoriel de dimension $\frac{d(d-1)}{2}$. Pour s'annuler en chacun des r points doubles de C et en chacun des $d - 2$ points de $C \cap D$ distincts de p et q , un polynôme doit satisfaire $r + (d - 2)$ équations linéaires. La dimension de l'espace $\Omega_{p,q}$ est donc supérieure ou égale à

$$\frac{d(d-1)}{2} - r - (d-2) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - r + 1$$

qui est égal à $g + 1$ d'après (II.3).

Un décompte de dimensions similaire (mais plus fastidieux à expliciter) donne le même résultat dans le cas où D a des points d'intersection multiples avec C . □

La 1-forme $\omega_{p,q}$ donnée par la proposition II.2.8 « dépend de manière holomorphe des points p, q ». Pour donner un sens précis à cette affirmation, choisissons un ouvert $U \subset T$ sur lequel la coordonnée x est injective. Sur l'ouvert U la forme $\omega_{p,q}$ peut s'écrire :

$$\omega_{p,q}(r) = \left(\frac{1}{x_r - x_p} - \frac{1}{x_r - x_q} + G_{p,q}^x(r) \right) dx_r,$$

où x_p, x_q, x_r désignent les valeurs de la coordonnée x aux points p, q, r . Quel que soit le couple de points distincts $(p, q) \in (U \setminus A)^2$, la fonction $r \mapsto G_{p,q}^x(r)$ est alors holomorphe sur U . En fait :

Proposition II.2.9. — *La fonction $(p, q, r) \mapsto G_{p,q}(r)$ est holomorphe en ses trois variables sur $\{(p, q, r) \in (U \setminus A) \times (U \setminus A) \times U \text{ tels que } p \neq q\}$. De plus, elle se prolonge de manière holomorphe sur la diagonale $p = q$.*

Démonstration. — Reprenons la construction de la 1-forme $\omega_{p,q}$ dans la preuve de la proposition II.2.8. La 1-forme $\omega_{p,q}$ s'écrit dans la coordonnée x

$$\omega_{p,q} = \frac{P_{p,q}(x, y)}{(ax + by + c)F'_y} dx,$$

où $(ax + by + c = 0)$ est une équation de la droite passant par les points p, q et $P_{p,q}(x, y)$ est un polynôme de degré au plus $d - 2$. Ce polynôme satisfait un système d'équations affines : $d(d - 3)/2 - (g - 1) + (d - 2)$ équations linéaires pour que $\omega_{p,q}$ appartienne à l'espace $\Omega_{p,q}$, puis g équations linéaires pour que l'intégrale de $\omega_{p,q}$ le long de chacun des lacets $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ soit nulle, et enfin une condition affine pour que le résidu de $\omega_{p,q}$ en p soit égal à 1. Les coefficients de ces équations affines dépendent de manière holomorphe de p et q . L'unicité du polynôme $P_{p,q}$ montre que le système qu'elles forment est de rang maximal. Par conséquent, le polynôme $P_{p,q}$ dépend de manière holomorphe des points p et q . La première affirmation de l'énoncé en découle immédiatement.

Montrons maintenant que la fonction $(p, q, r) \mapsto G_{p,q}(r)$ se prolonge de manière holomorphe sur la diagonale $p = q$. Pour $p, q, t \in U \setminus A$ deux à deux distincts, l'unicité dans la proposition II.2.8 implique que l'on a

$$\omega_{p,q} = \omega_{p,t} + \omega_{t,q} \quad \text{et} \quad G_{p,q}(r) = G_{p,t}(r) + G_{t,q}(r).$$

La quantité $G_{p,t}(r) + G_{t,q}(r)$ se prolonge de manière holomorphe lorsque les points p et q se confondent en un même point (pourvu que t soit différent de ce point) ; il en est donc de même de $G_{p,q}(r)$. \square

Le même genre d'arguments que ci-dessus permet de construire des 1-formes méromorphes avec des pôles d'ordres supérieurs ou égaux à 2. Sans chercher à être exhaustif, donnons un résultat typique :

Proposition II.2.10. — *Étant donné un point $p \in T \setminus A$, il existe une unique 1-forme méromorphe sur T ayant un pôle d'ordre 2 en p de partie*

principale $\frac{1}{(x-x_p)^2}$, n'ayant aucun autre pôle, et dont l'intégrale le long de chacun des lacets $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ est nulle.

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve de la proposition II.2.8, à ceci près que la droite D est maintenant la tangente à la courbe C au point p . \square

Remarque II.2.11. — Dans les énoncés des propositions II.2.7, II.2.8 et II.2.10, on peut – comme dans l'énoncé du théorème II.2.5 – remplacer la condition « dont l'intégrale le long de chacun des lacets $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ est nulle » par la condition « dont l'intégrale le long de chacun des lacets $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ est imaginaire pure ». Il suffit pour cela de considérer l'application Φ définie plus haut en lieu et place de l'application Ψ .

II.2.4. Théorème de Riemann-Roch

Dans la section V de son mémoire, Riemann commence l'étude de l'espace des fonctions méromorphes sur une surface compacte donnée T . Il se propose de déterminer ces fonctions par leurs pôles : c'est le problème dit *de Riemann-Roch* (d'après Gray [Gra1998], ce nom fut introduit par Brill et Noether dans [BrNo1874]).

Riemann considère d'abord un ensemble donné $\{P_1, \dots, P_m\}$ de points, candidats à être des pôles *simples*, le cas des pôles d'ordre plus grand devant être obtenu ensuite par passage à la limite, en faisant coïncider plusieurs pôles simples. Cette procédure revient à plusieurs reprises chez Riemann, et n'est pas toujours facile à faire fonctionner formellement, même si elle est intuitivement claire.

L'ensemble des fonctions méromorphes ayant éventuellement des pôles simples aux points P_1, \dots, P_m est évidemment un *espace vectoriel* complexe. Riemann obtient d'emblée qu'il est de dimension finie, ainsi qu'un encadrement pour sa dimension, en regardant chacune des fonctions méromorphes de ce type comme cas particulier de fonctions *multiformes* de type spécial (dans la citation qui suit, nous nous sommes permis de changer quelques notations) :

L'expression générale d'une fonction s , qui devient infiniment grande du premier ordre en m points P_1, P_2, \dots, P_m de la surface T est, d'après ce qui précède,

$$s = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \dots + \beta_m t_m + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_g w_g + \text{cste},$$

où t_i est une fonction quelconque t_{P_i} et où les grandeurs α et β sont des constantes.

Si nous voulons éviter l'emploi des fonctions multiformes sur T , nous pouvons raisonner en termes des différentielles des fonctions précédentes : si f est l'une des fonctions recherchées, alors sa différentielle df est combinaison linéaire de différentielles de deuxième espèce associées à chaque point P_i (les dt_i) et de différentielles de première espèce (les dw_j).

L'existence de ces formes et le fait que celles de première espèce forment un espace de dimension *exactement* g sont des cas particuliers du théorème II.2.5. En prenant des primitives (multiformes), il ne faut pas oublier de compter $+1$, à cause de la constante d'intégration.

Ensuite, on veut reconnaître les différentielles sans périodes, c'est-à-dire celles qui s'intègrent en des formes méromorphes, qui forment justement l'espace recherché. En considérant une base du premier groupe d'homologie, on obtient $2g$ conditions d'annulation de périodes, que l'on interprète comme $2g$ conditions linéaires sur l'espace des formes considérées. Elles font donc chuter sa dimension *d'au plus* $2g$.

Cela donne :

Théorème II.2.12 (Inégalité de Riemann). — *Soit T une surface de Riemann compacte de genre g . L'espace vectoriel complexe des fonctions méromorphes ayant au plus des pôles simples aux points P_1, \dots, P_m est de dimension au moins $m - g + 1$.*

Un corollaire immédiat, que l'on obtient en variant les ensembles de pôles imposés, est le suivant :

Corollaire II.2.13 (Riemann). — *Une surface de Riemann compacte possède une infinité de fonctions méromorphes linéairement indépendantes sur \mathbb{C} .*

Par la suite, ce fut Gustav Roch, un étudiant de Riemann, hélas décédé bien jeune, la même année que son maître, qui réussit dans [Roc1865] à interpréter la différence entre la dimension recherchée et l'expression $m - g + 1$.

Voici un énoncé dans lequel on permet aussi la recherche de pôles multiples :

Théorème II.2.14 (Riemann-Roch). — Soit T une surface de Riemann compacte de genre g . Soient P_1, \dots, P_m des points sur la surface affectés de multiplicités n_1, \dots, n_m dans \mathbb{N}^* et soit $m = \sum n_i$ la somme de ces multiplicités. Alors la différence entre la dimension de l'espace vectoriel des fonctions méromorphes ayant un pôle d'ordre au plus n_i au point P_i et $(m - g + 1)$ est égale à la dimension de l'espace vectoriel des formes holomorphes ayant un zéro d'ordre au moins n_i au point P_i .

Application à l'uniformisation des courbes en genre 0 et 1. — Il est difficile de surestimer l'importance du théorème de Riemann-Roch dans l'approche moderne de la théorie des courbes algébriques. En particulier, c'est ce théorème que l'on utilise régulièrement pour démontrer que toute surface de Riemann compacte simplement connexe est isomorphe à la sphère de Riemann.

Théorème II.2.15. — Une surface de Riemann compacte de genre nul est biholomorphe à la sphère de Riemann.

Démonstration. — Une application directe du théorème de Riemann-Roch donne en effet l'existence sur une telle surface S d'une fonction méromorphe n'ayant qu'un pôle simple, c'est-à-dire d'une application holomorphe : $S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ de degré 1. Puisque S est de genre nul, le théorème de Riemann-Hurwitz entraîne que cette application ne présente pas de point de ramification, et est donc un isomorphisme. \square

Malgré la simplicité de cette preuve, elle est très probablement passée inaperçue de Riemann et de Roch, dont les intérêts n'étaient pas, il faut le reconnaître, centrés sur le cas du genre nul. Nous présenterons au chapitre suivant une preuve analytique due à Schwarz de ce fait, puis plus loin dans cette section une preuve de Clebsch utilisant de la géométrie birationnelle.

De manière semblable, le théorème de Riemann-Roch permet d'uniformiser les courbes de genre 1.

Théorème II.2.16. — Une surface de Riemann compacte de genre 1 est biholomorphe au quotient de \mathbb{C} par un réseau de translations.

Démonstration. — Le théorème de Riemann-Roch appliqué au cas où $m = 0$, $g = 1$ fournit, sur une surface S de genre 1, l'existence d'une forme holomorphe ω qui ne s'annule pas. Construisons alors son champ dual, c'est-à-dire le champ de vecteurs holomorphe non singulier X tel que

$\omega(X) = 1$. L'intégration de ce champ fournit une action de \mathbb{C} sur la surface S . Puisque X est non singulier, toutes les courbes (complexes) intégrales de X , c'est-à-dire les orbites de notre action sont ouvertes. Comme le complémentaire d'une orbite est une réunion d'orbites, ces dernières sont aussi fermées et, par connexité de S , l'action de \mathbb{C} est transitive, ce qui identifie S à \mathbb{C}/Λ , où Λ est le stabilisateur d'un point, un sous-groupe fermé de \mathbb{C} . Puisque S est compacte et de même dimension que \mathbb{C} , Λ est nécessairement un réseau de \mathbb{C} . \square

Il semble que cette fois encore, Riemann n'ait pas explicitement écrit ce résultat, même s'il l'avait très probablement en tête.

Encadré II.5 : Théorème de Riemann-Roch et dualité de Serre

Un mot sur la manière de présenter le théorème de Riemann-Roch à l'heure actuelle. On interprète un système de multiplicités n_i attachées à des points P_i comme un *diviseur* $D := \sum n_i P_i$. La somme $\sum n_i$ est par définition *le degré* $\deg(D)$ de D .

Les (germes de) fonctions ayant au plus un pôle d'ordre n_i au point P_i forment un *faisceau*, noté $\mathcal{O}(D)$. Les deux groupes de cohomologie $H^0(\mathcal{O}(D))$ et $H^1(\mathcal{O}(D))$ de ce faisceau sont naturellement des espaces vectoriels complexes *de dimensions finies*, notées $h^0(\mathcal{O}(D))$ et $h^1(\mathcal{O}(D))$ respectivement. La dimension $h^0(\mathcal{O}(D))$ est aussi souvent notée $l(D)$ dans la littérature.

Le premier espace $H^0(\mathcal{O}(D))$ s'interprète comme l'espace recherché des fonctions méromorphes à pôles d'ordre *au plus* D et *définies globalement* sur T . Le deuxième ne s'interprète globalement que *via le théorème de dualité de Serre*. Ce dernier affirme que l'on a *canoniquement*

$$H^1(\mathcal{O}(D)) \simeq (H^0(\Omega(-D)))^*,$$

où $\Omega(-D)$ est le faisceau des formes holomorphes s'annulant au moins à l'ordre D . Si K est le diviseur d'une forme différentielle holomorphe (ou méromorphe) globale, alors le faisceau $\Omega(-D)$ s'identifie au faisceau $\mathcal{O}(K - D)$, ce qui permet de d'énoncer la version suivante du théorème de Riemann-Roch (sur les courbes) :

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) - g + 1.$$

La *caractéristique d'Euler* $\chi(\mathcal{O}(D))$ du faisceau $\mathcal{O}(D)$ est par définition la différence $h^0(\mathcal{O}(D)) - h^1(\mathcal{O}(D))$.

Le théorème de Riemann-Roch s'écrit dans ce langage

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \deg(D) - g + 1.$$

Ainsi, *via* la dualité de Serre, on retrouve la version II.2.14 du théorème. Vu de cette manière, on n'a qu'une réécriture tautologique. La force de cette réécriture provient du fait qu'ainsi on obtient des énoncés qui s'étendent en toutes dimensions, comme l'ont montré Kodaira, Hirzebruch, Serre, Grothendieck dans les années 1950 : la caractéristique d'Euler $\chi(\mathcal{F})$ du faisceau \mathcal{F} des sections d'un fibré algébrique sur une variété algébrique compacte ou d'un fibré holomorphe sur une variété analytique compacte s'exprime uniquement en termes d'invariants topologiques du fibré considéré et du fibré tangent de la variété ; et les espaces vectoriels $H^i(\mathcal{F})$ intervenant dans la définition de $\chi(\mathcal{F})$ sont naturellement isomorphes à $(H^{n-i}(\Omega(\mathcal{F}^*)))^*$, où n est la dimension de la variété.

Nous nous proposons maintenant de montrer ces deux résultats en suivant une idée de Clebsch [Cle1865a, Cle1865b]. La méthode a l'avantage d'être complètement algébrique dans le sens où elle n'utilise pas d'analyse (à travers la preuve de Riemann-Roch via le principe de Dirichlet). En retour, elle a bien sûr l'inconvénient de ne traiter que de surfaces de Riemann qui sont supposées *a priori* algébriques.

D'après le théorème II.1.3 la surface S admet une immersion dans $\mathbb{C}P^2$ dont l'image est une courbe algébrique C qui ne présente comme singularités que des points doubles à tangentes distinctes.

Soit n le degré de C . Rappelons alors – voir (II.3) – que le genre de S est égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - k$, où k est le nombre de points doubles.

Courbes de genre nul. — Supposons donc que le genre de S est égal à zéro. La courbe C a alors $N = (n-1)(n-2)/2$ points doubles x_1, x_2, \dots, x_N . Fixons par ailleurs $n-3$ autres points y_1, \dots, y_{n-3} dans C . Rappelons que l'espace projectif des courbes d'un degré donné d est de dimension $d(d+3)/2$ si bien que l'espace projectif E des courbes de degré $n-2$ qui passent par les N points x_i et par les $n-3$ points y_i est de dimension au

moins

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} - N - (n-3) = 1.$$

Considérons z_1 et z_2 deux points distincts dans C . Par chacun de ces points il passe une courbe de E . Quitte à remplacer E par la droite joignant ces deux points on peut supposer que E est de dimension 1.

Par le théorème de Bézout, chaque courbe de degré $n-2$ rencontre C en $n(n-2)$ points comptés avec multiplicités. Les courbes de E rencontrent donc C , outre les x_i et les y_i , en

$$n(n-2) - 2N - (n-3) = 1$$

points. Nous avons donc une application rationnelle de E vers C . Elle est non constante car z_1 et z_2 appartiennent à son image. Elle est même birationnelle car la préimage d'un point est un sous-espace projectif strict, donc réduit à un point.

Courbes de genre 1. — Supposons maintenant que le genre de S soit égal à 1. La courbe C a alors $N = (n-1)(n-2)/2 - 1$ points doubles x_1, x_2, \dots, x_N . Fixons par ailleurs $n-3$ autres points y_1, \dots, y_{n-3} dans C . L'espace E des courbes de degré $n-2$ qui passent par les N points x_i et par les y_i est de dimension projective au moins :

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} - N - (n-3) = 2.$$

Comme précédemment, si E se trouve être de dimension supérieure à 2, on le remplace par un sous-espace de dimension 2 générique. Par le théorème de Bézout, les courbes de E rencontrent C , outre les x_i et les y_i en

$$n(n-2) - 2N - (n-3) = 3$$

points.

Pour chaque point générique x de C , il existe une seule courbe de E qui passe par les x_i , les y_i et qui est tangente à C en x . Cela envoie rationnellement la courbe C dans le plan projectif E . Nous allons voir que son image est une cubique. Pour s'en assurer il faut prendre un pinceau de courbes déterminé par deux éléments de E et compter le nombre de courbes de ce pinceau qui sont tangentes à C . L'équation est bien sûr du troisième degré : il s'agit d'écrire que le discriminant d'un polynôme du troisième degré s'annule. La cubique obtenue est non singulière car nous savons qu'une cubique singulière est de genre nul. Nous avons donc bien établi une équivalence birationnelle entre la courbe C

et une cubique lisse, qui peut à son tour être mise projectivement sous forme normale de Weierstrass.

II.3. Variété jacobienne et espaces de modules

Après avoir étudié les surfaces individuellement, Riemann cherche à les comprendre dans leur ensemble. C'est la naissance de l'« espace » des modules. Malgré les difficultés à bien définir cet espace, cela ouvre la voie à une approche topologique du théorème d'uniformisation : la méthode de continuité, qui fera l'objet de la deuxième partie de ce livre.

II.3.1. Les espaces de modules des surfaces de Riemann

L'équivalence birationnelle. — Au début de son étude, Riemann pense la surface T associée à une fonction algébrique $s(z)$ comme recouvrant de manière ramifiée la sphère $\overline{\mathbb{C}}_z$ associée au plan de la variable complexe z ⁽³⁾. Mais il envisage ensuite de changer la variable z permettant de se représenter T :

Une fonction z_1 de z , ramifiée comme T , qui devient infinie du premier ordre pour n_1 points de cette surface [...], prend chaque valeur pour n_1 points de la surface T . Par conséquent, lorsque l'on s'imagine chaque point de T représenté par un point d'un plan représentant géométriquement la valeur de z_1 en ce point, la totalité de ces points forme une surface T_1 recouvrant partout n_1 fois le plan des z_1 , surface qui est, comme l'on sait, une représentation, semblable en ses plus petites parties, de la surface T . À chaque point d'une de ces surfaces correspond alors un point *unique* de l'autre.

Plus tard on allait apprendre à dire que T et T_1 sont *isomorphes* en tant que surfaces de Riemann, et en particulier homéomorphes. Mais pour arriver à ce langage, il allait falloir reconnaître que divers types d'objets mathématiques ont des structures internes, qui définissent leur *forme*, et ce travail de Riemann contribuera beaucoup à cette prise de conscience.

Après avoir représenté T d'une nouvelle manière à l'aide d'une fonction méromorphe z_1 , on peut regarder la représentation que l'on obtient lorsque l'on rajoute une deuxième fonction méromorphe :

3. Plus précisément au-dessus du plan. L'usage de la sphère de Riemann sera explicite chez Neumann [Neum1865].

Si l'on désigne par s_1 une autre fonction quelconque de z , ramifiée comme l'est T [...], alors (§ V) entre s_1 et z_1 a lieu une équation de la forme $F_1(s_1, z_1) = 0$, où F_1 est une puissance d'une fonction entière irréductible de s_1, z_1 , et l'on peut, lorsque cette puissance a pour exposant l'unité, exprimer rationnellement en s_1 et z_1 toutes les fonctions de z_1 ramifiées comme l'est T_1 , et, par suite, toutes les fonctions rationnelles de s et z (§VIII). L'équation $F(s, z) = 0$ peut donc, à l'aide d'une transformation rationnelle, être transformée en $F_1(s_1, z_1) = 0$ et *vice versa*.

La relation d'équivalence qu'il introduit à partir de ces considérations est le point de départ de la *géométrie birationnelle* (voir Klein [Kle1928, chapitre VII]) :

On considère maintenant, comme faisant partie d'une même classe, toutes les équations algébriques irréductibles entre deux grandeurs variables, qui peuvent être transformées les unes dans les autres par des substitutions rationnelles [...].

Le choix d'une équation $F(s, z) = 0$ dans une telle classe, et de l'une des deux variables s que l'on exprimera comme fonction algébrique de l'autre z à l'aide de l'équation, permet de définir « *un système de fonctions algébriques à mêmes ramifications* », c'est-à-dire, en termes modernes, *une extension finie du corps $\mathbb{C}(z)$* . Il s'agit ici du corps des fonctions rationnelles sur la courbe définie par l'équation $F(s, z) = 0$ (qui peut être pensé aussi comme corps des fonctions méromorphes sur la surface de Riemann associée). On arrive à la définition actuelle : deux courbes algébriques sont *birationnellement équivalentes* si leurs corps de fonctions rationnelles sont isomorphes en tant qu'extension de corps de \mathbb{C} . En fait, deux courbes non singulières sont birationnellement équivalente si et seulement si elles sont biholomorphes.

Décomptes de modules. — À partir de là, Riemann introduit le problème des *modules* pour les surfaces de Riemann de genre g . Il s'agit, une fois le type topologique (c'est-à-dire le genre) fixé, d'étudier les classes d'équivalence birationnelle dont les surfaces de Riemann ont ce type topologique.

Riemann explique que, pour $g \geq 2$ ⁽⁴⁾ :

[...] une classe de systèmes de fonctions à mêmes ramifications et $(2p+1)$ fois connexes et la classe d'équations algébriques qui lui appartient, dépendent

4. Dans les citations qui suivent le genre est noté p .

de $3p - 3$ grandeurs variant de manière continue, qui seront nommées les *modules de la classe*.

De nos jours on parle d'*espace des modules*, mais ici on voit Riemann ne parler que du nombre de paramètres nécessaires pour se localiser dans cet espace, c'est-à-dire de sa dimension *complexe*, sans faire référence à la possibilité de construire globalement un tel « espace ». Pourtant il y pensait, comme le montre l'extrait suivant de son discours d'habilitation [Rie1854, pages 282 et 283], prononcé trois ans plus tôt :

Les concepts de grandeur ne sont possibles que là où il existe un concept général qui permette différents modes de détermination. Suivant qu'il est, ou non, possible de passer de l'un de ces modes de détermination à un autre, d'une manière continue, ils forment une variété continue ou une variété discrète [...] les occasions qui peuvent faire naître les concepts dont les modes de détermination forment une variété continue sont si rares dans la vie ordinaire, que les lieux des objets sensibles et les couleurs sont à peu près les seuls concepts simples dont les modes de détermination forment une variété de plusieurs dimensions. C'est seulement dans les hautes Mathématiques que les occasions pour la formation et le développement de ces concepts deviennent plus fréquentes.

De telles recherches sont devenues nécessaires dans plusieurs parties des Mathématiques, notamment pour l'étude des fonctions analytiques à plusieurs valeurs, et c'est surtout à cause de leur imperfection que le célèbre théorème d'Abel, ainsi que les travaux de Lagrange, de Pfaff, de Jacobi sur la théorie générale des équations différentielles, sont restés si longtemps stériles.

Riemann propose deux méthodes pour le calcul du nombre de modules, la première valable uniquement pour $g > 1$, et la deuxième valable aussi pour $g = 1$ (dans le cas $g = 0$, on a vu au chapitre précédent que toutes les surfaces de Riemann sont isomorphes à $\overline{\mathbb{C}}_z \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$).

Première méthode.— Riemann considère l'ensemble des fonctions méromorphes ayant exactement μ pôles (comptés avec multiplicités) sur T , où μ est un entier supérieur à $2g$. Autrement dit, il considère l'espace des applications holomorphes de degré μ de T vers $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Il découle du théorème de Riemann–Roch (théorème II.2.14 et encadré II.5) que cet espace est de dimension $2\mu - g + 1$.

D'après le théorème de Riemann–Hurwitz (encadré II.4), une fonction de T dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ayant μ pôles possède $2(\mu + g - 1)$ valeurs de ramification, c'est-à-dire que son image critique est un sous-ensemble fini de la

sphère de Riemann ayant ce cardinal. En faisant varier la fonction (« les constantes arbitraires » dont elle dépend), cet ensemble fini varie. Alors :

Ces constantes peuvent être déterminées de telle sorte que $2\mu - p + 1$ valeurs de ramification prennent des valeurs données, quand ces valeurs de ramification sont des fonctions indépendantes entre elles de ces constantes, et cela seulement d'un nombre fini de manières, puisque les équations de condition sont algébriques.

Riemann affirme ensuite que cette hypothèse d'indépendance entre fonctions est vérifiée dès que $g > 1$. Dans ce cas, en choisissant la fonction méromorphe sur T de telle manière que $2\mu - g + 1$ « valeurs de ramification prennent des valeurs données », il reste $3g - 3$ valeurs de ramification libres, qui forment donc un système complet de modules pour T .

Deuxième méthode. — Au lieu de considérer comme dans la méthode précédente des attributs des fonctions méromorphes sur T , cette deuxième méthode considère des attributs des intégrales w de formes holomorphes (intégrales de première espèce). Plus précisément, leurs modules de périodicité par rapport à un système de sections fixées transformant T en une surface simplement connexe T' et leurs valeurs aux zéros de la forme holomorphe associée, c'est-à-dire les valeurs critiques de $w|_{T'}$.

Le décompte permettant de retrouver les $3g - 3$ modules dont dépend la surface T est le suivant :

[...] l'on peut, dans la grandeur $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_p w_p + c$, que l'on introduira comme variable indépendante, déterminer et les grandeurs α , de telle sorte que, parmi $2p$ modules de périodicité, p d'entre eux prennent des valeurs données, et la constante c , lorsque p est > 1 , de telle sorte qu'une des $2p - 2$ valeurs de ramification des fonctions périodiques de w ait une valeur donnée. De cette manière w est complètement déterminé et, par conséquent, les $3p - 3$ grandeurs restantes dont dépend le mode de ramification et la périodicité de ces fonctions de w le sont aussi [...].

Par la suite se posa la question de comprendre si l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces de Riemann de genre g fixé pouvait être muni naturellement de structures supplémentaires. Par exemple, a-t-il une topologie rendant les paramètres considérés par Riemann dans les deux méthodes précédentes des fonctions continues? C'est lorsque l'on munit l'ensemble des classes d'isomorphisme d'un certain type d'objets de structures supplémentaires de nature géométrique que

l'on parle d'*espace* des modules. Le problème général des modules, se posant à la suite de Riemann, est de construire de telles structures qui reflètent les structures considérées sur les objets examinés.

Par exemple, si on regarde les surfaces de Riemann compactes en tant que courbes algébriques complexes, on peut se demander s'il existe un espace des modules qui soit lui-même une variété algébrique complexe. De nos jours on sait que c'est le cas (voir le livre [HaMo1998]) :

Proposition II.3.1. — *Il existe une variété quasi-projective complexe irréductible \mathcal{M}_g (en particulier connexe) qui est un espace des modules grossier pour les courbes algébriques complexes lisses compactes de genre g .*

Expliquons ce que cela veut dire. On peut facilement définir la notion de *familles algébriques* de courbes de genre g : il s'agit d'un morphisme algébrique $X \xrightarrow{\pi} B$ tel que les fibres $\pi^{-1}(b)$ soient toutes des courbes de genre g . On obtient ainsi une famille de courbes « paramétrée » par la base B . Notre espace \mathcal{M}_g est caractérisé par le fait que pour chaque famille de ce type, il existe *une unique* application algébrique $B \xrightarrow{\gamma} \mathcal{M}_g$ telle que pour tout $b \in B$, la courbe $\pi^{-1}(b)$ appartienne à la classe d'isomorphisme représentée par le point $\gamma(b) \in \mathcal{M}_g$. En particulier, on voit que les points de \mathcal{M}_g sont canoniquement en bijection avec les classes d'isomorphisme de courbes de genre g , ce qui montre que la structure algébrique de \mathcal{M}_g est bien une structure géométrique sur cet ensemble de modules.

Un point important est que \mathcal{M}_g lui-même n'est base d'aucun morphisme algébrique $X \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_g$ tel que pour tout $b \in \mathcal{M}_g$, la fibre $\pi^{-1}(b)$ soit dans la classe d'isomorphisme représentée par b : on dit pour cette raison que \mathcal{M}_g n'est qu'un espace des modules *grossier*.

On voit que dans les deux méthodes proposées par Riemann, on considère en fait des surfaces de Riemann munies de certaines structures supplémentaires : une fonction méromorphe ainsi qu'une numérotation de ses valeurs critiques, ou bien une base de l'homologie. Il s'avéra important de poser la question de l'existence d'espaces de modules pour de telles surfaces de Riemann « enrichies ». L'avantage d'une telle approche est qu'en enrichissant suffisamment la structure, on obtient des objets *sans automorphismes*, et que cela facilite l'étude

du problème des modules. Par exemple, cela permet de montrer que \mathcal{M}_g est en fait le quotient par un groupe fini d'une variété algébrique lisse.

II.3.2. L'uniformisation « abélienne » par Jacobi et Riemann

Une autre contribution importante de [Rie1857] est la résolution du « problème d'inversion » laissé ouvert par Abel et Jacobi. Pour mieux expliquer la contribution de Riemann, revenons à Abel qui – autour de 1829 – parvient à généraliser le théorème d'addition d'Euler aux intégrales abéliennes. Il part d'une intégrale

$$\int_{x_0}^x y dx$$

où $y(x)$ est une fonction algébrique définie par une équation polynomiale irréductible $F(x, y) = 0$. Il montre alors qu'il existe un entier $\mu \geq 0$ tel que si $x_1, x_2, \dots, x_{\mu+1}$ sont $\mu + 1$ complexes, on peut trouver μ complexes x'_1, \dots, x'_μ – bien déterminés à l'ordre près – qui dépendent rationnellement de $x_1, x_2, \dots, x_{\mu+1}$ tels que

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx + \int_{x_0}^{x_2} y dx + \dots + \int_{x_0}^{x_{\mu+1}} y dx = \int_{x_0}^{x'_1} y dx + \dots + \int_{x_0}^{x'_\mu} y dx,$$

aux périodes de $\int y dx$ près. Il faut simplement penser à l'expression ci-dessus comme une égalité formelle entre sommes de primitives.

Par exemple, pour l'intégrale de la forme de seconde espèce dx/x , c'est-à-dire le logarithme complexe, on a

$$\int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^b \frac{dx}{x} = \int_1^{ab} \frac{dx}{x}.$$

Si on utilise plusieurs fois le théorème d'Abel, on voit donc qu'il conduit à une « addition » de μ -uplets de points. Plus précisément :

Étant donnés (x_1, \dots, x_μ) et (x'_1, \dots, x'_μ) définis à l'ordre près, on peut trouver (x''_1, \dots, x''_μ) également bien défini à l'ordre près, dépendant rationnellement de (x_1, \dots, x_μ) et de (x'_1, \dots, x'_μ) tel que

$$\sum_1^\mu \int_{x_0}^{x_i} y dx + \sum_1^g \int_{x_0}^{x'_i} y dx = \sum_1^\mu \int_{x_0}^{x''_i} y dx.$$

Alors qu'Euler et Gauss ajoutaient des points sur une lemniscate (pour laquelle $\mu = 1$), Abel ajoute des ensembles à μ éléments.

Tout cela restait assez mystérieux et n'était d'ailleurs pas tout à fait correct. En particulier la signification de cet entier μ restait cachée. Lorsque l'intégrale abélienne est de première espèce, μ est le genre g de la surface de Riemann associée à y . Lorsque l'intégrale est de seconde espèce, comme dans l'exemple du logarithme, μ est égal à $g + 1$. Il faudra d'abord attendre le travail de Jacobi et surtout celui de Riemann pour comprendre cela. Il ne faut pas oublier qu'à cette époque, Abel et Jacobi ne pensaient pas à une courbe algébrique comme à une surface dotée d'une topologie.

Pour une description du théorème d'Abel de son point de vue, on pourra consulter [Cat2004, Kleim2004]. On verra qu'Abel en a en fait donné plusieurs versions assez différentes.

Les fonctions hyperelliptiques et le problème d'inversion de Jacobi. — L'une des premières familles d'intégrales abéliennes qui dépassent le cas des intégrales elliptiques est la suivante :

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha + \beta x) dx}{\sqrt{P}},$$

où P est un polynôme de degré 6. Il correspond à la courbe d'équation $y^2 = P(x)$ une surface de Riemann S de genre 2 et $(\alpha + \beta x) dx/y$ se relève en une différentielle holomorphe. L'intégrale a donc un sens si l'on précise une classe d'homotopie de chemin joignant les deux limites d'intégration. Répétons que la phrase qui précède n'était pas accessible à Jacobi.

La « fonction » u se relève donc en une fonction multiforme sur S . Rappelons que pour un polynôme P de degré 3 ou 4 l'analogue de l'application u admet une réciproque doublement périodique. Dans notre cas l'étude de la réciproque de u présente deux difficultés majeures.

La première difficulté est que la forme $(\alpha + \beta x) dx/y$ s'annule en deux points ($x = -\alpha/\beta$ correspond à deux points sur la surface : les deux déterminations de \sqrt{P}). Il en résulte que u présente des points critiques si bien que sa « réciproque », si elle existait, présenterait des points de ramification et ne serait donc pas uniforme ! Cette difficulté ne se présentait pas dans le cas elliptique car la forme dx/\sqrt{P} (avec P de degré 3 ou 4) ne s'annule pas sur la courbe elliptique correspondante.

La seconde est que $(\alpha + \beta x) dx/y$ présente maintenant *quatre* périodes qui sont les intégrales sur quatre lacets entourant des paires de racines de P . La fonction réciproque, si elle existait, aurait donc quatre périodes indépendantes. Jacobi établit alors le fait, évident pour un mathématicien d'aujourd'hui, qu'un sous-groupe de rang 4 de \mathbb{C} ne peut pas être discret et ne peut donc pas être le groupe des périodes d'une fonction méromorphe non constante.

Suite à l'article d'Abel sur les lois d'addition des μ -uplets de points, Jacobi eut deux nouvelles idées brillantes pour se sortir de l'impasse.

La première consiste à utiliser simultanément deux formes holomorphes sur C . Pour chaque lacet γ sur C , on peut intégrer $\frac{dx}{\sqrt{P}}$ et $\frac{x dx}{\sqrt{P}}$. On obtient un couple de périodes $(\omega_1(\gamma), \omega_2(\gamma)) \in \mathbb{C}^2$. Lorsque γ décrit tous les lacets de C , ces couples de périodes décrivent un sous-groupe abélien de rang 4 de \mathbb{C}^2 et non plus dans \mathbb{C} comme précédemment. On peut donc s'attendre à ce que Λ soit un sous-groupe discret de \mathbb{C}^2 et c'est effectivement ce qui se passe. On dispose donc d'une application holomorphe, dite d'Abel–Jacobi, qui utilise deux formes :

$$x \in C \mapsto \left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{P}}, \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{P}} \right) \in \mathbb{C}^2/\Lambda.$$

Le tore complexe \mathbb{C}^2/Λ s'appelle aujourd'hui la *jacobienn*e de la courbe C . Bien sûr, on ne peut pas parler d'uniformisation puisque le tore \mathbb{C}^2/Λ est de dimension 2 et ne paramètre en aucun cas la courbe C , de dimension 1.

La deuxième idée consiste à utiliser deux points, c'est-à-dire à utiliser l'application

$$(x_1, x_2) \in C^2 \mapsto \left(\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{P}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{P}}, \int_0^{x_1} \frac{x dx}{\sqrt{P}} + \int_0^{x_2} \frac{x dx}{\sqrt{P}} \right) \in \mathbb{C}^2/\Lambda.$$

La source et le but de cette application sont de même dimension mais elle ne peut pas être bijective puisque (x_1, x_2) et (x_2, x_1) ont la même image. On introduit donc le « carré symétrique » $C^{(2)}$ de C , quotient de C^2 par l'involution permutant les deux facteurs. Les éléments de $C^{(2)}$ sont donc les paires de points non ordonnés de C , non nécessairement distincts. À l'aide des fonctions symétriques élémentaires on munit $C^{(2)}$ d'une structure de variété algébrique lisse de dimension 2.

On dispose maintenant d'une application holomorphe de $C^{(2)}$ dans \mathbb{C}^2/Λ et c'est cette application que Jacobi cherche à inverser. La surjectivité est le « problème d'inversion de Jacobi » qu'il ne résoudra pas lui-même. Adolph Göbel et Georg Rosenhain le résoudront dans ce cas particulier des courbes hyperelliptiques que nous venons d'évoquer. C'est à Riemann que l'on doit la solution complète de ce problème.

Riemann et le problème d'inversion de Jacobi. — Riemann commence par généraliser la construction à une surface quelconque, pas nécessairement hyperelliptique. Rappelons que le théorème II.2.5 implique que l'espace des formes holomorphes sur S est de dimension égale au genre g de S . Lorsqu'on considère les intégrales de g formes holomorphes qui en constituent une base sur tous les lacets de la surface, on obtient un sous-groupe Λ de \mathbb{C}^g . Riemann établit qu'il s'agit d'un réseau, c'est-à-dire qu'il est discret et que le quotient \mathbb{C}^g/Λ est compact. De la même manière que précédemment, on a une application d'Abel–Jacobi de C dans \mathbb{C}^g/Λ . En formant la somme des images dans \mathbb{C}^g/Λ , on obtient une application de la puissance symétrique $C^{(g)}$ dans \mathbb{C}^g/Λ . Riemann établit alors deux théorèmes fondamentaux :

Théorème II.3.2. — *La jacobienne \mathbb{C}^g/Λ d'une courbe algébrique est une variété algébrique, c'est-à-dire qu'elle se plonge holomorphiquement dans un espace projectif de grande dimension et que son image est une sous-variété algébrique.*

Théorème II.3.3. — *L'application d'Abel–Jacobi $C^{(g)} \rightarrow \mathbb{C}^g/\Lambda$ est birationnelle.*

Cela ne signifie pas que cette application est un isomorphisme (un peu de topologie nous montrerait que ces deux espaces ne sont pas homéomorphes pour $g \geq 2$). En revanche il existe une application rationnelle $\mathbb{C}^g/\Lambda \rightarrow C^{(g)}$ qui est un inverse de l'application d'Abel–Jacobi là où elle est définie.

Donner les preuves des théorèmes II.3.2 et II.3.3 nous entraînerait trop loin du sujet. Nous allons tout de même esquisser rapidement la preuve de la surjectivité de l'application du théorème II.3.3.

Démonstration. — Nous allons montrer que l'application d'Abel–Jacobi est de degré topologique non nul. Rappelons (voir [Mil1965]) que le degré

topologique d'une application C^∞ entre deux variétés compactes orientées est la somme sur les préimages d'une valeur régulière des signes des déterminants. En particulier, une application de degré topologique non nul est surjective.

L'application d'Abel-Jacobi est holomorphe et préserve donc l'orientation. Il suffit donc de prouver que son image contient une valeur régulière. Nous allons montrer qu'il existe un g -uplet $l \in C^{(g)}$ où la différentielle est inversible. Cela suffit : le théorème d'inversion locale implique alors que l'image de notre application contient un ouvert non trivial et, par conséquent, au moins une valeur régulière.

Étant donné un g -uplet $l = (x_1, \dots, x_g) \in C^{(g)}$, remarquons que la différentielle de l'application d'Abel-Jacobi est non inversible en l si et seulement si il existe une forme de première espèce ω sur C qui s'annule en chacun des x_i . Il suffit donc de montrer qu'il existe un g -uplet l sur lequel aucune forme ne s'annule. Pour cela considérons l'espace projectif $\mathbb{P}(\Omega^1(C))$, de dimension $g - 1$. Le sous-ensemble A de $\mathbb{P}(\Omega^1(C)) \times C^{(g)}$ constitué de tous les couples $(\bar{\omega}, l)$ où $\bar{\omega}$ est la droite engendrée par la forme différentielle ω s'annulant sur le g -uplet l est un ensemble analytique de dimension $g - 1$. Sa projection sur le facteur $C^{(g)}$ ne peut donc pas être surjective. \square

Avec un peu plus de travail, on peut démontrer que le degré topologique de cette application est exactement égal à un. Ceci montre qu'il existe des ouverts denses dans $C^{(g)}$ et dans \mathbb{C}^g/Λ qui sont biholomorphes, c'est-à-dire que l'application d'Abel-Jacobi est birationnelle.

On pourra par exemple trouver une preuve du premier théorème de Riemann (qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tore \mathbb{C}^g/Λ , qui est automatiquement une variété holomorphe, soit en fait une variété algébrique sous la forme des *conditions bilinéaires de Riemann*) dans [Bos1992]. Elle utilise une généralisation multidimensionnelle des fonctions ϑ de Jacobi, appelée depuis « fonction thêta de Riemann ».

La jacobienne est naturellement munie d'une structure de groupe abélien. Le théorème II.3.2 la munit en outre d'une structure de variété algébrique. De manière plus concise on dit que « la jacobienne est une variété abélienne », manière de réunir dans un même énoncé les noms

des deux protagonistes dont la compétition ne doit pas faire oublier la similitude de leurs visions des mathématiques⁽⁵⁾.

Ces théorèmes donnent une nouvelle vision globale de la théorie des intégrales des fonctions algébriques et de celle des courbes algébriques :

- l'identification birationnelle rend lumineuse le théorème d'Abel sur la possibilité d'ajouter des g -uplets de points : la mystérieuse formule d'addition devient une simple conséquence de la loi de groupe sur la jacobienne ;
- sans donner un paramétrage des points de la courbe, les théorèmes de Riemann donnent un modèle algébrique simple pour les g -uplets de points en les ramenant à un modèle algébrique donné.

Mais la suite de l'histoire allait montrer qu'on peut aller beaucoup plus loin que cette « uniformisation abélienne ». L'uniformisation des points de C elle-même (et de non de $C^{(g)}$) sera obtenue vingt-cinq ans plus tard par Klein et Poincaré.

5. Dans une lettre restée célèbre adressée à Legendre et datée du 2 juillet 1830, Jacobi écrit : « Mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde. »

Surfaces de Riemann et surfaces riemanniennes

En 1881, Félix Klein reprend les travaux de Riemann dans un cours [Kle1882c] où il essaye de rendre intuitifs les résultats de la théorie des surfaces de Riemann. Précisons que cela intervient relativement longtemps après les mémoires de Riemann de 1851 et 1857 [Rie1851, Rie1857]; cette réécriture est contemporaine des premiers énoncés du théorème d'uniformisation que nous aborderons dans la partie B dont Klein sera un des héros majeurs.

Il réinterprète notamment le théorème de Riemann II.2.5, d'existence de formes méromorphes, en termes d'écoulements fluides sur les surfaces de Riemann. Pour comprendre cela, reprenons le théorème de représentation conforme de Riemann. Considérons donc un domaine simplement connexe à bord dans le plan complexe. Imaginons que son bord soit un fil parfaitement conducteur. Si on branche l'un des pôles d'une batterie en un point de l'ouvert et l'autre pôle en un point du bord, on obtient un écoulement des charges dans l'ouvert. Cet écoulement se fait en suivant les pentes de gradient d'un potentiel. On voit alors que ce potentiel a une singularité logarithmique là où est branchée la batterie à l'intérieur du domaine et est constant sur le bord (supposé parfaitement conducteur). Il s'agit donc d'une fonction de Green de l'ouvert. On a ainsi « prouvé » expérimentalement le théorème de représentation conforme.

Le travail de Klein vise à illustrer la théorie de Riemann, en étendant cette intuition physique à toutes les surfaces compactes.

L'illustration physique de Klein requiert l'introduction d'une métrique riemannienne sur la surface que l'on considère. Même si cela est éloigné des préoccupations et des techniques de Klein, on montrera comment cette nouvelle structure permet de jeter un regard plus moderne sur la théorie de Riemann, notamment sur le théorème II.2.5 d'existence de formes méromorphes et sur le problème des modules.

III.1. Felix Klein et l'illustration de la théorie de Riemann

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent, Riemann associe à chaque fonction algébrique d'une variable complexe z une surface recouvrant plusieurs fois le plan des z . Lors de la plupart de ses explications, Riemann utilise le paramètre z du plan pour décrire des objets qui sont aujourd'hui considérés comme vivant sur la surface. Arriver ainsi à rendre à la surface ce qui lui appartient a été un processus long et difficile. Voici par exemple comment Klein en parle dans la préface de son cours [Kle1882c], professé en 1881 :

Je ne suis pas sûr que j'aurais pu développer une conception cohérente du sujet pris comme un tout si, il y a maintenant de nombreuses années (1874), lors d'une conversation opportune, M. Prym ne m'avait pas fait une communication qui a pris de plus en plus d'importance pour moi au fil de mes réflexions ultérieures. Il m'a dit que « les surfaces de Riemann originellement ne sont pas nécessairement des surfaces à plusieurs feuillets au-dessus du plan, mais qu'au contraire, les fonctions à valeurs complexes de la position peuvent être étudiées sur des surfaces courbes données arbitrairement exactement de la même façon que sur les surfaces au-dessus du plan ».

Dans [Kle1882c], Klein se propose d'expliquer la théorie des fonctions et formes méromorphes vivant sur une surface de Riemann compacte dans un langage intrinsèque, qui n'utilise plus une projection sur le plan. Mais, plus important, il veut apprendre à ses étudiants à *penser* physiquement, car :

[...] il y a certaines considérations physiques qui ont été développées ultérieurement [...]. Je n'ai pas hésité à prendre ces conceptions physiques comme point de départ. Riemann, comme nous le savons, a utilisé à la place le Principe de Dirichlet. Mais je n'ai aucun doute sur le fait qu'il a démarré précisément de ces problèmes physiques et qu'ensuite, pour donner à ce qui était évident d'un point de vue physique le support du raisonnement mathématique, il y a substitué le Principe de Dirichlet.

Le cheminement est donc semé d'embûches entre ce qui est « physiquement évident » et la rigueur mathématique. Et dans la marche vers cette rigueur, on risque de perdre toute intuition. C'est ce qui s'est passé dans ce cas précis, selon l'affirmation de Klein, et c'est aussi ce qui l'a motivé dans la construction de son cours :

Nous connaissons tous les considérations tortueuses et difficiles par lesquelles, ces dernières années, au moins une partie des théorèmes de Riemann dont on traite ici ont été prouvés d'une manière fiable. Ces considérations sont entièrement négligées dans ce qui suit et je renonce ainsi à utiliser tout sauf des bases intuitives pour les théorèmes énoncés. En fait de telles preuves ne doivent en aucune manière être mélangées à la suite de pensées que j'ai essayé de préserver [...]. Mais elles doivent évidemment suivre celles-ci [...].

Nous ne résistons pas à citer l'extrait suivant d'une recension du troisième volume des œuvres de Klein par Young [You1924].

Un sujet qui intéressera le lecteur du tome III est l'attitude de Klein vis-à-vis de Riemann. Quoique Klein n'ait jamais vu Riemann, nous la comparons volontiers à celle de Platon vis-à-vis de Socrate. Maint philologue prétend que le Socrate de Platon n'est pas historique. Pour ma part, je m'exprimerais autrement. Ce que Platon nous raconte de Socrate, c'est ce qu'il a cru voir dans son maître, et, pour le voir, il a fallu le « grand front » de Platon. Ce que Klein nous raconte de Riemann, c'est ce qu'il a cru voir du maître dans ses écrits, et, j'oserais dire, que c'est l'intuition qui a fait voir à Klein des points de vue de Riemann qu'aucun des disciples de ce dernier n'avait soupçonnés. On n'a qu'à regarder le portrait de Riemann pour voir qu'il était modeste. Je crois volontiers qu'il avait beaucoup d'idées latentes dont il n'avait lui-même pas conscience.

Il faut lire ce que Klein nous raconte à la page 479 au sujet de sa brochure « *Algebraische Funktionen und ihre Integrale* » (1882), où il prétendait révéler la vraie pensée de Riemann qui serait à la base de sa conception de la théorie des fonctions, une base essentiellement concrète et physique de ces notions abstraites et métaphysiques. Comme les valeurs réelles d'une fonction algébrique se représentaient couramment par les points d'une courbe, Riemann avait introduit ses surfaces planes avec leur pluralité de feuillet superposés qui n'adhèrent qu'en leurs points de ramification, pour faire la répartition des valeurs complexes d'une fonction algébrique $f(x+iy)$. Klein prétendait que c'est en considérant des phénomènes physiques que Riemann est parvenu à cette conception, et que la surface primitive de

Riemann n'était pas aussi abstraite et compliquée, mais était tout naturellement une surface courbe appropriée dans l'espace, tel le tore.

Sur une telle surface, les phénomènes du mouvement stable d'un fluide, de la chaleur ou de l'électricité, se représentent mathématiquement par une fonction, le potentiel, qui satisfait à l'équation différentielle fondamentale $\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 = 0$ de la théorie des fonctions complexes $f(x + iy)$. D'une manière fort satisfaisante Klein développe cette idée dans sa brochure et montre que de ce point de vue la plupart des théorèmes de la théorie des fonctions deviennent intuitifs. D'après Klein, Riemann n'aurait introduit les surfaces qui portent son nom qu'ultérieurement, pour élucider son exposition arithmétisée. À ce propos Klein avait cité comme source de sa pensée une phrase de Prym, élève de Riemann, « que les surfaces de Riemann n'étaient pas nécessairement dans leurs origines des surfaces à plusieurs feuillets superposés au plan. On pourrait étudier les fonctions complexes de position sur n'importe quelle surface courbe aussi bien que sur les surfaces planes ».

Mais Klein a reconnu qu'il avait mal traduit la pensée de Prym. Celui-ci niait formellement (8 avril 1882) qu'il avait pu vouloir dire que Riemann lui-même eût conçu l'idée de répartir les valeurs d'une fonction complexe sur une surface courbe comme le fait Klein dans sa brochure.

Les remarques qui précèdent sont une réponse au reproche qu'on a pu faire à Klein : celui de manquer de rigueur mathématique dans les considérations qui lui servent de base dans sa brochure, comme aussi, du reste, dans d'autres parties de ses écrits. Klein défend le principe des méthodes intuitives dont il fait usage.

« Je cherche », dit-il, « à parvenir par des réflexions de nature physique à une réelle compréhension des idées fondamentales de la théorie riemannienne. Je voudrais que des procédés semblables deviennent fréquents, car le genre usuel des publications mathématiques refoule habituellement au second plan la question importante de la façon dont on est conduit à la construction de certains problèmes ou de certaines déductions. J'estime que c'est à tort que la majorité des mathématiciens passent entièrement sous silence leurs réflexions intuitives pour ne publier que des démonstrations (certes nécessaires) d'une forme rigoureuse et le plus souvent arithmétisée. Ils semblent retenus par une certaine crainte de ne pas paraître assez scientifiques à leurs collègues. Ou bien la cause est-elle, dans d'autres cas, le désir de ne pas révéler à leurs concurrents la source de leurs propres réflexions ? » Il dit encore « C'est en physicien que j'ai rédigé ma note sur Riemann, aussi ai-je rencontré l'approbation de plusieurs physiciens. »

Dans les sections qui suivent nous allons d'abord expliquer ces intuitions à propos des formes et des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann, développées par Klein. Nous donnerons ensuite une preuve moderne du théorème II.2.5 d'existence de formes méromorphes, beaucoup moins intuitive physiquement, ce qui illustrera les propos précédents de Klein.

La base des explications physiques de Klein est de considérer sur une surface de Riemann une métrique riemannienne compatible avec la structure complexe. Cette métrique permet de regarder les formes réelles par dualité comme des champs de vecteurs. Lorsque la forme est la partie réelle d'une 1-forme méromorphe, le champ dual associé hérite de propriétés dynamiques particulières que l'on peut formuler dans le langage de la géométrie riemannienne et interpréter en termes hydrodynamiques ou électrostatiques (l'appellation « courant électrique » témoigne encore des analogies observées au dix-neuvième siècle entre ces branches de la physique).

Pour plus de détails sur ces interprétations physiques et leur histoire, on pourra consulter [Coh1967].

III.1.1. Métriques compatibles sur une surface de Riemann

Klein utilise le fait suivant. Si S est une surface de Riemann, on peut toujours trouver une métrique riemannienne $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ sur S qui est *compatible avec la structure complexe*, c'est-à-dire qui définit la même mesure des angles. Ceci s'écrit de la manière suivante à l'aide d'une coordonnée holomorphe locale $z = x + iy : g = e^{u(x,y)} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, où u est une fonction lisse. Avec des outils modernes, il est très simple de construire une telle métrique. Il suffit de recouvrir S par des ouverts U_i munis de cartes holomorphes $z_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ et de considérer une partition de l'unité (ρ_i) subordonnée au recouvrement (U_i) . On peut alors utiliser la métrique

$$g = \sum_i \rho_i \cdot z_i^* (\sqrt{dx^2 + dy^2}).$$

Remarque III.1.1. — Si l'on suppose la surface de Riemann S plongée dans un espace projectif $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$, on peut construire globalement une métrique riemannienne analytique réelle compatible avec la structure complexe de S . Il suffit de considérer la restriction à S de la métrique de Fubini-Study (voir par exemple [GrHa1978] pour sa définition).

La structure complexe de S induit aussi une *orientation* de S , que l'on obtient à partir de l'orientation standard de \mathbb{C} à l'aide des cartes holomorphes. En effet, les changements de cartes sont des biholomorphismes entre ouverts de \mathbb{C} et préservent donc l'orientation standard.

Réciproquement, si (S, g) est une surface *orientée* munie d'une métrique riemannienne lisse, elle admet une *unique* structure de surface de Riemann compatible (voir section I.2.2). Ce théorème d'*uniformisation locale* est beaucoup plus compliqué à démontrer que le théorème de Gauss (dont nous avons vu la preuve dans le cas analytique).

En résumé, une structure de surface de Riemann sur la surface différentiable S est la même chose que la donnée d'une orientation et d'une classe conforme de métriques riemanniennes.

La seule structure de surface de Riemann de S permet de définir l'opérateur *presque complexe* associé $J : TS \rightarrow TS$, qui est, en termes géométriques, l'opérateur de rotation d'angle $\pi/2$ dans le sens positif. En fait, la donnée d'un tel opérateur (vérifiant l'équation $J^2 = -I$) est équivalente à celle d'une orientation et d'une classe conforme de métriques, donc d'une structure de surface de Riemann sur S . À l'aide de J on peut tourner à la fois les vecteurs tangents et les formes différentielles réelles⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned} *v &:= J(v), \text{ si } v \in TS, \\ *\alpha &:= -\alpha \circ J, \text{ si } \alpha \in T^*S. \end{aligned} \tag{III.12}$$

Une fois fixée la métrique g compatible avec la structure complexe, on peut associer à chaque 1-forme différentielle α sur S à valeurs réelles le champ de vecteurs \vec{v}_α qui lui est *dual* par rapport à g :

$$\alpha(\cdot) = \langle \vec{v}_\alpha, \cdot \rangle.$$

Ceci permet de définir point par point le produit scalaire de deux 1-formes, comme étant celui des champs de vecteurs duaux. En notant vol la forme d'aire associée à g et à l'orientation fixée de S , on a alors les formules

$$\begin{cases} \text{vol}(*\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle, & \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in TS \\ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \text{vol} = \alpha_1 \wedge *\alpha_2, & \forall \alpha_1, \alpha_2 \in T^*S, \end{cases} \tag{III.13}$$

qui se démontrent facilement en calculant dans une base orthonormée.

1. Attention au signe, qui est conventionnel.

Toujours à l'aide de la dualité entre formes et vecteurs, on peut définir les notions de *rotationnel* et de *divergence* d'un champ de vecteurs (voir l'encadré III.1).

Encadré III.1 : Rotationnel et divergence

Soit (S, g) une surface orientée munie d'une métrique riemannienne lisse. Nous noterons vol la forme d'aire associée. Soit \vec{v} un champ de vecteurs lisse sur S et $\alpha = \langle \vec{v}, \cdot \rangle$ la forme duale de \vec{v} . La 2-forme $d\alpha$ est le produit de la forme d'aire vol par une fonction lisse appelée *rotationnel* de \vec{v} :

$$d\alpha = \text{rot } \vec{v} \cdot \text{vol}.$$

Par le théorème de Stokes, pour tout domaine U contenu dans S , à bord lisse ∂U , on a

$$\int_{\partial U} \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle dl = \int_U \text{rot } \vec{v} \cdot \text{vol},$$

où \vec{t} est le vecteur tangent unitaire sur ∂U et dl l'élément de longueur sur ∂U . Le terme de gauche ci-dessus s'appelle la *circulation* de \vec{v} le long de la courbe ∂U . Le champ \vec{v} est dit *irrotationnel* si son rotationnel est identiquement nul, ou, de manière équivalente, si la 1-forme α est fermée.

Considérons maintenant la 1-forme $*\alpha$. La 2-forme $d(*\alpha)$ est le produit de la forme d'aire vol par une fonction lisse appelée *divergence* de \vec{v} :

$$d(*\alpha) = \text{div } \vec{v} \cdot \text{vol}.$$

Par le théorème de Stokes, on traduit cette égalité sous la forme usuelle suivante. Pour tout domaine U contenu dans S , à bord lisse, on a

$$\int_{\partial U} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dl = \int_U \text{div } \vec{v} \cdot \text{vol},$$

où \vec{n} est le vecteur normal unitaire sortant sur le bord ∂U . Le terme de gauche ci-dessus s'appelle le *flux* de \vec{v} au travers de la courbe ∂U . Si \vec{v} modélise un écoulement, ce terme exprime la variation infinitésimale de la quantité de fluide contenue dans U . L'écoulement est dit *incompressible* si la divergence de v est nulle ou, de manière équivalente, si la forme $*\alpha$ est fermée.

III.1.2. Formes méromorphes et champs de vecteurs

Supposons maintenant le champ \vec{v} irrotationnel. La 1-forme duale α est donc fermée. Elle est alors localement exacte. Il existe donc, au voisinage de chaque point de S , une fonction u telle que $du = \langle \vec{v}, \cdot \rangle$. Autrement dit, \vec{v} est le gradient de la fonction $u : \vec{v} = \text{grad } u$. On dit souvent que la fonction u est un *potentiel* dont dérive \vec{v} .

Si \vec{v} est à la fois incompressible et irrotationnel, alors le potentiel u est une *fonction harmonique*. C'est une conséquence de la relation

$$\Delta u := \text{div grad } u$$

(noter que, même si la définition du Laplacien dépend de la métrique, la notion de fonction harmonique ne dépend que de la structure conforme associée). En particulier, la fonction u et le champ \vec{v} sont automatiquement analytiques. Réciproquement, toute fonction harmonique définit *via* son gradient un flot incompressible et irrotationnel.

Considérons maintenant le champ $*\vec{v}$. On a les égalités

$$\text{rot}(*\vec{v}) = \text{div } \vec{v} \quad \text{et} \quad \text{div}(*\vec{v}) = -\text{rot } \vec{v}.$$

Ainsi, si \vec{v} est de divergence nulle (resp. irrotationnel), alors $*\vec{v}$ est irrotationnel (resp. de divergence nulle). Supposons donc que le champ \vec{v} soit incompressible et irrotationnel. Le champ $*\vec{v}$ jouit également de ces deux propriétés ; en particulier, il dérive d'un potentiel u^* . Comme u , la fonction u^* n'est définie que localement et à une constante près. La 1-forme $\eta = du + i du^*$ à valeurs complexes est elle bien définie sur toute la surface S .

Lemme III.1.2. — *La 1-forme η est holomorphe.*

Démonstration. — Plaçons-nous sur un ouvert U sur lequel le champ \vec{v} ne s'annule pas. Les gradients de u et u^* étant orthogonaux et de même norme, l'application $u + i u^* : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. Remarquons que, puisque cette application est un difféomorphisme local, les fonctions u et u^* fournissent des coordonnées locales conformes sur U . Une autre manière de formuler ce fait est de dire que la 1-forme η est holomorphe sur S privée des zéros de \vec{v} . Comme elle est, par ailleurs, définie sur S en entier (et que les zéros de \vec{v} sont isolés), η est une 1-forme holomorphe sur S . □

Réciproquement, étant donnée une 1-forme holomorphe η , le champ dual de la partie réelle de η , autrement dit le champ \vec{v} défini par

$$\operatorname{Re} \eta = \langle \vec{v}, \cdot \rangle,$$

est irrotationnel et de divergence nulle. Ceci permet de comprendre les propriétés locales des points critiques des champs de vecteurs irrotationnels de divergence nulle. Au voisinage d'un tel point, écrivons $\eta = df$ où f est une fonction holomorphe. Il existe alors une coordonnée holomorphe locale z et un entier n tels que l'on ait : $f(z) = z^n$. Nous obtenons donc $\eta = nz^{n-1}dz$, puis $\langle \vec{v}, \cdot \rangle = \operatorname{Re}(nz^{n-1}dz)$. Les lignes de champ correspondant au cas où $n = 3$ sont représentées sur la figure III.1.

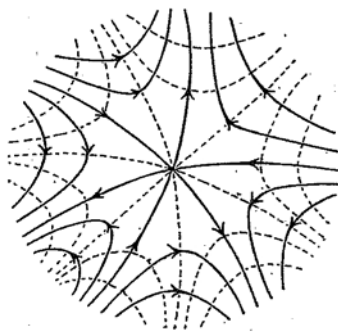


FIGURE III.1. Figure extraite du livre de Klein : voisinage d'un point critique

Dans son cours, Klein considère également le cas où la forme η a des pôles. Le champ \vec{v} est alors défini sur la surface privée des pôles de η . Ceux-ci sont en nombre fini. Nous allons maintenant décrire qualitativement l'allure des lignes de champ de \vec{v} au voisinage de ceux-ci. En un pôle de η , on peut toujours trouver (voir l'encadré III.2) une coordonnée holomorphe locale w pour laquelle

$$\eta = \left(\frac{\lambda}{w} + \frac{1}{w^\nu} \right) dw,$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Le champ \vec{v} dual de la forme réelle $\operatorname{Re} \eta$ se décompose donc en la superposition des champs duaux aux formes $\lambda dw/w$ et dw/w^ν . Considérons d'abord le cas où $\nu = 1$. Alors η s'écrit $\mu dw/w$, avec $\mu = \lambda + 1$.

Décomposons de nouveau le champ dual à $\operatorname{Re}(\mu dw/w)$ en la superposition d'un champ avec μ réel et d'un autre avec μ imaginaire pur. Lorsque μ est réel, on trouve que le potentiel de \vec{v} est à une constante additive près la fonction $u = \mu \log r$, où $w = re^{i\theta}$. Les lignes de champ sont alors perpendiculaires aux cercles concentriques autour du point $w = 0$; ce sont des *sources* positives ou négatives (*puits*), suivant le signe de μ (voir figure III.2).

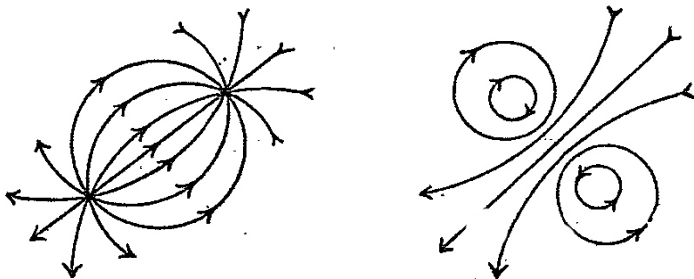


FIGURE III.2. Figure extraite du livre de Klein : puits/source et tourbillon

Lorsque μ est imaginaire pur, le potentiel est à une constante additive près la fonction $u = -\mu\theta$, et les lignes de champ sont cette fois les cercles concentriques autour de $w = 0$, parcourus à vitesse μ . On est en présence d'un *tourbillon* (voir figure III.2).

Le cas du champ dual à la 1-forme dw/w^2 s'obtient en remarquant que

$$\frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{dw}{w-\varepsilon} - \frac{dw}{w+\varepsilon} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dw}{w^2}.$$

Lorsque ε est réel, cela revient à superposer une source « de débit ε » et un puits « de débit $-\varepsilon$ » placés en des points p et p' situés à distance 2ε l'un de l'autre : on obtient un dipôle. Lorsque ε est imaginaire pur, cela revient à superposer deux tourbillons « de sens opposés » placés en des points p et p' situés à distance 2ε l'un de l'autre (voir figure III.3).

Le même procédé peut également être utilisé pour étudier les champs duaux aux formes $\operatorname{Re}(dw/w^v)$, pour tout entier $v \geq 2$. On fait alors tendre vers une même limite, v points qui sont des sources, des puits ou des tourbillons.

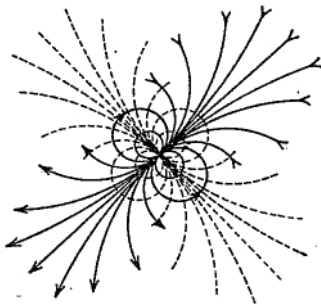


FIGURE III.3. Figure extraite du livre de Klein : le dipôle

Nous allons maintenant voir comment interpréter les périodes de la 1-forme holomorphe η en termes du champ de vecteurs \vec{v} . Fixons une classe d'homologie $a \in H_1(S, \mathbb{Z})$. La partie réelle de la période de η sur la classe a est par définition

$$[\text{Re } \eta](a) := \text{Re} \left(\int_{\gamma} \eta \right),$$

où γ est une (multi-)courbe orientée qui représente a . Comme dans l'encadré III.1, on note \vec{t} le vecteur unitaire tangent à cette courbe et \vec{n} le vecteur normal « sortant » tel que (\vec{t}, \vec{n}) est une base indirecte. Notons \vec{v} le champ dual à $\text{Re } \eta$: il vérifie $\text{Re } \eta = \langle \vec{v}, \cdot \rangle$. On remarque alors que $\langle \vec{v}, \vec{t} \rangle = -\langle * \vec{v}, \vec{n} \rangle$. On en déduit l'égalité (où dl est l'élément de longueur sur γ)

$$[\text{Re } \eta](a) = \int_{\gamma} \langle -(* \vec{v}), \vec{n} \rangle dl.$$

La période $[\text{Re } \eta](a)$ est donc égale au flux du champ $-(* \vec{v})$ à travers la courbe γ .

De plus, à l'aide de la première des relations (III.13, page 118), nous pouvons réécrire l'égalité $\text{Re } \eta = \langle \vec{v}, \cdot \rangle$ sous la forme $\text{Re } \eta = -\text{vol}(* \vec{v}, \cdot)$. Ainsi on obtient

$$[\text{Re } \eta](a) = - \int_{\gamma} \text{vol}(* \vec{v}, \cdot).$$

La période $[\text{Re } \eta](a)$ est donc également l'aire infinitésimale du cylindre obtenu en déplaçant la courbe γ par le flot du champ $-(* \vec{v})$.

Encadré III.2 : Forme normale locale d'une forme méromorphe

Considérons une forme méromorphe η au voisinage de l'un de ses pôles.

Nous expliquons ici comment trouver une coordonnée locale w au voisinage du pôle dans laquelle η s'écrit sous la forme normale $\eta = \left(\frac{\lambda}{w} + \frac{1}{w^v}\right) dw$.

Fixons une coordonnée holomorphe locale z quelconque. À l'aide de celle-ci, η s'écrit

$$\eta = \frac{\lambda}{z} dz + d\left(\frac{h(z)}{z^{v-1}}\right),$$

où h est une fonction holomorphe, $\lambda \in \mathbb{C}$ est le résidu de la forme η en 0 et $v \geq 2$ est un entier. Nous cherchons un changement de coordonnée de la forme $w(z) = z \cdot u(z)$ où u est holomorphe et $u(0) = 1$, tel que

$$\frac{\lambda dz}{z} + d\left(\frac{h}{z^{v-1}}\right) = \frac{dw}{w^v} + \lambda \frac{dw}{w}.$$

Cette équation est équivalente à l'équation

$$\frac{dw}{w^v} + \lambda \frac{du}{u} = d\left(\frac{h}{z^{v-1}}\right).$$

En intégrant nous obtenons

$$\frac{-1}{(v-1)w^{v-1}} + \lambda \log u - \frac{h}{z^{v-1}} = C,$$

où $C \in \mathbb{C}$ est une constante, puis, en multipliant par z^{v-1} :

$$\frac{-1}{(v-1)u^{v-1}} + \lambda z^{v-1} \log u - h - Cz^{v-1} = 0.$$

Notons $\Phi(u, z)$ le membre de gauche de cette dernière équation. Au voisinage du point $(1, 0)$, la fonction $\Phi(u, z)$ est une fonction holomorphe des deux variables u et z . La dérivée de Φ par rapport à u au point $(u, z) = (1, 0)$ vaut 1, ce qui permet d'appliquer la version holomorphe du théorème des fonctions implicites. On trouve une fonction holomorphe locale $u(z)$ qui permet de construire le changement de variable $w(z) = z \cdot u(z)$.

Les considérations ci-dessus permettent donc de traduire le théorème II.2.5 d'existence de formes méromorphes en termes de champs de vecteurs (ou, d'un point de vue plus physique, « d'écoulement »). Trouver une 1-forme méromorphe η à pôles prescrits équivaut à trouver un champ de vecteurs \vec{v} de divergence nulle et irrotationnel tel que chaque pôle de η correspond à une singularité de \vec{v} (puits, source ou tourbillon). De même, fixer les périodes revient à fixer les flux à travers des courbes représentant une base de l'homologie.

III.1.3. Preuve expérimentale du théorème II.2.5

Dans son cours [Kle1882c], Klein décrit les expériences électrostatiques ou hydrodynamiques qui mettent en évidence des champs de vecteurs irrotationnels et de divergence nulle. L'idée est de construire un écoulement stationnaire, en imposant des singularités et des flux à travers certaines courbes.

On considère pour cela la surface comme composée d'un matériau infiniment fin et conducteur. Si on branche les deux pôles d'une batterie sur la surface, on va créer un écoulement de charges qui aura une source et un puits (aux points de branchement). Les équations du mouvement d'un fluide nous assure que cet écoulement sera irrotationnel et incompressible en dehors des singularités. On peut de plus imaginer qu'on peut forcer le flux à travers une courbe⁽²⁾ en imposant une force électromotrice. Cela permet, comme nous l'avons vu ci-dessus, de fixer les parties réelles des périodes.

À titre d'exemple, étudions comment on peut engendrer un écoulement donné dans le plan. Commençons par quelques rappels. Si Y est un champ de vecteurs dans \mathbb{R}^3 , son rotationnel $\text{rot } Y$ est le champ de vecteurs défini par l'égalité suivante (entre formes différentielles de degré 2) :

$$d(\langle Y, \cdot \rangle) = \text{vol}(\text{rot } Y, \cdot, \cdot).$$

Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et vol sont respectivement le produit scalaire euclidien et la forme volume usuelle sur \mathbb{R}^3 .

2. La réalisation pratique de cette contrainte pose problème. Klein se voit obligé à imaginer des surfaces composées de plusieurs pièces à températures différentes. Nous en restons au niveau des expériences de pensée.

Dans l'espace \mathbb{R}^3 , les champs électrostatique \vec{E} et magnétique \vec{B} en régime stationnaire sont donnés par les *équations de Maxwell* :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 j, \end{aligned}$$

où ε_0 (permittivité diélectrique du vide) et μ_0 (perméabilité magnétique du vide) sont des constantes, ρ est la densité de charge et j est le champ de vecteurs densité de courant. En dehors des supports de la mesure ρ et du courant j , les champs électrostatique et magnétique sont incompressibles et irrotationnels.

Ceci permet de mettre en évidence des exemples d'écoulements incompressibles et irrotationnels à la surface du plan. En effet, considérons un nombre fini de points P_1, \dots, P_n du plan \mathbb{R}^2 et plaçons sur les droites verticales $\{P_i\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ une famille de charges dont la densité est uniforme. Puisque ce problème est invariant par la symétrie $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$, le champ électrostatique est tangent au plan horizontal $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Il définit donc un écoulement incompressible et irrotationnel sur ce plan. Les singularités de ces champs sont des sources positives ou négatives en fonction des densités de charges que l'on a choisies (voir figure III.4).

De même, on peut forcer un courant électrique d'intensité constante dans les fils verticaux $\{P_i\} \times \mathbb{R}$. Dans ce cas, le champ magnétique \vec{B} en régime stationnaire est également tangent aux plans horizontaux et induit un écoulement incompressible et irrotationnel du plan en dehors d'un nombre fini de points qui sont des tourbillons (voir figure III.4). Par superposition de ces deux sortes de champs, on trouve expérimentalement tous les types de pôle possibles des 1-formes méromorphes sur \mathbb{C} .

III.2. Retour moderne à la théorie de Riemann

III.2.1. La théorie de Hodge et la démonstration du théorème d'existence de formes méromorphes

L'idée de Klein consistant à munir une surface de Riemann d'une métrique riemannienne compatible avec la structure complexe est à la base

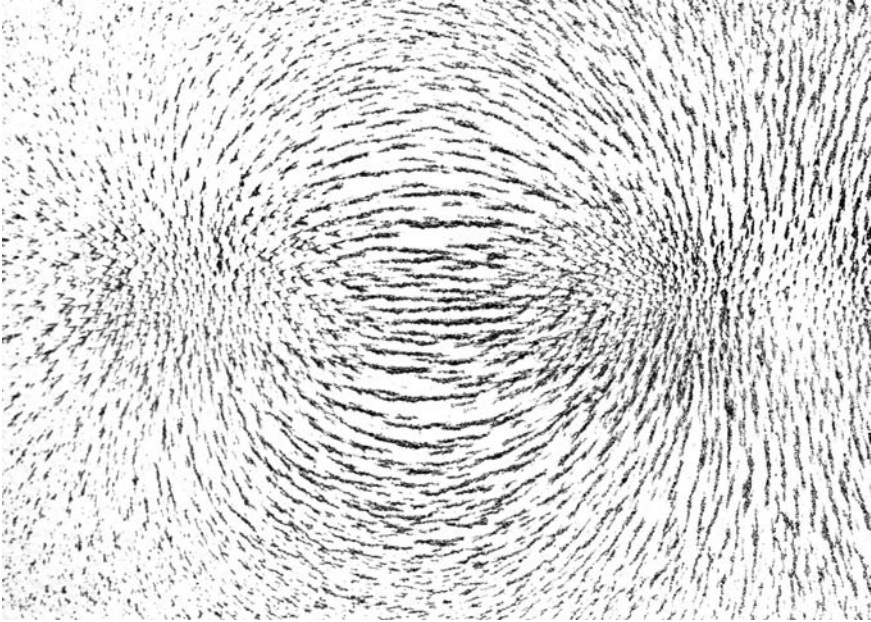


FIGURE III.4. Champ électrostatique plan

des preuves modernes du théorème II.2.5 d'existence de formes méromorphes. La démonstration que nous donnons ici est inspirée du livre de Springer [Spr1957].

On se donne encore une fois une surface de Riemann compacte S munie d'une métrique riemannienne compatible. Soit ω une 1-forme (lisse) sur S . La forme ω est dite *co-fermée* si $*\omega$ est fermée. Elle est dite *harmonique* si elle est à la fois fermée et co-fermée.

La preuve du théorème II.2.5 repose sur le théorème suivant, qui est un cas particulier de la *théorie de Hodge* valable en toutes dimensions et développée justement en cherchant à généraliser la situation bidimensionnelle :

Théorème III.2.1. — *Toute 1-forme lisse ω à valeurs réelles se décompose de manière unique en une somme de trois 1-formes :*

$$\omega = \omega_h + dF + *dG,$$

où ω_h est une forme harmonique lisse, et F et G sont des fonctions lisses à valeurs réelles définies globalement sur T .

Bien sûr, l'unicité a trait aux 1-formes ω_h , dF , $*dG$ et non pas aux fonctions F et G qui, elles, ne sont définies qu'à des constantes d'intégration près. Expliquons pourquoi ce résultat implique le théorème II.2.5.

Démonstration du théorème II.2.5 à l'aide du théorème III.2.1

Commençons par démontrer le théorème pour les formes holomorphes. Comme une 1-forme holomorphe est complètement déterminée par sa partie réelle et que, de plus, toute 1-forme harmonique est la partie réelle d'une 1-forme holomorphe, il s'agit donc de démontrer qu'il existe une unique 1-forme harmonique ayant des périodes prescrites.

Nous utiliserons, sans la justifier, une forme très élémentaire du théorème de de Rham, bien postérieur à Klein. Sur une surface compacte orientable de genre g , on peut d'une part prescrire les $2g$ -périodes d'une 1-forme fermée et d'autre part, une forme est exacte si et seulement si ces périodes sont nulles.

Pour l'existence, considérons une 1-forme fermée ω à valeurs réelles ayant les périodes prescrites et appliquons-lui le théorème III.2.1. Puisque ω est fermée, la partie co-exacte $*dG$ de ω est fermée. La proposition suivante assure alors que $*dG = 0$. Ainsi ω est cohomologue à sa composante harmonique ω_h , qui est donc solution du problème.

Proposition III.2.2. — *Pour toute fonction lisse $G : S \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons*

$$\int_S |*dG|^2 \text{vol} = - \int_S G \cdot d(*dG).$$

Démonstration. — Puisque la somme

$$G \cdot d(*dG) + dG \wedge *dG$$

est exacte (égale à la différentielle de la 1-forme $G \cdot *dG$) nous avons

$$\int_S G \cdot d(*dG) = - \int_S dG \wedge *dG.$$

Les formes dG et $*dG$ étant orthogonales et de même norme on a l'égalité $dG \wedge *dG = |*dG|^2 \text{vol}$, ce qui achève la preuve. \square

Pour l'unicité, il suffit de prouver qu'une 1-forme harmonique ω dont les périodes sont nulles est nulle. Mais une telle forme est exacte et sa primitive est une fonction harmonique. Par le principe du maximum, cette primitive est constante, ω est donc nulle.

Nous traitons maintenant le cas des formes méromorphes. Fixons des points P_1, \dots, P_m de la surface, A_1, \dots, A_m des nombres complexes de somme nulle, et des périodes réelles. Nous cherchons une forme méromorphe sur S ayant des pôles en les P_i de partie principale A_i et ayant les parties réelles de périodes prescrites.

Prenons une 1-forme réelle α_0 lisse sur $S \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$ et qui, au voisinage de chaque point P_i vérifie

$$\alpha_0 = \operatorname{Re} \left((A_i z_i^{-1} + B_i z_i^{-2} + C_i z_i^{-3} + \dots) dz_i \right).$$

Puisque α_0 est harmonique au voisinage des points P_i , la 2-forme $d\alpha_0$ y est nulle. Elle s'étend donc en une forme lisse sur S .

Lemme III.2.3. — $\int_S d\alpha_0 = 0$.

Démonstration. — Choisissons de petits disques D_i centrés aux points P_i sur lesquels $d\alpha_0 = 0$. On a alors d'après le théorème de Stokes

$$\int_S d\alpha_0 = \int_{S \setminus \cup_i D_i} d\alpha_0 = - \sum_i \int_{\partial D_i} \alpha_0.$$

Cette dernière somme est égale à

$$\operatorname{Re} \left(2i\pi \sum_i A_i \right),$$

qui est nulle par l'hypothèse sur les résidus des parties principales données. □

Comme $d\alpha_0$ est une forme lisse d'intégrale nulle, elle admet une primitive ω . Considérons maintenant la 1-forme fermée $\alpha_1 = \alpha_0 - \omega$ sur $S \setminus \{P_1, \dots, P_m\}$. De même que précédemment, la 2-forme $d(*\alpha_1)$ s'étend en une 2-forme lisse et d'intégrale nulle sur S . Notons β une primitive lisse de la 2-forme $d(*\alpha_1)$ sur S et appliquons-lui le théorème III.2.1 : $\beta = \beta_h + dF + *dG$. De l'égalité $d\beta = d(*\alpha_1)$, nous déduisons

$$d(*dG) = d(*\alpha_1).$$

La 1-forme $\alpha_2 = \alpha_1 - dG$ est fermée (comme α_1) et co-fermée d'après l'équation précédente. Elle est donc harmonique en dehors de ses pôles. C'est la partie réelle de la forme méromorphe cherchée, ce qui conclut la preuve du théorème II.2.5. □

Démonstration du théorème III.2.1. — Introduisons l'espace $\Omega_{L^2}^1(S)$ des 1-formes différentielles réelles sur S dont les coefficients sont des fonctions mesurables de carré intégrable. C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{L^2} := \int_S \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_P \text{vol}_P = \int_S \omega_1 \wedge * \omega_2,$$

la dernière égalité découlant de la formule III.13.

Soit E l'adhérence dans $\Omega_{L^2}^1(S)$ de l'espace des formes exactes lisses, E^* l'adhérence dans $\Omega_{L^2}^1(S)$ de l'espace des formes co-exactes lisses (c'est-à-dire qui s'écrivent $*dF$, où F est une fonction lisse). Soit ω une 1-forme et F une fonction (toutes deux supposées lisses). On a alors

$$\int_S \langle dF, \omega \rangle \text{vol} = - \int_S dF \wedge * \omega = \int_S F d(*\omega). \quad (\text{III.14})$$

La première égalité découle de la formule III.13, page 118; la deuxième découle de la relation de Leibniz $d(F*\omega) = dF \wedge *\omega + Fd(*\omega)$ et de la formule de Stokes.

En appliquant cette identité à $\omega = *dG$, où G est une fonction lisse, on trouve que $\langle dF, *dG \rangle_{L^2} = 0$. Les espaces E et E^* sont donc orthogonaux. En introduisant l'orthogonal H de $E \oplus E^*$, on obtient une décomposition en somme directe orthogonale

$$\Omega_{L^2}^1(S) = H \oplus E \oplus E^*.$$

Il s'agit maintenant de montrer que H est l'espace des formes harmoniques lisses. Il suffit de montrer que tout élément de H coïncide localement avec une forme harmonique lisse.

En se plaçant dans des coordonnées conformes et en choisissant la métrique euclidienne standard (ce qui est permis, vu que les espaces fonctionnels précédents ne dépendent que de la structure conforme de S), on est ramené au lemme local suivant :

Lemme III.2.4 (Lemme de Weyl). — *Soit \mathbb{D} le disque unité muni de sa métrique euclidienne $dx^2 + dy^2$. Toute 1-forme sur \mathbb{D} mesurable, de carré intégrable et orthogonale aux formes exactes et co-exactes à support compact est harmonique.*

Démonstration. — Soit ω une 1-forme sur \mathbb{D} intégrable et orthogonale aux formes exactes et co-exactes à supports compacts. Commençons par

remarquer que si ω est lisse, alors ω est harmonique. Il s'agit de montrer que ω est fermée et co-fermée. Puisque $*\omega$ a les mêmes propriétés que ω , il suffit par exemple de montrer que $*\omega$ est fermée. Mais ω est orthogonale aux formes fermées à support compact; donc, d'après les formules (III.14, page 130), la forme $d(*\omega)$ est orthogonale à toutes les fonctions à support compact. Cette forme est donc nulle.

L'idée est alors de régulariser ω par convolution. On remarque que si le noyau de convolution est choisi invariant par rotation, la forme ω est égale à sa convolée. Cela provient de la formule de la moyenne qui assure que la valeur d'une fonction harmonique en un point est égale à sa moyenne sur tout cercle centré en ce point. Ainsi, on montre que ω est égale à sa convolée et donc est lisse.

Formellement, pour tout $\rho \in]0, 1[$, notons D_ρ le disque fermé de centre 0 et de rayon ρ , et introduisons un *noyau régularisant* $(K_\rho)_{\rho \in]0, 1[}$ tel que, pour tout $\rho \in]0, 1[$:

1. K_ρ est une fonction positive lisse définie sur \mathbb{D} , de support D_ρ , et d'intégrale égale à 1 ;
2. $K_\rho(x, y)$ ne dépend que de $x^2 + y^2$.

Pour toute fonction intégrable $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $\rho \in]0, 1[$, on considère la fonction $M_\rho f$ définie par

$$M_\rho f(x, y) = \int_{\mathbb{D}} K_\rho(x' - x, y' - y) f(x', y') dx' dy'.$$

De même, pour toute 1-forme $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy$ sur \mathbb{D} et tout $\rho \in]0, 1[$, on considère la 1-forme $M_\rho \omega$ définie par

$$M_\rho \omega = (M_\rho \omega_x) dx + (M_\rho \omega_y) dy.$$

On a alors les propriétés suivantes :

- (i) Pour toute fonction intégrable f , la fonction $M_\rho f$ est définie et lisse sur $D_{1-\rho}$.
- (ii) Pour toute fonction intégrable f , on a $M_\rho df = d(M_\rho f)$ sur $D_{1-\rho}$.
De même, pour toute 1-forme ω , on a $M_\rho(*\omega) = *(M_\rho \omega)$ sur $D_{1-\rho}$.
- (iii) Pour tout couple de fonctions f_1 et f_2 avec f_1 à support dans $D_{1-\rho}$, on a $\langle M_\rho f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, M_\rho f_2 \rangle$.
- (iv) Pour toute fonction intégrable f , et tous $\rho, \rho' \in]0, 1[$, on a $M_\rho M_{\rho'} f = M_{\rho'} M_\rho f$ sur $D_{1-\rho-\rho'}$.

(v) Pour tout $0 < r < 1$, les fonctions $M_\rho f$ convergent vers f dans $L^2(D_r)$ lorsque ρ tend vers 0.

(vi) Si u est une fonction harmonique sur \mathbb{D} alors $M_\rho u = u$ sur $D_{1-\rho}$.

Le dernier point, crucial, provient de la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques et du choix de K_ρ invariant par rotation.

Les propriétés (ii) et (iii) montrent que si ω est orthogonale à toutes les formes lisses exactes et co-exactes à support compact, alors $M_\rho \omega$ est orthogonale à toutes les formes exactes et co-exactes dont le support est contenu dans $D_{1-\rho}$. Mais comme $M_\rho \omega$ est lisse sur $D_{1-\rho}$ d'après la propriété (i), on a vu que cela implique qu'elle est en fait harmonique dans $D_{1-\rho}$.

Pour conclure, il nous reste à démontrer que $M_\rho \omega$ est presque partout égale à ω sur $D_{1-\rho}$. Observons pour cela que les propriétés (ii) et (vi) montrent que, pour tous ρ, ρ' avec $0 < \rho, \rho' < 1$, on a

$$M_{\rho'} M_\rho \omega = M_{\rho'}(d u) = d(M_{\rho'} u) = d u = M_\rho \omega$$

sur la boule $D_{1-\rho-\rho'}$, où u est le potentiel de $M_\rho \omega$. D'après (v), on en déduit

$$M_\rho \omega = M_{\rho'} M_\rho \omega = M_\rho M_{\rho'} \omega = M_{\rho'} \omega,$$

sur la boule $D_{1-\rho-\rho'}$. Alors pour tout $0 < r < 1$, la famille $M_\rho \omega$ est constante pour $0 < \rho < 1 - r$ et tend vers ω dans $\Omega_{L^2}^1(B(0, r))$ lorsque ρ tend vers 0.

On a donc montré que ω est presque partout égale à une forme harmonique lisse. Le lemme est démontré. \square

Pour conclure la preuve du théorème III.2.1, nous aurons besoin d'un second lemme local.

Lemme III.2.5. — Soit \mathbb{D} le disque unité muni de sa métrique euclidienne $dx^2 + dy^2$. Soit ω une 1-forme lisse sur \mathbb{D} . Alors il existe des fonctions lisses F et G définies sur le disque telles que

$$\omega = dF + *dG.$$

Remarque III.2.6. — Ce lemme semble indiquer que, dans l'énoncé du théorème III.2.1, la forme harmonique ω_h est toujours nulle. Ce n'est bien sûr pas le cas : le lemme III.2.5 est un résultat local spécifique au disque.

Démonstration. — Si ω est fermée, elle est exacte sur \mathbb{D} . On cherche donc la fonction G telle que $\omega - *dG$ soit fermée. On mesure le défaut de fermeture de ω en posant $d\omega = \varphi dx \wedge dy$. Quitte à étendre ω en une forme lisse sur \mathbb{R}^2 , on suppose que φ est définie sur le plan.

Alors, d'après la formule (III.14, page 130), on a

$$d(\omega - *dG) = (\varphi - \Delta G)dx \wedge dy.$$

Il nous reste donc à résoudre l'équation $\Delta G = \varphi$ sur \mathbb{D} . Si φ est la masse de Dirac en 0, alors la fonction de Green $G_0(re^{i\theta}) = -\log(r)$ convient. Pour traiter le cas général, il suffit, par linéarité, de convoler φ par G_0 . On vérifie ainsi que la fonction suivante convient :

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \log \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \varphi(x', y') dx' dy'.$$

□

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration du théorème III.2.1. Considérons une 1-forme lisse ω sur S et écrivons la décomposition

$$\omega = \omega_h + a + b,$$

où ω_h est harmonique, a appartient à E et b appartient à E^* . Nous prouvons d'abord que a et b sont des formes lisses. Il suffit bien sûr de le vérifier localement. On considère donc un disque D dans S , suffisamment petit pour supporter des coordonnées conformes (x, y) . D'après le lemme III.2.5, il existe des fonctions lisses F et G telles que

$$\omega_h + a - dF = *dG - b.$$

Le membre de gauche est orthogonal aux formes co-exactes à support compact dans D , tandis que celui de droite est orthogonal aux formes exactes à support compact dans D . Cette forme différentielle est donc harmonique et lisse d'après le lemme III.2.4 de Weyl. Ceci force la régularité des formes a et b .

Pour conclure, il faut en déduire que a et b sont exactes. On montre, par exemple en utilisant le théorème d'Ascoli, que toute forme lisse qui est une limite dans la topologie L^2 de formes exactes lisses est exacte. Le théorème est démontré. □

III.2.2. Dépendance continue des modules en la métrique

On considère toujours ici des surfaces de Riemann compactes S munies d'une métrique riemannienne compatible h . On a vu en II.3.1 que Riemann a défini, pour $g > 1$, des paramètres complexes locaux, ou *modules*, pour ce qu'on appelle maintenant « l'espace des modules » \mathcal{M}_g des courbes complexes de genre g . On s'intéresse ici à ceux de la deuxième sorte, qui sont des « périodes » d'une 1-forme holomorphe ω sur S ⁽³⁾.

L'introduction d'une métrique riemannienne permet de se poser, sur ces modules, des questions de continuité. L'espace $\text{Mét}(S)$ des métriques riemanniennes sur S est en effet naturellement muni d'une topologie⁽⁴⁾. Chacune de ces métriques h définit, comme on l'a vu, une structure de surface de Riemann notée $S^{\mathbb{C}}(h)$. On peut donc se demander comment varient ces modules. Plus précisément, le but de cette section est de montrer que l'application

$$\begin{aligned} \text{Mét}(S) &\rightarrow \mathcal{M}_g \\ h &\mapsto S^{\mathbb{C}}(h) \end{aligned}$$

est continue pour la topologie « définie » par Riemann sur l'espace \mathcal{M}_g des (classes d'isomorphisme de) surfaces de Riemann de genre g .

Nous exposons ici brièvement les idées qui permettent de montrer que cette application est effectivement continue. À chaque métrique riemannienne h , on peut associer un sous-espace de dimension $2g$ de l'espace des 1-formes différentielles réelles : l'espace de formes harmoniques $\text{Harm}_h^1(S, \mathbb{R})$. On voit cet espace comme le noyau du laplacien $\Delta_h = dd^* + d^*d$ ⁽⁵⁾ associé à h . Cet opérateur varie continûment avec h et est un opérateur elliptique. La théorie de Fredholm permet alors de prouver le théorème suivant (voir [Hod1941]) :

Théorème III.2.7 (Hodge). — *Soit (S, h) une surface riemannienne (compacte, orientée, sans bord) de genre g . Alors dans l'espace $\Omega^1(S, \mathbb{R})$ des 1-formes C^∞ sur S , le sous-espace $\text{Harm}_h^1(S, \mathbb{R})$ des formes harmoniques (i.e. fermées et co-fermées) est de dimension finie $2g$ et varie continûment avec la métrique h .*

3. Rappelons que pour cela on a marqué S par une base de l'homologie.

4. La topologie compacte-ouverte.

5. d^* est l'adjoint de d pour le produit scalaire L^2 défini page 130 et étendu à toutes les formes.

Pour montrer que $S^{\mathbb{C}}(h)$ dépend continûment de h , on commence par remarquer que l'étoile de Hodge $*_h$ définit une structure complexe sur $\text{Harm}_h^1(S, \mathbb{R})$ puisque $*_h^2 = -\text{Id}$ en ce degré. De plus, l'étoile de Hodge commute au laplacien. Ainsi le sous-espace propre des formes *holomorphes*

$$H^{1,0}(h) = \ker *_h + i \text{Id} \subset \text{Harm}_h^1(S, \mathbb{C})$$

varie lui aussi continûment avec h .

Fixons une base $(A_i, B_i)_{1 \leq i \leq g}$ de l'homologie $H^1(S)$. Les formes ω_i , définies par

$$\int_{A_j} \omega_k(h) = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq g,$$

sont l'intersection de l'espace des formes holomorphes avec des hyperplans affines. Elles varient donc continûment avec h .

En particulier les périodes $\int_{B_j} \omega_k(h) = \Pi_{jk}(h)$ sont continues, ainsi que les zéros $P_i(h)$ des $\omega_j(h)$, ou de leurs combinaisons linéaires $\omega(h)$ (à coefficients constants), et donc également les intégrales $\int_{P_1(h)}^{P_i(h)} \omega(h)$ entre deux tels zéros.

Noter que l'on sait aujourd'hui (c'est le théorème de Torelli) que les Π_{jk} déterminent la courbe complexe.

Le travail de Schwarz

Nous présentons dans ce chapitre les travaux d'Hermann Schwarz. Il se chargea, autour de 1870, de démontrer le théorème de représentation conforme de Riemann dans des cas particuliers et de trouver des expressions pour les uniformisantes.

Dans l'introduction de l'article [Schw1869], Schwarz raconte qu'au cours de l'hiver 1863–1864, alors qu'il suivait le cours de Weierstrass sur la théorie des fonctions analytiques, Franz Mertens lui fit remarquer qu'il était singulier que, bien que l'existence d'une application biholomorphe entre le disque et, par exemple, un triangle, soit « établie » par l'énoncé de Riemann, la détermination explicite d'une telle application n'était pas du tout claire. C'est d'abord à ce problème d'uniformisation explicite de certains domaines simplement connexes du plan que Schwarz s'attelle dans [Schw1869]. Nous allons voir qu'il y parvient dans une large mesure : il obtient une expression nécessaire pour le biholomorphisme recherché. Cette expression dépend néanmoins de constantes, les *paramètres accessoires*, que Schwarz ne sait déterminer que dans le cas d'un « triangle » bordé par des arcs de cercles. La méthode de Schwarz – qui établit un premier lien entre la *dérivée schwarzienne* et le problème de l'uniformisation – est l'ancêtre directe de l'approche de Poincaré *via* les équations différentielles. Réalisant cela, suite à la publication des travaux de Poincaré, Schwarz annotera son article dans ses œuvres complètes, voir chapitre IX.

L'intérêt que représente l'existence de biholomorphismes du disque dans certains domaines du plan est renforcé à l'époque par les objections de Weierstrass sur la preuve de Riemann. Dans son second article [Schw1870a] Schwarz – abandonnant la recherche de formules explicites – donne une preuve alternative du théorème de représentation conforme pour les domaines compacts à bord analytique. La méthode employée par Schwarz est constructive et procède par approximations successives. C'est une étape décisive vers le théorème d'uniformisation ; elle sera reprise et développée par Poincaré et appelée « méthode de balayage ». Nous discuterons en détails les résultats de Schwarz et leur portée dans le chapitre XI. Nous nous contentons ici de décrire la méthode dans un cas simple qui conduit néanmoins au premier résultat dans la direction de l'uniformisation des surfaces compactes abstraites puisque Schwarz démontre ainsi l'unicité de la structure conforme sur la sphère. Renversant l'ordre chronologique nous commençons d'ailleurs par ce dernier résultat.

IV.1. Structure conforme sur la sphère

Ce résultat est précisément le théorème suivant :

Théorème IV.1.1. — *Toute surface de Riemann compacte et simplement connexe est biholomorphe à la sphère de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$.*

Quelques remarques préliminaires. D'abord, Schwarz ne démontre pas ce théorème jusqu'au bout dans [Schw1870a] mais il n'hésite pas à l'énoncer (précisons qu'ici l'expression « surface d'un cercle » signifie disque et « surface d'une boule » signifie sphère) :

Dem von Riemann ausgesprochenen Satze, dass es stets möglich sei, einen einfach zusammenhängenden Bereich zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich auf die Fläche eines Kreises abzubilden, kann der folgende Satz zur Seite gestellt werden :

Es ist stets möglich, einen einfach zusammenhängenden und geschlossenen Bereich zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich auf die Fläche einer Kugel abzubilden und zwar nur auf eine Weise so, dass drei beliebig vorgeschriebenen Punkten jenes Bereiches drei ebenfalls vorgeschriebene Punkte der Kugeloberfläche entsprechen.

En voici une traduction approximative.

L'énoncé de Riemann affirmant que l'on peut représenter, de manière semblable en les parties infiniment petites, un domaine simplement connexe du plan sur la surface d'un cercle permet de prouver l'énoncé suivant :

Il est possible de représenter, de manière semblable en les plus petites parties, un domaine simplement connexe et fermé sur la surface d'une boule ; et cela d'une unique façon pour que trois points prescrits du domaine correspondent à trois points prescrits de la surface de la boule.

Il ne présente cependant une preuve convaincante que dans le cas des surfaces polyédrales qui, à strictement parler, ne rentre pas dans le cadre du théorème puisqu'il ne s'agit pas de surfaces lisses. Schwarz démontre en effet que tout polyèdre simplement connexe fini peut s'envoyer homéomorphiquement sur la sphère de Riemann de manière conforme en restriction aux faces. Mais, en 1881, dans la note [Kle1881], Klein mentionne l'unicité de la structure conforme pour les surfaces de genre 0 et l'attribue à Schwarz.

Par ailleurs, la classification *topologique* des surfaces compactes était considérée comme acquise en 1860 (même s'il faudra attendre encore longtemps pour qu'elle soit complètement rigoureuse, voir l'encadré en introduction de la partie C) si bien qu'on « savait » qu'une surface compacte simplement connexe est homéomorphe à la sphère de dimension 2. Il était tout aussi « clair » que la sphère possède des *recouvrements arbitrairement fins* par des ouverts U_1, U_2, \dots, U_n de telle sorte que chaque U_i est biholomorphiquement isomorphe au disque unité et que l'intersection de U_i avec $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{i-1}$ est homéomorphe à un disque pour i allant de 1 à $n - 1$ et homéomorphe à un anneau pour $i = n$. L'idée de la preuve du théorème est donc de montrer par récurrence que chaque union $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_i$ est biholomorphiquement isomorphe au disque unité dans \mathbb{C} pour $i = 1, \dots, n - 1$ et biholomorphiquement isomorphe à la sphère de Riemann pour la dernière étape $i = n$.

Tout se réduit donc à prouver les résultats fondamentaux suivants (qui, eux, sont effectivement démontrés par Schwarz). Dans ce qui suit, nous dirons qu'un ouvert U d'une surface de Riemann est *uniformisable jusqu'au bord* par le disque unité, s'il existe un biholomorphisme de U sur le disque \mathbb{D} , qui s'étend en un homéomorphisme du bord de U sur le cercle unité.

Théorème IV.1.2. — Soit S une surface de Riemann et soient U, V deux ouverts de S uniformisables jusqu'au bord par le disque unité. Si l'intersection $U \cap V$ est homéomorphe à un disque (resp. homéomorphe à un anneau), alors la réunion $U \cup V$ est uniformisable jusqu'au bord par le disque unité (resp. la surface S est biholomorphiquement isomorphe à la sphère de Riemann).

Notons qu'en l'absence d'une preuve rigoureuse du théorème de représentation conforme de Riemann (ce qui est la situation à l'époque où Schwarz écrit son article), l'existence de « bons » recouvrements tels que ceux décrits ci-dessus n'est pas évidente. Nous contournerons cet écueil, en restant fidèles à l'esprit de Schwarz, dans la partie C. Le corollaire XI.1.6 permet notamment de montrer que toute surface de Riemann compacte simplement connexe s'obtient comme la réunion de deux ouverts uniformisables jusqu'au bord par le disque et s'intersectant selon un anneau. La démonstration ci-dessous fournit alors une preuve complète du théorème IV.1.1.

La méthode employée par Schwarz est appelée « méthode alternante » (c'est le terme qu'il utilise dans [Schw1870b]). Elle procède par approximations successives. On renvoie à [Cho2007, p. 123 et suivantes] pour une autre présentation de cette méthode, et celle – très proche – de Neumann [Neum1884]. Schwarz puis Poincaré et Koebe pousseront beaucoup plus loin cette stratégie (voir la partie C). Cela conduira d'ailleurs à une preuve complète du théorème d'uniformisation. Nous ne présentons ici que le cas (un peu plus difficile) dans lequel l'intersection des ouverts U et V est un anneau.

Démonstration. — Nous voulons construire une fonction f méromorphe sur S qui possède un unique pôle d'ordre 1 sur S . Nous allons en réalité construire une fonction harmonique u qui sera sa partie réelle sur S privée du pôle.

Fixons donc deux points n et s (pôle nord et pôle sud) respectivement dans U et V . Par hypothèse, on dispose de deux représentations conformes $\varphi_n : U \rightarrow \mathbb{D}$ et $\varphi_s : V \rightarrow \mathbb{D}$, qui s'étendent en des homéomorphismes de ∂U et ∂V sur le cercle unité, et telles que l'image de n et de s soit le point 0. Quitte à restreindre V , on peut supposer que l'image

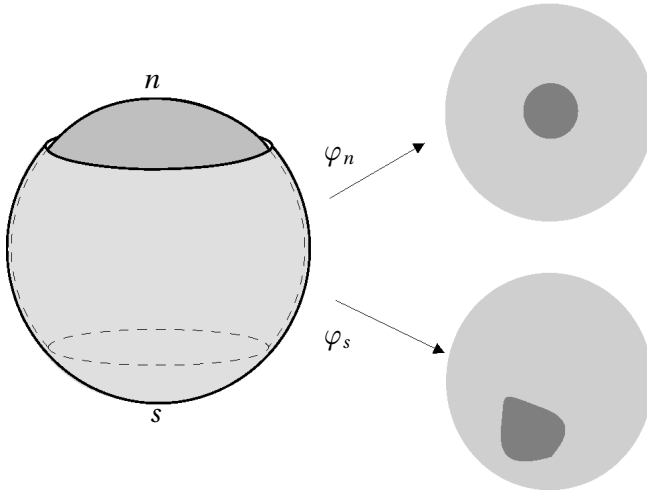


FIGURE IV.1. La sphère de Riemann et les cartes de Schwarz

par φ_n de la frontière de V est le cercle de centre 0 de rayon $\frac{1}{4}$. Nous raisonnerons principalement dans le disque U . La figure IV.1 résume toutes ces notations.

Ces deux représentations φ_n et φ_s nous permettent de résoudre le problème de Dirichlet pour toute condition au bord continue sur les disques U et V . En effet, comme nous l'avons déjà vu, il suffit de transporter *via* les représentations le problème sur le disque unité. Rappelons (voir section II.2) que pour résoudre le problème de Dirichlet sur le disque unité avec une condition continue au bord \underline{u} , nous disposons de la formule de Poisson qui nous assure que la fonction suivante est harmonique sur le disque et se prolonge continûment par \underline{u} au bord (on note $z = re^{i\theta}$) :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underline{u}(e^{it}) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-t) + r^2} dt.$$

Cette formule (variante de la formule (II.4, page 80)) permet de disposer d'une majoration du module de u quand la moyenne de \underline{u} est nulle sur le cercle unité. La valeur de u à l'origine est évidemment nulle et nous allons montrer que sa valeur dans un disque de rayon $1/4$ est uniformément contrôlée par la borne supérieure du module de u . Plus précisément, on a :

Lemme IV.1.3. — Soit \underline{u} une fonction continue de moyenne nulle sur le cercle unité et soit u son extension harmonique sur le disque unité. Alors pour tout point z du disque de module inférieur à $\frac{1}{4}$, on a $|u(z)| \leq \frac{2}{3} \|u\|_{\mathbb{D}}$ (où $\|u\|_{\mathbb{D}} = \max_{z \in \mathbb{D}} |u(z)|$).

Démonstration. — Cette majoration se prouve par un simple calcul à partir de la formule de Poisson. En effet, pour tout θ , on a

$$\begin{aligned} 2\pi u(re^{i\theta}) &= \int_0^{2\pi} \underline{u}(e^{it}) \frac{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2 + 2r \cos(\theta - t) - 2r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underline{u}(e^{it}) dt + \int_0^{2\pi} \underline{u}(e^{it}) \frac{2r \cos(\theta - t) - 2r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} dt \\ &= 2r \int_0^{2\pi} \underline{u}(e^{it}) \frac{\cos(\theta - t) - r}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} dt. \end{aligned}$$

Une étude rapide de la fonction $a \mapsto \frac{a-r}{1-2ar+r^2}$ sur $[-1, 1]$ montre que le module $|u(re^{i\theta})|$ est majoré par $\frac{2r}{1-r} \|u\|_{\mathbb{D}}$. Notamment, quand $r < \frac{1}{4}$, le module $|u(re^{i\theta})|$ est majoré par $\frac{2}{3} \|u\|_{\mathbb{D}}$. \square

Revenons à notre problème : il n'y a aucune restriction à chercher la fonction f avec un pôle en n . Pour z tel que $\varphi_n(z) = re^{i\theta}$, on pose $u_{-1}(z) = \frac{1}{r} \cos(\theta)$. Soit u'_{-1} la fonction harmonique sur le disque U vérifiant la condition au bord : $(u'_{-1})|_{\partial U} = (u_{-1})|_{\partial U}$. On pose maintenant $u_0 = u_{-1} - u'_{-1}$. La fonction u_0 est donc nulle sur le cercle ∂U .

Commençons notre procédé d'approximations successives, en construisant par récurrence deux suites de fonctions u_k et v_k satisfaisant :

- u_0 est la fonction définie ci-dessus ;
- pour tout $k \geq 0$, la fonction v_k est la fonction harmonique sur le disque V vérifiant la condition au bord : $(v_k)|_{\partial V} = (u_k)|_{\partial V}$;
- pour tout $k \geq 1$, la fonction u_k est la fonction harmonique sur le disque U vérifiant la condition au bord : $(u_k)|_{\partial U} = (v_{k-1})|_{\partial U}$.

Nous voulons maintenant majorer ces deux suites, de manière à pouvoir sommer les séries. Pour cela, on remarque tout d'abord que le principe du maximum permet d'obtenir les deux majorations :

- pour tout $k \geq 1$, le module de v_k est majoré par son maximum sur le cercle ∂V , donc par le maximum de $|u_k|$ sur le cercle ∂V . Finalement, on obtient que $|v_k|$ est majorée par le maximum de $|u_k|$;
- de même, pour tout $k \geq 1$, $|u_k|$ est majorée par le maximum de $|v_{k-1}|$.

Les suites $\|u_k\|_{\overline{U}}$ et $\|v_k\|_{\overline{V}}$ sont donc décroissantes. Cela ne suffit pas pour sommer les séries. Nous allons utiliser le lemme IV.1.3 pour montrer que pour tout $k \geq 1$, la fonction $|v_k|$ est majorée par $\frac{2}{3}\|u_k\|_{\overline{U}}$. Il nous faut pour cela garantir que la moyenne des fonctions $u_k \circ \varphi_n^{-1}$ sur le cercle unité est nulle :

Lemme IV.1.4. — *Les moyennes de toutes les fonctions $u_k \circ \varphi_n^{-1}$ et $v_k \circ \varphi_n^{-1}$ sur les cercles de rayon 1 et $\frac{1}{4}$ sont nulles.*

Démonstration. — Notons A l'anneau compris entre les cercles de rayons $\frac{1}{4}$ et 1. Remarquons que, pour une fonction holomorphe sur l'anneau A , ses intégrales sur les cercles frontières sont les mêmes par la formule des résidus. De plus une fonction harmonique sur un domaine simplement connexe est partie réelle d'une fonction holomorphe. En considérant respectivement U et V , nos fonctions u_k (pour $k \geq 1$) et v_k (pour $k \geq 0$) sont parties réelles de fonctions holomorphes sur $\varphi_n^{-1}(A)$. C'est également le cas pour u_0 , par construction. Ainsi, les moyennes des fonctions $u_k \circ \varphi_n^{-1}$ et $v_k \circ \varphi_n^{-1}$ sur les deux cercles frontières sont les mêmes.

La fonction $u_0 \circ \varphi_n^{-1}$ est de moyenne nulle sur le cercle unité. Donc elle est aussi de moyenne nulle sur le cercle de rayon $\frac{1}{4}$. Puisque d'une part $u_k \circ \varphi_n^{-1}$ et $v_k \circ \varphi_n^{-1}$ coïncident sur le cercle de rayon $\frac{1}{4}$ et d'autre part $u_{k+1} \circ \varphi_n^{-1}$ et $v_k \circ \varphi_n^{-1}$ coïncident sur le cercle de rayon 1, la propriété se propage par récurrence. On obtient ainsi que pour tout entier k , les fonctions $u_k \circ \varphi_n^{-1}$ et $v_k \circ \varphi_n^{-1}$ sont de moyenne nulle sur les cercles de rayons $\frac{1}{4}$ et 1. \square

Maintenant, le lemme IV.1.3 nous assure que, pour tout entier $k \geq 1$, la fonction $u_k \circ \varphi_n^{-1}$ est majorée sur le cercle de rayon $\frac{1}{4}$ par $\frac{2}{3}\|u_k \circ \varphi_n^{-1}\|_{\overline{U}}$. En d'autres termes, la fonction u_k est majorée sur le cercle ∂V par $\frac{2}{3}\|u_k\|_{\overline{U}}$. Or, v_k est définie comme la fonction résolvant le problème de Dirichlet sur V avec la condition au bord donnée par la restriction de u_k à ∂V . Donc, on applique à nouveau le principe du maximum pour obtenir que la fonction $|v_k|$ est majorée sur \overline{V} par $\frac{2}{3}\|u_k\|_{\overline{U}}$.

Ainsi, on obtient par récurrence les majorations suivantes, pour tout $k \geq 1$:

$$\|u_{k+1}\|_{\overline{U}} \leq \|v_k\|_{\overline{V}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \|u_1\|_{\overline{U}}.$$

Nous sommes en mesure de conclure : les deux séries de terme général $(u_k)_{k \geq 1}$ et $(v_k)_{k \geq 1}$ sont uniformément majorées en module par des séries géométriques de raison $\frac{2}{3}$, donc convergent vers respectivement une fonction u' , définie, continue sur \overline{U} et harmonique sur U , et une fonction v' , définie, continue sur \overline{V} et harmonique sur V . Posons alors $u = u' + u_0$ et $v = v' + v_0$. Par construction, les fonctions u et v coïncident sur les cercles ∂U et ∂V . La fonction $u - v$ est donc une fonction harmonique sur l'intérieur de $U \cap V$ et nulle sur la frontière. Elle est nulle par le principe du maximum, ce qui veut dire que $u = v$ sur tout l'anneau. La fonction définie sur S comme étant égale à u sur $U \setminus \{n\}$ et v sur V est alors bien définie et harmonique sur tout $S \setminus \{n\}$. Elle est donc partie réelle d'une fonction méromorphe qui admet un unique pôle en n , d'ordre 1 car $u_0 \circ \varphi_n^{-1} = \operatorname{Re}(\frac{1}{z})$. On a bien construit la fonction cherchée.

Enfin, si l'on fixe l'image de trois points distincts, une telle fonction est unique, car la seule bijection conforme de la sphère de Riemann dans elle-même fixant trois points quelconques est l'identité. Ceci termine la preuve du théorème. \square

IV.2. Problèmes explicites de représentation conforme

Une autre direction du travail de Schwarz est la détermination explicite de certaines représentations conformes. Le point de départ de l'article [Schw1869] est le *principe de symétrie* qui porte désormais son nom :

Théorème IV.2.1 (Principe de symétrie). — *Soit U un ouvert du demi-plan supérieur \mathbb{H} , dont l'adhérence intersecte l'axe réel sur un intervalle I . Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction holomorphe sur U . On suppose que f se prolonge par continuité sur l'union $U \cup I$ et que I est envoyé dans un cercle \mathcal{C} . Si l'on note U' le symétrique de U par rapport à l'axe réel et σ l'inversion de Möbius relativement au cercle \mathcal{C} , alors on peut étendre f en une fonction holomorphe sur $U \cup I \cup U'$ par la formule : $f(\bar{z}) = \sigma \circ f(z)$.*

À l'aide de ce principe, Schwarz arrive à donner la forme des uniformisantes des domaines d'abord polygonaux, puis à côtés circulaires. Il ne peut pas conclure directement l'existence de cette uniformisante – sauf dans le cas des triangles – car il reste des paramètres « accessoires » à déterminer. Nous expliquons ici son travail.

IV.2.1. Uniformisation des domaines polygonaux à côtés rectilignes

On se donne P un domaine polygonal simplement connexe dans le plan⁽¹⁾. La frontière de P est constituée d'un nombre fini de segments, se coupant en les sommets w_1, \dots, w_n . L'angle intérieur en w_i est de $\lambda_i\pi$, $0 < \lambda_i < 2$ (avec $\lambda_i \neq 1$ pour des sommets non plats). Le fait que le polygone soit simplement connexe impose alors que $\sum(1 - \lambda_i) = 2$. Le problème que se pose Schwarz est de trouver un biholomorphisme s de \mathbb{H} sur l'intérieur du domaine P , s'étendant en un homéomorphisme au bord (ici, on parle du bord de \mathbb{H} dans la sphère de Riemann ; ce bord est donc un cercle).

Pour commencer, on considère le problème local suivant. Supposons que a soit un point de l'axe réel et qu'une fonction s envoie le demi-disque $V = \{z = a + re^{i\varphi} \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 < r < r_0\}$ dans un secteur angulaire $S = \{z = re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \lambda\pi, 0 < r < r_0\}$, où $0 < \lambda < 2$. On suppose que s est un homéomorphisme de V sur son image et que s est holomorphe sur $V \cap \mathbb{H}$. On suppose enfin que l'intersection de V avec l'axe réel est envoyée dans la réunion des deux demi-droites délimitant S .

On peut alors considérer l'application $s(z - a)^{\frac{1}{\lambda}}$. Elle est définie et continue sur l'intersection de $\overline{\mathbb{H}}$, l'adhérence de \mathbb{H} , avec un petit disque $D(a, \varepsilon)$ centré en a ; de plus, elle est holomorphe sur $D(a, \varepsilon) \cap \mathbb{H}$ et prend des valeurs réelles pour des valeurs réelles de son argument. Schwarz applique alors son principe de symétrie, pour montrer que $s(z)^{\frac{1}{\lambda}}$ s'étend en une fonction holomorphe sur $D(a, \varepsilon)$. On peut donc écrire, au voisinage de a :

$$s(z) = (z - a)^\lambda H(z). \tag{IV.1}$$

Ici, $z \mapsto H(z)$ est holomorphe sur un voisinage de a , et ne s'annule pas en a (dans le cas contraire, on aurait une contradiction avec l'injectivité de s). De plus, comme $H(z)$ prend des valeurs réelles lorsque son argument est réel, les coefficients du développement en série entière de H en puissances de $(z - a)$ sont eux-mêmes réels.

Lorsque le point a est le point à l'infini, l'analyse précédente, appliquée à la fonction $s'(z) = s\left(-\frac{1}{z}\right)$ donne

1. Dans [Schw1869], Schwarz commence par considérer le problème d'un carré, mais son approche est complètement générale.

$$s(z) = z^{-\lambda} H\left(\frac{1}{z}\right) \quad (\text{IV.2})$$

où H est une fonction holomorphe au voisinage de 0, dont le développement en série entière au voisinage de 0 admet des coefficients réels.

Revenons à notre problème initial, et supposons qu'il existe un homéomorphisme $s : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow P$, tel que s soit holomorphe sur \mathbb{H} . Pour déterminer s , on va montrer qu'il satisfait une équation différentielle naturelle. On remarque que notre problème est invariant par action (au but) du groupe affine. On appelle a_1, \dots, a_n les antécédents de w_1, \dots, w_n par s . Quitte à composer à la source par une homographie, on suppose que a_n est le point à l'infini.

On cherche donc une quantité qui soit invariante par le groupe affine. La fonction $z \mapsto \frac{d}{dz} \log \frac{ds}{dz}(z)$ convient : elle est holomorphe sur \mathbb{H} et invariante par une transformation affine sur s . Le principe de symétrie accompagné de l'étude locale menée précédemment permet de montrer le lemme suivant :

Lemme IV.2.2. — Soit $s : \mathbb{H} \rightarrow P$ une uniformisante qui s'étend en un homéomorphisme au bord. Alors on a

$$\frac{d}{dz} \log \frac{ds}{dz}(z) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i - 1}{z - a_i}.$$

Démonstration. — Pour tout segment $]a_i, a_{i+1}[$, on peut appliquer le principe de symétrie et étendre s en une fonction holomorphe s_i sur

$$\mathbb{H} \cup]a_i, a_{i+1}[\cup \mathbb{H}^-$$

où \mathbb{H}^- désigne le demi-plan inférieur. Cette extension vérifie la relation $s_i(\bar{z}) = h_i \circ s_i(z)$ où h_i désigne la symétrie par rapport à la droite (w_i, w_{i+1}) . En particulier, s_i est injective, et par conséquent, sa dérivée ne s'annule pas. On en déduit que la fonction $z \mapsto \frac{d}{dz} \log \frac{ds}{dz}(z)$ s'étend par continuité à $\overline{\mathbb{H}}$ privé des points a_1, \dots, a_n .

Comme s envoie chaque segment $]a_i, a_{i+1}[$ sur le segment $]w_i, w_{i+1}[$, on peut trouver deux complexes A_i et B_i de sorte que $s' = A_i s + B_i$ envoie $]a_i, a_{i+1}[$ sur un intervalle ouvert de l'axe réel. Par invariance affine, on conclut donc que $\frac{d}{dz} \log \frac{ds'}{dz} = \frac{d}{dz} \log \frac{ds}{dz}$ prend des valeurs réelles sur $]a_i, a_{i+1}[$, et ceci pour tout $i = 1, \dots, n$. L'étude locale en les points a_i va maintenant nous permettre d'identifier la fonction $\frac{d}{dz} \log \frac{ds}{dz}(z)$.

En effet, la formule (IV.1), pour $i = 1, \dots, n - 1$, conduit à l'expression

$$\frac{d}{dz} \log \frac{ds}{dz}(z) = \frac{\lambda_i - 1}{z - a_i} + d_1 + d_2(z - a_i) + d_3(z - a_i)^2 + \dots \quad (\text{IV.3})$$

où les coefficients d_j sont réels. On obtient que l'application

$$z \mapsto \frac{d}{dz} \log \frac{ds}{dz}(z) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i - 1}{z - a_i}$$

est holomorphe sur \mathbb{H} , et se prolonge en une application continue sur $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{\infty\}$. Elle prend de plus des valeurs réelles pour des valeurs réelles de son argument. On veut montrer que cette différence est nulle.

Pour cela, on peut appliquer à nouveau le principe de symétrie et prolonger cette fonction en une fonction entière. Maintenant, au voisinage du point à l'infini, la formule (IV.2) donne $s(z) = w_n + (z)^{-\lambda_n} H(\frac{1}{z})$ et on vérifie qu'alors

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d}{dz} \log \frac{ds}{dz}(z) = 0.$$

La fonction entière $\frac{d}{dz} \log \frac{ds}{dz}(z) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i - 1}{z - a_i}$ tend vers 0 à l'infini, donc elle est nulle. □

Il n'y a plus qu'à intégrer deux fois pour obtenir :

Proposition IV.2.3 (Formule de Schwarz-Christoffel)

Soit P un domaine polygonal simplement connexe de sommets w_1, \dots, w_n et d'angles intérieurs $\lambda_1\pi, \dots, \lambda_n\pi$. Soit $s : \mathbb{H} \rightarrow P$ une uniformisante qui s'étend en un homéomorphisme au bord et qui envoie l'infini sur w_n . Alors il existe $n - 1$ nombres réels a_1, \dots, a_{n-1} tels que

$$s(z) = C \int_{z_0}^z \frac{dw}{(w - a_1)^{1-\lambda_1} \dots (w - a_{n-1})^{1-\lambda_{n-1}}}. \quad (\text{IV.4})$$

Cette expression s'appelle la *formule de Schwarz-Christoffel*. Ces formules ont en effet été introduites indépendamment par Christoffel [Chr1867]⁽²⁾. Si l'on revient sur le raisonnement fait ci-dessus, on a montré que si une transformation s envoie biholomorphiquement le demi-plan supérieur sur le domaine P , de sorte que s s'étende au bord en un homéomorphisme, alors la composée de s par une homographie à la source est donnée par la formule (IV.4), pour un choix judicieux de constantes réelles a_1, \dots, a_{n-1} . Maintenant, on sait, justement par

2. Une référence classique sur la représentation conforme de domaines plans est [Neh1952], pour les aspects constructifs on pourra consulter [DrTr2002].

le théorème de Riemann, qu'une telle application s existe. Précisons que la démarche de Schwarz présente une cohérence interne puisque dans [Schw1870a] – avec les techniques discutées dans la section IV.1 et le chapitre XI – il montre le principe de Dirichlet pour les domaines polygonaux (et plus généralement pour les domaines polygonaux circulaires, nous y reviendrons), rendant ainsi rigoureuse la preuve de Riemann pour ce type de domaines. Cependant, lorsque le polygone P est fixé au départ, on ne sait pas en général déterminer les réels a_i correspondants.

Remarquons enfin que si l'on impose $0 < \lambda_i < 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et $\sum_{i=1}^n (1 - \lambda_i) = 2$, autrement dit si le domaine P est convexe, alors l'approche de Schwarz permet de redémontrer directement l'existence de la représentation conforme. En effet, pour un choix quelconque de $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1}$, la transformation $z \mapsto \int_{z_0}^z \frac{dw}{(w-a_1)^{1-\lambda_1} \dots (w-a_{n-1})^{1-\lambda_{n-1}}}$ envoie le bord de \mathbb{H} homéomorphiquement sur le bord d'un polygone P convexe à n côtés dont les angles intérieurs sont $\lambda_i \pi$, $i = 1, \dots, n$. Le principe du maximum nous permet alors d'affirmer que \mathbb{H} est envoyé conformément dans l'intérieur P du polygone. L'application $\mathbb{H} \rightarrow P$ ainsi définie est propre et conforme, donc biholomorphe.

IV.2.2. Uniformisation des domaines polygonaux à côtés circulaires

Schwarz aborde également le cas plus général d'un domaine polygonal P de sommets w_1, \dots, w_n dont les côtés $[w_i, w_{i+1}]$ sont des arcs de cercles ou des segments de droites. On suppose que l'on a numéroté les w_i de sorte que lorsque l'on parcourt $[w_i, w_{i+1}]$ en allant de w_i vers w_{i+1} , l'intérieur de P se situe sur la gauche. On suppose à nouveau que les angles intérieurs aux sommets w_i valent $\lambda_i \pi$, $0 < \lambda_i < 2$. Supposons qu'une application s envoie biholomorphiquement le demi-plan supérieur \mathbb{H} sur l'intérieur du polygone P et s'étende en un homéomorphisme au bord. Quitte à composer par une homographie à la source, on suppose cette fois que l'infini n'est pas envoyé sur un sommet de P et l'on note $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ les images réciproques de ces sommets par s .

On voit que le problème considéré ici est invariant par l'action du groupe des transformations de Möbius au but. Rappelons que ce groupe est constitué des transformations homographiques complexes $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$. Schwarz cherche donc une nouvelle expression différentielle sur s , invariante lorsque l'on applique une homographie complexe à s , et qui jouera le même rôle que celui joué

par $\frac{d}{dz} \log \frac{ds}{dz}$ dans le paragraphe précédent. Cela l'amène à considérer la *dérivée schwarzienne* :

$$\{s, z\} = \frac{d^2}{dz^2} \log \frac{ds}{dz} - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz} \log \frac{ds}{dz} \right)^2 .$$

Encadré IV.1 : La dérivée schwarzienne

Le *birapport* de quatre points x, y, z, t de la droite projective $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est défini par

$$[x, y, z, t] = \frac{(x - z)(y - t)}{(x - y)(z - t)} .$$

C'est un « invariant projectif », c'est-à-dire qu'il est invariant quand on soumet x, y, z, t à une même homographie.

La *dérivée schwarzienne* est un invariant projectif « local » qui mesure le « défaut de projectivité infinitésimal » d'un biholomorphisme local w de $\mathbb{C}P^1$. On peut le définir de nombreuses manières, par exemple en comparant les birapports des quatre points $x, y = x + \varepsilon, z = x + 2\varepsilon, t = x + 3\varepsilon$ et celui de leurs images par w (x dans le domaine de définition de w et ε petit). Un calcul élémentaire montre que

$$[w(x), w(y), w(z), w(t)] = [x, y, z, t] - 2\{w, x\}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

avec

$$\{w, x\} := \frac{d^2}{dx^2} \left(\log \frac{dw}{dx} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \left(\log \frac{dw}{dx} \right) \right)^2 .$$

Cela définit la dérivée schwarzienne $\{w, x\}$ et donne son interprétation intuitive : c'est une sorte de dérivée projectivement invariante. La dérivée schwarzienne a d'abord été introduite par Lagrange dans ses recherches [Lag1779] sur la construction de cartes géographiques (p. 652, sous la forme $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$ avec $\Phi = \frac{1}{\sqrt{F'(z)}}$, comme l'explique [OvTa2009]). Elle fut ensuite dénommée « dérivée schwarzienne » par Cayley qui ignorait les travaux de Lagrange.

L'équation différentielle du troisième ordre $\{w, x\} = 0$ admet comme solution générale les homographies. Par sa construction même, il est clair que la dérivée schwarzienne est invariante par

homographie, c'est-à-dire $\{h \circ w, x\} = \{w, x\}$ pour toute homographie h .

On calcule la dérivée schwarzienne d'une composition de deux biholomorphismes locaux quelconques par la relation

$$\{f \circ g, x\} = \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 \{f, x\} \circ g + \{g, x\}. \quad (\text{IV.5})$$

Le terme $\left(\frac{dg}{dx}\right)^2$ montre qu'il est avantageux d'interpréter la dérivée schwarzienne comme une différentielle quadratique $\{f, x\}dx^2$. Cela permet de présenter la formule précédente comme un « cocycle »

$$\{f \circ g, x\}dx^2 = g^*(\{f, x\}dx^2) + \{g, x\}dx^2.$$

Plus généralement, si U est un ouvert d'une surface de Riemann muni d'une coordonnée $x : U \rightarrow \mathbb{C}$, on peut encore définir la dérivée schwarzienne $\{w, x\}$ d'un biholomorphisme local $w : U \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Si y est une autre coordonnée sur U , on a la formule de transformation suivante :

$$\{w, x\}dx^2 = \{w, y\}dy^2 + \{y, x\}dx^2. \quad (\text{IV.6})$$

En particulier la différentielle quadratique $\{w, x\}dx^2$ est invariante par changement projectif de coordonnées, c'est-à-dire qui vérifie $\{y, x\} = 0$.

Soit $q(x)dx^2$ une différentielle quadratique holomorphe locale. L'équation différentielle du troisième ordre $\{f, x\} = q$ admet alors des solutions locales et deux d'entre elles diffèrent par une homographie (agissant au but).

Voici encore un point de vue sur la dérivée schwarzienne. Si f est un biholomorphisme local entre deux ouverts de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, on peut déterminer en chaque point x de son domaine de définition une unique homographie $m(x)$ de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ qui coïncide avec f à l'ordre deux en x . On obtient ainsi une courbe dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ (un « repère de Frenet » à la Darboux) dont la dérivée mesure encore une fois la déviation entre f et les homographies. La définition de cette dérivée est $m^{-1}dm$, vue comme un élément de l'algèbre de Lie de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ formée des matrices de trace nulle. Un calcul simple montre alors

que

$$m(x)^{-1} dm(x) = -\frac{\{f, x\}}{2} \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} dx.$$

Notons que pour les mêmes raisons la dérivée schwarzienne est également un outil fondamental pour la géométrie projective réelle, en relation avec l'étude des difféomorphismes du cercle : voir le livre [OvTa2005].

Le traitement du problème est alors très similaire à celui du cas précédent et on obtient la proposition :

Proposition IV.2.4 (équation schwarzienne). — Soit P un domaine polygonal à bords circulaires simplement connexe de sommets w_1, \dots, w_n et d'angles intérieurs $\lambda_1\pi, \dots, \lambda_n\pi$. Soit $s : \mathbb{H} \rightarrow P$ une uniformisante qui s'étend en un homéomorphisme au bord. Alors il existe $2n$ nombres réels a_1, \dots, a_n et β_1, \dots, β_n tels que

$$\{s, z\} = \sum_{i=1}^n \frac{1 - \lambda_i^2}{2(z - a_i)^2} + \frac{\beta_i}{z - a_i}. \tag{IV.7}$$

De plus, les λ_i , les a_i et les β_i sont liés par les relations

- (i) $\sum_{i=1}^n \beta_i = 0$;
- (ii) $\sum_{i=1}^n \frac{1 - \lambda_i^2}{2} + \beta_i a_i = 0$;
- (iii) $\sum_{i=1}^n a_i(1 - \lambda_i^2) + \beta_i a_i^2 = 0$.

Démonstration. — Pour tout $i = 1, \dots, n$, on peut, en appliquant le principe de symétrie, étendre s en une fonction s_i holomorphe sur $\mathbb{H} \cup]a_i, a_{i+1}[\cup \mathbb{H}^-$, satisfaisant la relation $s_i(\bar{z}) = h_i \circ s_i(z)$, h_i désignant cette fois l'inversion par rapport au cercle supportant l'arc (w_i, w_{i+1}) . En particulier, cette extension est injective ; par conséquent, sa dérivée ne s'annule pas. Ceci entraîne que $\{s, z\}$, qui est holomorphe sur \mathbb{H} , s'étend par continuité à $\overline{\mathbb{H}}$ privé des points a_1, \dots, a_n . Maintenant, pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe un choix judicieux de complexes A_i, B_i, C_i, D_i , de sorte que la transformation $s' = \frac{A_i s + B_i}{C_i s + D_i}$ envoie a_i sur 0 et les deux segments $[a_{i-1}, a_i]$, $[a_i, a_{i+1}]$ sur deux segments de droites sécants en 0

et faisant un angle $\lambda_i \pi$ en 0. On peut alors appliquer la formule (IV.1) à la fonction s' et obtenir que localement

$$s'(z) = (z - a_i)^{\lambda_i} H_i(z),$$

où H_i est holomorphe au voisinage de a_i . Les coefficients du développement en série entière de H_i au voisinage de a_i sont de plus réels.

L'invariance du schwarzien par homographies complexes, conduit alors à

$$\{s, z\} = \{s', z\} = \frac{1}{2} \frac{1 - \lambda_i^2}{(z - a_i)^2} + \frac{\beta_i}{z - a_i} + d_{2i} + d_{3i}(z - a_i) + \dots \quad (\text{IV.8})$$

Les coefficients intervenant dans le développement sont réels et déterminés par les coefficients du développement en série entière de H_i .

On en conclut que si l'on pose

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{1 - \lambda_i^2}{(z - a_i)^2} + \frac{\beta_i}{z - a_i},$$

alors la fonction $z \mapsto \{s, z\} - F(z)$, qui est holomorphe sur \mathbb{H} , s'étend en une fonction continue sur $\overline{\mathbb{H}}$. Comme elle prend des valeurs réelles pour des valeurs réelles de son argument, on applique à nouveau le principe de symétrie, et on peut l'étendre en une fonction entière. Il nous reste à l'étudier en l'infini pour montrer qu'elle est nulle.

On applique donc le principe de symétrie relativement au segment $[a_n, a_1]$: l'application s s'étend holomorphiquement au voisinage de l'infini, si bien que $s(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$ pour z de grand module dans \mathbb{H} . On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dz} &= -\frac{b_1}{z^2} - \frac{2b_2}{z^3} - \dots \\ \frac{d^2s}{dz^2} &= \frac{2b_1}{z^3} + \frac{6b_2}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

et donc que

$$\frac{d}{dz} \left(\log \frac{ds}{dz} \right) = \frac{-2}{z} (1 + \frac{c_1}{z} + \dots).$$

Nous pouvons alors calculer le schwarzien à l'ordre 3 :

$$\{s, z\} = \left(\frac{2}{z^2} + \frac{4c_1}{z^3} + \dots \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{z^2} + \frac{8c_1}{z^3} + \dots \right).$$

Ainsi, le schwarzien $\{s, z\}$ possède un zéro d'ordre au moins 4 en l'infini. La fonction $\{s, z\} - F(z)$ est entière et s'annule en l'infini : elle est donc identiquement nulle, ce qui prouve le premier point de la proposition.

Enfin, les a_i, λ_i et β_i ne sont pas indépendants entre eux. Dans le développement en $\frac{1}{z}$ de la fraction rationnelle $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{1-\lambda_i^2}{(z-a_i)^2} + \frac{\beta_i}{z-a_i}$, le terme en $\frac{1}{z}$ est $\sum_{i=1}^n \beta_i$. Le terme en $\frac{1}{z^2}$ est $\sum_{i=1}^n \frac{1-\lambda_i^2}{2} + \beta_i a_i$, et le terme en $\frac{1}{z^3}$ est $\sum_{i=1}^n a_i(1-\lambda_i^2) + \beta_i a_i^2$. L'annulation à l'ordre 4 de $\{s, z\}$ en l'infini impose donc les conditions supplémentaires :

$$(i) \sum_{i=1}^n \beta_i = 0;$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n \frac{1-\lambda_i^2}{2} + \beta_i a_i = 0;$$

$$(iii) \sum_{i=1}^n a_i(1-\lambda_i^2) + \beta_i a_i^2 = 0.$$

□

IV.2.3. Cas particulier des triangles

Dans la proposition IV.2.4, les constantes a_i et β_i sont en général impossibles à déterminer pour un polygone donné. Il est toutefois un cas important où l'on peut le faire : celui d'un triangle bordé par des arcs de cercles. Comme ce cas va être central dans le chapitre IX, nous le détaillons. On se fixe donc un triangle dans le plan, dont les côtés sont des arcs de cercles et s une uniformisante qui se prolonge continûment au bord.

On note respectivement $\lambda\pi, \mu\pi$ et $\nu\pi$ les angles du triangle en les sommets w_1, w_2 et w_3 . Soient a, b et c sur l'axe réel les préimages de ces sommets par s .

Les équations (i),(ii),(iii) de la proposition IV.2.4 sont un système linéaire d'inconnues les β_i . On le résout et on trouve que le schwarzien $\{s, z\}$ doit satisfaire

$$\{s, z\} = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} \left[\frac{1-\lambda^2}{2} \frac{(a-b)(a-c)}{(z-a)} + \frac{1-\mu^2}{2} \frac{(b-a)(b-c)}{z-b} + \frac{1-\nu^2}{2} \frac{(c-a)(c-b)}{z-c} \right].$$

Le point crucial est que les paramètres a, b et c n'en sont en fait pas : en composant à la source par une homographie, on fixe $a = 0, b = \infty$ et

$c = 1$. Après une petite réorganisation des termes, la formule précédente se réécrit

$$\{s, z\} = \frac{1 - \lambda^2}{2z^2} + \frac{1 - \nu^2}{2(1 - z)^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{2z(1 - z)}. \quad (\text{IV.9})$$

Nous avons donc trouvé une équation différentielle à coefficients rationnels définie sur $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0, 1, \infty\}$. Dans le cas où le triangle est convexe, toute solution de cette équation différentielle sera une uniformisante d'un triangle ayant les bons angles. En envoyant les sommets sur w_1 , w_2 et w_3 par une homographie au but, on uniformise bien notre triangle de départ. Autrement dit, nous avons montré le théorème suivant :

Théorème IV.2.5 (Uniformisation des triangles). — *On se fixe un triangle T de sommets w_1 , w_2 et w_3 dont les angles aux sommets sont respectivement $\lambda_1\pi$, $\lambda_2\pi$ et $\lambda_3\pi$ pour des $\lambda_i \in]0, 1[$.*

Alors la solution de l'équation (IV.9) qui envoie $0, \infty$ et 1 sur w_1, w_2 et w_3 envoie biholomorphiquement le demi-plan supérieur sur le triangle T . Cette solution s'étend à $\overline{\mathbb{H}}$ et envoie $\partial\overline{\mathbb{H}}$ homéomorphiquement sur le bord du triangle.

Pour conclure, ce résultat explicite permet d'utiliser le théorème IV.1.2 pour montrer l'existence de l'uniformisante pour des polygones à bords circulaires quelconques : on décompose d'abord un quadrilatère en union de deux triangles (qu'on sait donc uniformiser) qui se rencontrent sur un domaine simplement connexe. Le théorème IV.1.2 nous assure alors qu'on peut uniformiser le quadrilatère. Puis on peut par récurrence augmenter le nombre de côtés.

Intermezzo

La quartique de Klein

La théorie des intégrales elliptiques, qui s'est intensivement développée au cours du dix-neuvième siècle, fournit de nouvelles fonctions. À une intégrale elliptique est associé son *réseau marqué* des périodes, c'est-à-dire la donnée d'un sous-groupe discret de rang 2 du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ et d'une base $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ de ce réseau telle que $\text{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$. Notons donc

$$\mathcal{M} = \left\{ (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \mid \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H} \right\}$$

l'ensemble des réseaux marqués. On remarque que \mathcal{M} est stable par l'action naturelle de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{C}^2 (et que $\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathcal{M}$ s'identifie à l'ensemble des réseaux de \mathbb{C} , voir [Ser1970]). Cette action induit une action de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{H} par homographies :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Nous rappelons dans le paragraphe V.1 qu'il existe une fonction

$$j : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

invariante sous l'action de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ et telle que deux réseaux Λ_1 et Λ_2 de \mathbb{C} sont homothétiques⁽¹⁾ si et seulement si $j([\Lambda_1]) = j([\Lambda_2])$, où $[\Lambda_i]$ désigne la classe d'homothétie du réseau Λ_i . À la suite des travaux fondateurs, que l'on doit notamment à Gauss, Legendre, Abel et Jacobi, on cherche à

1. C'est-à-dire tels qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\lambda\Lambda_1 = \Lambda_2$, ce qui est équivalent au fait que \mathbb{C}/Λ_1 et \mathbb{C}/Λ_2 sont isomorphes.

relier $j(\tau)$ et $j'(\tau) = j(N\tau)$ pour $\tau \in \mathbb{H}$ et N entier ≥ 2 . On montre⁽²⁾ (voir paragraphe V.1.3) qu'il existe un polynôme $\Phi_N \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que

$$\Phi_N(j', j) = 0. \quad (\text{V.1})$$

Lorsque Φ_N est minimal, il s'agit de l'équation modulaire⁽³⁾ associée aux transformations d'ordre N . L'équation modulaire associée aux transformations d'ordre 7 (c'est-à-dire lorsque $N = 7$) est le sujet central de l'article [Kle1878c]. Klein y introduit un modèle géométrique remarquable de la surface $X(7)$ obtenue en compactifiant le quotient de \mathbb{H} par le sous-groupe

$$\Gamma(7) = \left\{ \alpha \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid \alpha \equiv I_2 \pmod{7} \right\},$$

où I_2 désigne la matrice identité. Plus généralement, on définit le sous-groupe principal de congruence de niveau N par

$$\Gamma(N) = \left\{ \alpha \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid \alpha \equiv I_2 \pmod{N} \right\}.$$

Nous montrerons au paragraphe V.1 que le quotient $\Gamma(N) \backslash \mathbb{H}$ peut être compactifié en une surface de Riemann notée $X(N)$. Le groupe $\Gamma(1)$ coïncide bien sûr avec $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ et nous verrons que la surface $X(1)$ est isomorphe à la sphère de Riemann $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Klein montre que la surface $X(7)$ est isomorphe à la quartique plane lisse \mathcal{C}_4 d'équation $x^3y + y^3z + z^3x = 0$, invariante par l'action projective d'un groupe G isomorphe à $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ (groupe d'automorphismes de $X(7)$, voir V.1.1). Dans ce modèle projectif, le morphisme naturel de $X(7)$ sur $X(1) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est matérialisé par la projection de \mathcal{C}_4 sur $G \backslash \mathcal{C}_4$ (identifié à $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$); c'est un revêtement galoisien dont la fibre générique est considérée par Klein comme « la résolvante de Galois »⁽⁴⁾ de l'équation modulaire de niveau 7. En s'appuyant sur les nombreuses propriétés géométriques de sa quartique et sur l'étude de l'équation $\Phi_7(\cdot, j) = 0$, il parvient à décrire la fibre au-dessus d'une valeur donnée $j(\tau)$ par des quotients

2. Rappelons, à titre d'analogie, que les fonctions trigonométriques $\cos(x)$ et $\cos(Nx)$ sont liées par l'équation algébrique

$$\cos(Nx) = T_N(\cos x),$$

où T_N est le N -ième polynôme de Tchebychev.

3. Une version antérieure, l'équation modulaire de Jacobi, concerne le module $\lambda = k^2$.

4. Entendons par là que le corps de fonctions de \mathcal{C}_4 est un corps de décomposition de cette équation sur $\mathbb{C}(j)$.

de formes modulaires explicites définies sur le demi-plan \mathbb{H} de la variable τ (rapport des périodes). Ce résultat est la contribution majeure de l'article [Kle1878c]. En outre, il apporte une autre nouveauté : le paramétrage explicite d'une courbe algébrique de genre > 1 (à un nombre fini de points près) au moyen d'une variable complexe uniforme. Klein démontre en particulier le théorème suivant :

Théorème V.0.6. — *La surface de Riemann associée à la quartique plane \mathcal{C}_4 d'équation*

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0$$

privée de ses 24 points d'inflexion est uniformisée par la variable $\tau \in \mathbb{H}$ via les formules

$$\frac{x}{z} = q^{-1/7} \frac{\sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m [q^{\frac{1}{2}(21m^2+37m+16)} - q^{\frac{1}{2}(21m^2+19m+4)}]}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+1} q^{\frac{1}{2}(21n^2+7n)}} \quad (\text{V.2})$$

$$\frac{y}{x} = q^{-4/7} \frac{\sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m [q^{\frac{1}{2}(21m^2+25m+8)} - q^{\frac{1}{2}(21m^2+31m+12)}]}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+1} q^{\frac{1}{2}(21n^2+7n)}} \quad (\text{V.3})$$

$$\frac{z}{y} = q^{-2/7} \frac{\sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m [q^{\frac{1}{2}(21m^2+m)} + q^{\frac{1}{2}(21m^2+13m+2)}]}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+1} q^{\frac{1}{2}(21n^2+7n)}}, \quad (\text{V.4})$$

où $q = e^{2i\pi\tau}$.

Autrement dit, les formules précédentes décrivent concrètement un morphisme de revêtement universel $\mathbb{H} \rightarrow \mathcal{C}_4 \setminus \mathcal{I}_4$, où \mathcal{I}_4 est l'ensemble des points d'inflexion de \mathcal{C}_4 . Durant les années 1878–1879, Klein publie une série de travaux sur les équations modulaires, en particulier [Kle1878b, Kle1878c, Kle1879b] consacrés respectivement aux transformations d'ordre $p = 5, 7$ et 11 . Dans chaque cas, il construit de manière géométrique une résolvante de Galois, en donne explicitement les racines – au moyen de formes modulaires – et montre comment retrouver l'équation modulaire elle-même (de degré $p + 1$) ainsi qu'une résolvante de degré p spécifique à ces valeurs particulières de p . Pour $p = 5$, le modèle géométrique de $X(5)$ utilisé par Klein est l'icosaèdre⁽⁵⁾, la résolvante de degré 5 étant quant à elle reliée à l'équation générale du cinquième degré comme l'avait montré Hermite [Her1858]. De même que la sphère admet un pavage régulier par les faces de l'icosaèdre, la

5. Klein montre que le morphisme $X(5) \rightarrow X(1)$ est isomorphe à celui qui quotiente la sphère unité de \mathbb{R}^3 par le groupe de rotation de l'icosaèdre régulier.

surface modulaire $X(7)$ admet un pavage régulier triangulaire. Sa combinatoire est héritée du choix d'un pavage de type $(2, 3, \infty)$ ⁽⁶⁾ de \mathbb{H} et ses triangles sont du type $(2, 3, 7)$. Il est décrit dans [Kle1878c] (en particulier p. 125-127 dans les œuvres complètes) et relié aux éléments géométriques de \mathcal{C}_4 . Les aspects arithmétiques, algébriques, géométriques et combinatoires, étroitement imbriqués dans le travail de Klein, font de la quartique \mathcal{C}_4 un objet central et fascinant. On pourra consulter [Levy1999a], et notamment [Elk1999] qui replace \mathcal{C}_4 dans le contexte de l'arithmétique moderne. Nous nous concentrerons ici sur un point précis, en suivant [Kle1878c] : le paramétrage de la quartique de Klein, qui marque une étape importante dans l'uniformisation explicite des courbes algébriques. Quant aux formules du théorème V.0.6, elles seront obtenues dans la section finale V.2.5.

V.1. Formes modulaires, invariant j

V.1.1. Surfaces modulaires

On sait depuis Gauss (voir encadré V.1 et figure V.1) que l'ensemble

$$\mathcal{D}(1) = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1, |\operatorname{Re}(\tau)| \leq 1/2 \right\}$$

est un domaine fondamental pour l'action de $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{H} , c'est-à-dire que toute orbite de $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$ rencontre $\mathcal{D}(1)$ et que les translatés $\gamma \cdot \operatorname{int}(\mathcal{D}(1))$ ($\gamma \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$) sont deux à deux disjoints. Nous y reviendrons au chapitre VI.

Proposition V.1.1. — *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$. Le quotient*

$$Y_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$$

admet une structure de surface de Riemann non compacte biholomorphe à une surface de Riemann compacte X_Γ privée d'un nombre fini de points.

6. Un pavage de \mathbb{H} par des triangles est de type (a, b, c) s'il est réalisé par des triangles hyperboliques (a, b, c) , c'est-à-dire d'angles $(\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{b}, \frac{2\pi}{c})$.

Encadré V.1 : Théorie de la réduction de Gauss

La théorie de la réduction des formes quadratiques consiste en l'étude des orbites du groupe $SL(n, \mathbb{Z})$ sur l'espace vectoriel des formes quadratiques en n variables, pour l'action donnée par $(A \cdot q)(x) = q({}^t Ax)$. Cette action est naturelle du point de vue arithmétique : deux formes quadratiques dans la même orbite ont les mêmes valeurs entières. Si X désigne l'ensemble des formes quadratiques définies positives, on cherche en particulier un domaine fondamental pour l'action de $SL(n, \mathbb{Z})$ sur X .

Dans ses *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss considère le cas où $n = 2$. Toute forme quadratique définie positive q peut être uniquement écrite

$$q(x, y) = a(\tau x + y)(\bar{\tau}x + y) \tag{V.5}$$

où $a > 0$ et τ appartient au demi-plan \mathbb{H} . L'action des scalaires positifs sur X commute à celle de $SL(2, \mathbb{Z})$ et (V.5) implique que le quotient X/\mathbb{R}_+^* est isomorphe au demi-plan \mathbb{H} . Le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ agit par homographies sur \mathbb{H} et Gauss démontre le célèbre théorème suivant (voir [Ser1970]) :

Théorème V.1.2 (Gauss). — *Le sous-ensemble*

$$\mathcal{D}(1) = \{\tau \in \mathbb{H} : |\tau| \geq 1 \text{ et } |\operatorname{Re}(\tau)| \leq 1/2\}$$

de X est un domaine fondamental pour l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{H} .

Démonstration. — Commençons par le cas $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$. Il est facile à partir du domaine fondamental $\mathcal{D}(1)$ de munir le quotient $Y(1) = Y_\Gamma$ d'une structure de surface de Riemann non compacte de genre 0 et à un bout ; cette construction, dans le cas plus général d'un groupe fuchsien quelconque, est faite dans le chapitre VI. Les *horoboules* centrées en l'infini

$$B_a = \{\tau \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} \tau \geq a\} \ (a > 0)$$

deviennent par passage au quotient des disques épointés, voisinages du bout de Y_Γ . On pose $q = e^{2i\pi\tau}$ que l'on prend comme carte. On obtient

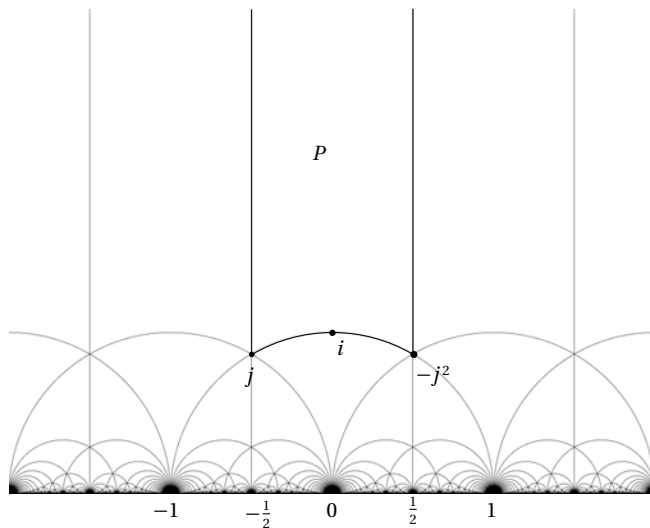


FIGURE V.1. Un pavage pour $PSL(2, \mathbb{Z})$

ainsi une surface compacte X_Γ qui est une complétion de la surface de Riemann ouverte Y_Γ .

Dans le cas général d'un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{Z})$, le quotient Y_Γ est un revêtement ramifié au-dessus de $Y(1)$. Il se compactifie de manière unique en un revêtement ramifié X_Γ au-dessus de $X(1)$. L'action projective de $SL(2, \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Q}P^1$ est transitive; l'ensemble $X_\Gamma \setminus Y_\Gamma$ est fini, en bijection avec les classes $\Gamma \backslash \mathbb{Q}P^1$. Ses éléments sont encore appelés les *pointes* de X_Γ (ou de Γ). Soit $x = \rho(\infty)$ un représentant d'une pointe ($\rho \in SL(2, \mathbb{Z})$) et soit Γ_x le stabilisateur de x dans Γ . Le groupe $\rho^{-1}\Gamma_x\rho$, indépendant du choix du représentant de la pointe et de ρ , est engendré par $\gamma(z) = z + m$ pour un certain entier $m \geq 1$. On pose $q = e^{2i\pi\tau}$ et on prend comme carte $\rho(w)$ avec

$$w = e^{2i\pi\tau/m} = q^{1/m}. \tag{V.6}$$

Noter enfin que toute inclusion $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ entre sous-groupes d'indice fini de $SL(2, \mathbb{Z})$ induit une application holomorphe de X_{Γ_1} sur X_{Γ_2} . \square

Pour $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ on a $Y_\Gamma \simeq \mathbb{C}$ et $X_\Gamma \simeq \overline{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}P^1$ (une seule pointe). Lorsque Γ est l'un des sous-groupes principaux de congruence $\Gamma(N)$, les invariants numériques (genre, nombre de pointes) de la surface de

Riemann associée sont connus, voir [Shi1971, p. 20-23]. En particulier la surface $X(7)$ est de genre 3 avec 24 pointes (voir § V.2.1).

V.1.2. Formes modulaires

Pour plus de détails sur le contenu de cette section, on consultera [Ser1970]. Comme précédemment, on considère un sous-groupe Γ d'indice fini de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Rappelons que l'ensemble des réseaux marqués \mathcal{M} est stable par l'action naturelle de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{C}^2 .

On appelle *forme automorphe* sur \mathbb{H} relativement à Γ toute fonction $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$f(\tau) = \hat{f}(\tau, 1)$$

où $\hat{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction homogène de degré $-2k$, invariante par Γ et telle que $\hat{f}(\tau, 1)$ soit méromorphe sur \mathbb{H} ainsi qu'aux pointes dans la variable w définie en (V.6). La fonction f vérifie en particulier

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)(c\tau + d)^{-2k} = f(\tau) \quad \left(\tau \in \mathbb{H}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma\right). \quad (\text{V.7})$$

On appelle k le *poids* de f .

Parmi les formes automorphes, il convient de distinguer plusieurs sous-ensembles. Tout d'abord, on note $K(\Gamma)$ l'ensemble des formes de poids $k = 0$, qui s'identifie au corps des fonctions méromorphes de X_Γ . Ensuite, on considère l'ensemble $M_k(\Gamma)$ des formes de poids k holomorphes sur \mathbb{H} et holomorphes en la variable w en chaque pointe de Γ : les *formes modulaires*. Munie du produit, la somme directe $M(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma)$ est une \mathbb{C} -algèbre graduée.

Considérons maintenant le cas de $\Gamma(1) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Soit $k > 2$. Pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{M}$ posons

$$G_k(\omega_1, \omega_2) = \sum'_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda^{2k}}, \quad (\text{V.8})$$

où l'on désigne par Σ' la sommation sur les vecteurs *non nuls* du réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ (la convergence est assurée par le fait que $k > 2$). Par construction, $G_k(\omega_1, \omega_2)$ est homogène de degré $-2k$ et $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ -invariante; un argument de convergence normale – dans un domaine fondamental de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ – montre que $G_k(\tau, 1)$ est holomorphe sur \mathbb{H} ainsi qu'à la pointe ∞ , voir [Ser1970, chap. VII]. On sait de plus que l'algèbre des formes modulaires pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ est polynomiale,

engendrée par $g_2 = 60G_2$ et $g_3 = 140G_3$ de poids respectifs 2 et 3 : $M(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})) = \mathbb{C}[g_2, g_3] \simeq \mathbb{C}[X, Y]$.

Pour construire une fonction méromorphe sur \mathbb{H} qui soit $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ -invariante et non constante, on considère la première composante homogène de $M(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$ de dimension au moins 2, de manière à former le quotient de deux formes modulaires linéairement indépendantes et de même poids. On montre (voir [Ser1970, chap. VII]) que cette première composante est $M_6(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}))$ qui contient la forme $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ qui ne s'annule pas sur \mathbb{H} . On pose donc naturellement

$$J = g_2^3/\Delta, \quad \text{et} \quad j = (12)^3 J. \quad (\text{V.9})$$

La fonction j , appelée *invariant modulaire*, est holomorphe sur \mathbb{H} et admet un pôle simple (de résidu égal à 1) à l'infini. Par passage au quotient elle induit un isomorphisme de $X(1)$ sur \mathbb{CP}^1 .

Pour des raisons de symétrie, on obtient $g_3(i) = 0$ et $g_2(\rho) = 0$ pour $\rho = (1 + i\sqrt{3})/2$ (voir éq. (V.8)), d'où les valeurs spéciales

$$j(i) = 12^3 = 1728 \quad \text{et} \quad j(\rho) = 0. \quad (\text{V.10})$$

Enfin, le corps des fonctions méromorphes $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ -invariantes coïncide avec $\mathbb{C}(j)$, qui est isomorphe au corps des fractions rationnelles en une variable sur \mathbb{C} . Pour tout sous-groupe Γ d'indice fini de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, le corps de fonctions $K(\Gamma)$ est donc une extension finie de $\mathbb{C}(j)$, galoisienne si et seulement si Γ est un sous-groupe normal de $\Gamma(1)$, ce qui est le cas du sous-groupe de congruence principal $\Gamma(N)$, dont le degré est égal à celui du revêtement ramifié $X_\Gamma \rightarrow X(1)$ [Rey1989, p. 60].

V.1.3. Équations modulaires

Étant donné un entier $N \geq 2$, on cherche à relier $j(\tau)$ et $j'(\tau) = j(N\tau)$ pour $\tau \in \mathbb{H}$. Il est facile de vérifier que j' est invariante par le groupe

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}, \quad (\text{V.11})$$

qui est même le stabilisateur de j' .

D'autre part j' est méromorphe aux pointes de $\Gamma_0(N)$. En effet, par l'action de $\Gamma(1) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, on se ramène à la pointe ∞ et à une fonction de la forme $j \circ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ où a , b et d sont entiers ; le produit de cette dernière avec $q^{k/m}$ (voir éq. (V.6)) est borné au voisinage de $q^{1/m} = 0$ pour k assez grand. L'extension $K(\Gamma_0(N))/\mathbb{C}(j)$ étant finie, cela implique l'existence d'une relation algébrique entre j et j' . Pour exhiber une telle

relation, considérons les transformés de j' par les éléments de $\Gamma(1)$, c'est-à-dire les $j \circ \alpha$ où α décrit l'orbite O_N , sous l'action à droite de $\Gamma(1)$, du point

$$p_N = \Gamma(1) \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \backslash \Delta_N,$$

avec Δ_N égal à l'ensemble des matrices entières de déterminant N . On vérifie facilement que le stabilisateur du point p_N dans $\Gamma(1)$ est $\Gamma_0(N)$ et l'orbite O_N s'identifie donc au quotient $\Gamma_0(N) \backslash \Gamma(1)$. Soit d_N l'indice de $\Gamma_0(N)$ dans $\Gamma(1)$ et soit $\alpha_k \in \Delta_N$ ($k = 1, \dots, d_N$) un système de représentants de l'orbite O_N . Alors les coefficients du polynôme $\prod_{k=1}^{d_N} (X - j \circ \alpha_k)$ sont invariants par $\Gamma(1)$, holomorphes sur \mathbb{H} et (par le même argument que plus haut) méromorphes à la pointe ∞ . On trouve donc un polynôme $\Phi_N \in \mathbb{C}[X, Y]$ de degré d_N en X tel que

$$\Phi_N(j', j) = 0. \tag{V.12}$$

Il s'agit de *l'équation modulaire* associée aux transformations d'ordre N . Le stabilisateur de $j \circ \alpha_k$ est un conjugué de $\Gamma_0(N)$ (stabilisateur de j'), donc le sous-groupe qui fixe tous les $j \circ \alpha_k$ coïncide avec $\Gamma(N) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma(1)} \gamma \Gamma_0(N) \gamma^{-1}$. Par suite, le corps de décomposition de $\Phi_N \in \mathbb{C}[j][X]$ est $K(\Gamma(N))$. De plus $\Gamma(1)$ agit par automorphismes de $K(\Gamma(N))$ en permutant transitivement les racines de ce polynôme qui est donc irréductible, en particulier $K(\Gamma_0(N)) = \mathbb{C}(j, j')$ (voir aussi [Shi1971, p. 34]). Quand $N = p$ est premier, on voit facilement que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & p \end{pmatrix}$ ($0 \leq k < p$) et $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forment un système de représentants de $O_p = \Gamma(1) \backslash \Delta_p$; l'indice de $\Gamma_0(p)$ vaut donc $d_p = p + 1$.

Un calcul élémentaire montre que $\Gamma_0(N)$ est normalisé par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & N^{-1/2} \\ -N^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \tag{V.13}$$

qui induit un automorphisme involutif de la surface $X_0(N) = X_{\Gamma_0(N)}$ et de son corps de fonctions : c'est *l'involution de Fricke* qui échange j et j' (on peut en déduire que $\Phi_N \in \mathbb{C}[X, Y]$ est symétrique). En s'appuyant sur cette symétrie, Klein étudie l'équation modulaire quand $N = 2, 3, 4, 5, 7$ et 13 [Kle1878b, section II]. Pour ces valeurs de N la surface $X_0(N)$ est de genre 0 et il existe $\xi \in K(\Gamma_0(N))$ tel que $K(\Gamma_0(N)) = \mathbb{C}(j, j') = \mathbb{C}(\xi)$; on a alors $j = F(\xi)$ et $j' = F(\xi')$ avec $F \in \mathbb{C}(Z)$, la fonction ξ' étant liée à ξ par une homographie (l'involution de Fricke). Dans chaque cas, Klein décrit

un domaine fondamental pour l'action de $\Gamma_0(N)$ sur le demi-plan ⁽⁷⁾ puis il déduit des données de ramification l'expression de F et donne la relation entre ξ (connu par ailleurs en fonction de q) et ξ' . Remarquons que pour $N \in \{2, 3, 4, 5\}$, la surface $X(N)$ est également de genre 0, les groupes d'automorphismes correspondants (qui laissent l'ensemble des pointes globalement fixé) sont un groupe diédral, le groupe du tétraèdre A_4 , le groupe du cube et de l'octaèdre S_4 et le groupe du dodécaèdre et de l'icosaèdre A_5 .

V.1.4. Surface $X_0(7)$

Nous explicitons maintenant le cas $N = 7$. Il s'agit d'abord de déterminer un domaine fondamental pour l'action du groupe $\Gamma_0(7)$. Pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $SL(2, \mathbb{R})$, on a la formule bien connue

$$\text{Im } \gamma(z) = \frac{\text{Im } z}{|cz + d|^2} \quad (z \in \mathbb{H}). \tag{V.14}$$

Comme il n'existe qu'un nombre fini de couples $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que le module $|cz + d|$ soit inférieur à une constante donnée, on voit que toute orbite de $\Gamma_0(7)$ sur \mathbb{H} contient un point $z \in \mathbb{H}$ dont la partie imaginaire est maximale, c'est-à-dire tel que $|cz + d| \geq 1$ pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(7)$. Toute orbite de $\Gamma_0(7)$ rencontre donc l'ensemble

$$\mathcal{D}' = \bigcap_{d \notin 7\mathbb{Z}} \{|z + d/7| \geq 1/7\} \cap \{|Re z| \leq 1/2\}.$$

L'inégalité $|Re z| \leq 1/2$ se déduit du fait que la translation

$$t : \tau \mapsto \tau + 1$$

est un élément de $\Gamma_0(7)$. Grâce aux rotations $r_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ et $r_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, l'ensemble \mathcal{D}' se ramène au domaine fondamental \mathcal{D} de la figure V.2. Celui-ci est pavé par huit translatés de $\mathcal{D}(1)$ par $\Gamma(1)$ et l'image $\bar{\Gamma}_0(7)$ de $\Gamma_0(7)$ dans $PSL(2, \mathbb{Z})$ est un sous-groupe d'indice 8, donc \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont des domaines fondamentaux pour $\Gamma_0(7)$. On voit enfin (fig. V.2) que $X_0(7)$ est de genre 0 avec 2 pointes (0 et ∞) et que $\bar{\Gamma}_0(7)$ est engendré par r_1, r_2 et la translation t qui réalisent les identifications permettant d'obtenir $X_0(7)$.

7. Il utilise en fait les $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ avec $b \equiv 0 \pmod{N}$, ce qui revient au même.

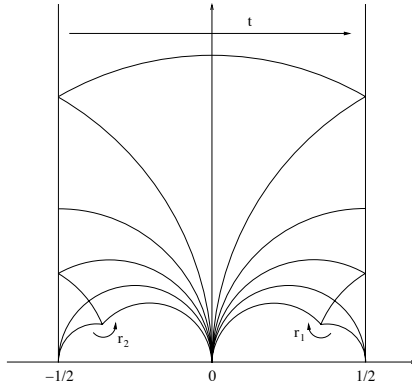


FIGURE V.2. Domaine fondamental pour $\Gamma_0(7)$

Proposition V.1.3. — *L'expression*

$$\xi = \left(\frac{\Delta(\tau)}{\Delta(7\tau)} \right)^{1/6} = \frac{1}{q} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^n}{1 - q^{7n}} \right)^4 \tag{V.15}$$

fournit une coordonnée rationnelle sur $X_0(7)$.

Démonstration. — La deuxième égalité est une conséquence de l'égalité (voir [Ser1970]) :

$$\Delta = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} .$$

On vérifie ensuite comme pour $j(7\tau)$ que $\Delta(7\tau)$ est modulaire pour $\Gamma_0(7)$, donc $\xi^6 \in M(\Gamma_0(7))$. Par suite on a $\xi \circ \bar{\gamma} = \chi(\bar{\gamma})\xi$ pour tout $\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}_0(7)$, où χ est un caractère du groupe $\bar{\Gamma}_0(7)$ à valeurs dans les racines sixièmes de l'unité. Mais $\bar{\Gamma}_0(7)$ est engendré par t, r_1 et r_2 . On a $\xi \circ t = \xi$ (car ξ s'exprime uniquement avec des puissances entières de q) et on a $\chi(r_1) = \chi(r_2) = 1$ car ces rotations ont un point fixe dans \mathbb{H} : le caractère χ est donc trivial. Enfin, comme Δ est holomorphe et ne s'annule pas dans \mathbb{H} (voir § V.1.2), ξ ne peut prendre les valeurs 0 et ∞ qu'aux pointes. Vu que $X_0(7)$ n'a que deux pointes, la fonction ξ est nécessairement de degré 1. En particulier le sous-groupe de $\Gamma(1)$ laissant ξ invariante est $\Gamma_0(7)$. \square

V.1.5. L'invariant modulaire comme fonction sur $X_0(7)$

Nous pouvons maintenant déterminer j comme fonction de ξ en suivant la méthode utilisée par Klein dans [Kle1878b, II §14]. On obtient :

Proposition V.1.4. —

$$j = \frac{1}{\xi^7}(\xi^2 + 13\xi + 49)(\xi^2 + 245\xi + 2401)^3.$$

Démonstration. — Posons $j = \varphi(\xi)/\psi(\xi)$, fraction rationnelle de degré 8 en ξ . L'équation $j = \infty$ a une racine simple en $\xi = \infty$ – correspondant à $q = 0$ – et une racine d'ordre 7 en $\xi = 0$ (voir éq. (V.15) et fig. V.2); on peut donc prendre $\psi(\xi) = \xi^7$. De même, φ a 2 racines triples et 2 simples et $\varphi - 1728\psi$ a 4 racines doubles (éq. (V.10) et fig. V.2). De plus ψ est un polynôme unitaire car $j(q)$ admet un pôle simple de résidu 1 en $q = 0$. Les conditions énoncées suffisent à déterminer φ de façon unique. En effet posons $\varphi = UV^3$ et $\varphi - 1728\psi = W^2$ où U , V et W sont des polynômes unitaires de degrés respectifs 2, 2 et 4; de plus U , V , W et ξ sont 2 à 2 premiers entre eux. Le « déterminant fonctionnel » $\varphi'\psi - \psi'\varphi$ est alors un polynôme unitaire de degré 14 divisible à la fois par $\xi^6 V^2$ et W , donc $\varphi'\psi - \psi'\varphi = \xi^6 V^2 W$. Cette relation donne W en fonction des coefficients de U et V ; le report dans $UV^3 - 1728\xi^7 = W^2$ conduit à l'expression de j annoncée. \square

L'involution de Fricke transforme ξ en $\xi'(\tau) = \xi(-1/(7\tau))$. Elle induit un automorphisme involutif σ de la surface $X_0(7)$, donc ξ' est une fonction homographique involutive de ξ . On a $j = F(\xi)$ et $j' = F(\xi')$. Les deux pointes de $X_0(7)$ constituent la fibre commune de j et j' au-dessus de l'infini et sont échangées par σ , d'où $\xi\xi' = C$. De même σ échange les racines simples de $F = 0$ (images des centres de r_1 et r_2 , voir fig. V.2, reliés par $z_1 z_2 = -1/7$), lesquelles vérifient $j = j' = 0 : \xi^2 + 13\xi + 49 = 0$ doit impliquer $\xi'^2 + 13\xi' + 49 = 0$, d'où $C = 49$. Finalement l'involution de Fricke est donnée par

$$\xi\xi' = 49. \tag{V.16}$$

D'après (V.1.4), on a aussi $j = (\xi'^2 + 13\xi' + 49)(\xi'^2 + 5\xi' + 1)^3/\xi'$. C'est l'expression obtenue par Klein dans [Kle1878b] pour $J = j/1728$.

Pour la suite, il est important de décrire la fibre de $j : X_0(7) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ qui est un intermédiaire essentiel dans le paramétrage de \mathcal{C}_4 . Écrivons comme plus haut J en fonction de ξ' , c'est-à-dire J' en fonction de ξ , soit encore

$$J' - 1 = \frac{1}{12^3 \xi}(\xi^4 + 14\xi^3 + 63\xi^2 + 70\xi - 7)^2. \tag{V.17}$$

Aux points $-1/7\tau$ et $(\tau + k)/7$ ($k = 0, \dots, 6$), la fonction J' prend la même valeur $J(\tau)$. Par suite, $\xi_\infty = \xi' = \xi(-1/7\tau)$ et $\xi_k = \xi(\tau/7 + k/7)$, pour $k = 0, \dots, 6$, sont racines de l'équation

$$(z^4 + 14z^3 + 63z^2 + 70z - 7)^2 - 12^3(J - 1)z = 0. \tag{V.18}$$

Comme les fonctions $-1/7\tau$ et $(\tau + k)/7$ ($k = 0, \dots, 6$) sont distinctes modulo $\Gamma_0(7)$, il en est de même des ξ_k ($k = \infty, 0, \dots, 6$) en tant que fonctions sur \mathbb{H} . Si l'on change de point τ dans la fibre au-dessus de J , les ξ_k ($k = \infty, 0, \dots, 6$) sont permutées comme racines de (V.18) – la permutation s'explique facilement à partir de (V.15).

Posons maintenant $q^{1/2} = e^{i\pi\tau}$, $\Delta^{1/2} = (2\pi)^6 q^{1/2} \prod_{n=1}^\infty (1 - q^n)^{12}$. Comme $J - 1 = 27g_3^2/\Delta$ (voir équation (V.9)), les racines carrées des solutions de (V.18) sont au signe près solutions de

$$w^8 + 14w^6 + 63w^4 + 70w^2 - 6^3 g_3 w/\Delta^{1/2} - 7 = 0. \tag{V.19}$$

Elles s'expriment à l'aide de $\pm \xi^{1/2}$, $\xi^{1/2} = q^{-1/2} \prod_{n=1}^\infty (1 - q^n)^2 (1 - q^{7n})^{-2}$. Le signe est déterminé par le comportement du premier membre de (V.19) quand q tend vers 0. Sachant que $\lim_{q \rightarrow 0}(g_3) = 280\zeta(6)$ [Ser1970, chap. VII, § 2.3], on trouve $6^3 g_2/\Delta^{1/2} = q^{-1/2}(1 + o(q))$. Les racines de (V.19) sont donc $w_\infty = -\xi^{1/2}(-1/7\tau)$ et $w_k = (-1)^k \xi^{1/2}(\tau/7 + k/7)$ ($k = 0, \dots, 6$), soit en posant $\gamma = e^{2i\pi/7}$:

$$w_\infty = -7q^{1/2} \prod_{n=1}^\infty \left(\frac{1 - q^{7n}}{1 - q^n} \right)^2, \tag{V.20}$$

$$w_k = \gamma^{-4k} q^{-1/14} \prod_{n=1}^\infty \left(\frac{1 - \gamma^{nk} q^{n/7}}{1 - q^n} \right)^2 \quad (k = 0, \dots, 6). \tag{V.21}$$

V.2. Comment Klein paramètre sa quartique

V.2.1. Groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ et surface $X(7)$

Comme il a été vu précédemment (§ V.1.3), le corps $K(\Gamma(7))$ de fonctions de la surface $X(7)$ est un corps de décomposition du polynôme $\Phi_7 \in \mathbb{C}(j)[X]$ lié aux transformations d'ordre 7 (équation V.1)). Il convient d'abord d'examiner l'action des « substitutions homographiques modulo 7 » [Kle1878c, § 1-2] sur $X(7)$. Soit $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ le corps à 7 éléments. Puisque $\text{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, le morphisme de réduction modulo 7 de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ dans $\text{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ est surjectif,

d'où la suite exacte

$$1 \longrightarrow \bar{\Gamma}(7) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_7) \longrightarrow 1. \quad (\text{V.22})$$

En particulier le quotient $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})/\bar{\Gamma}(7)$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$, groupe (simple, voir remarque V.2.2) de cardinal 168. Le groupe G agit sur $X(7)$ par automorphismes et $G \backslash X(7)$ s'identifie à $X(1)$. Ainsi les fibres de la projection $X(7) \rightarrow X(1)$ sont les orbites de G sur $X(7)$. Il y a donc 3 fibres singulières qui correspondent aux valeurs $J = \infty, 0$ et 1 (on rappelle que $J = j/1728$), dont les éléments sont appelés A-points, B-points et C-points dans la terminologie de Klein, avec des stabilisateurs d'ordre respectifs 7, 3 et 2. Ces fibres ont pour cardinaux 24, 56 et 84; toutes les autres ont 168 éléments. D'après la formule de Riemann-Hurwitz, le genre g de $X(7)$ satisfait la relation

$$2 - 2g = 2 \cdot 168 - 6 \cdot 24 - 2 \cdot 56 - 84, \quad (\text{V.23})$$

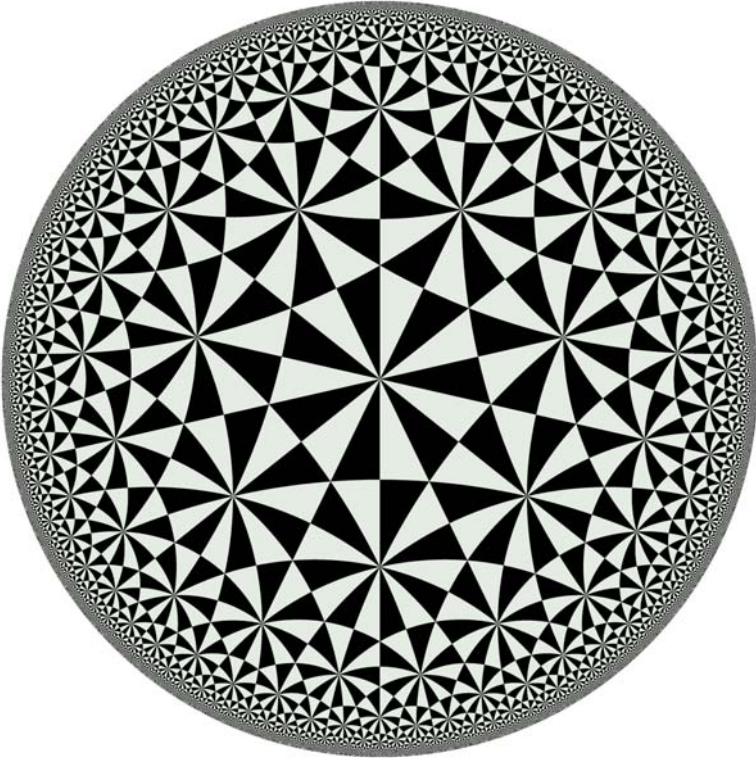
d'où $g = 3$.

Remarque V.2.1. — Le groupe d'automorphismes d'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ est fini de cardinal inférieur ou égal à $84(g-1)$; c'est la *borne d'Hurwitz*. La surface $X(7)$ réalise cette borne⁽⁸⁾.

En relevant à $X(7)$ une décomposition de $X(1) \simeq \mathbb{CP}^1$ en 2 triangles de sommets $(1, 0, \infty)$, on obtient une structure polyédrale triangulaire de type $(2, 3, 7)$ sur $X(7)$. La surface se trouve pavée par 336 triangles que l'on peut grouper pour obtenir, soit un pavage par 24 heptagones (centrés aux A-points) avec 84 arêtes centrées aux C-points et 56 sommets (les B-points), soit le pavage dual comprenant 56 triangles centrés aux B-points, 84 arêtes centrées aux C-points et 24 sommets, les A-points (voir [Kle1878c, Œuvres, p. 125-127] et figure V.3).

Chaque $g \in G$ se relève en une matrice $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ unique au signe près. L'ordre de g est alors relié à la trace de γ . Par exemple, si g est d'ordre 4, le polynôme minimal de γ est l'un des facteurs du polynôme $x^4 + 1 = (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 4x + 1)$ et l'on a $\mathrm{tr} \gamma = \pm 3$; inversement cette condition implique clairement que g est d'ordre 4. On obtient ainsi que

8. Ceci provient du fait que le triangle $(2, 3, 7)$ est d'aire hyperbolique minimale parmi les triangles hyperboliques de types (a, b, c) . Par le théorème de Gauss-Bonnet, ce qui revient au fait que la plus grande valeur inférieure à 1 de la somme $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ se réalise uniquement pour $(2, 3, 7)$.

FIGURE V.3. Structure polyédrale triangulaire de $X(7)$

les éléments d'ordre 2, 3, 4 et 7 sont caractérisés respectivement par $\pm \text{tr} \gamma = 0, 1, 3$ et 2 (avec $\gamma \neq \pm I_2$). Un décompte facile montre qu'il y a dans G respectivement 21, 56, 42 et 48 éléments de chaque type.

Passons à l'inventaire des sous-groupes cycliques de G . On constate d'abord que toutes les involutions de G sont conjuguées (les relevés dans $\text{SL}(2, \mathbb{F}_7)$ ont tous $x^2 + 1$ comme polynôme minimal), donc possèdent des points fixes; nécessairement chacune des 21 involutions doit fixer quatre C-points. Ces involutions correspondent bijectivement aux sous-groupes cycliques d'ordre 4 qui sont également tous conjugués. Tout élément $g \in G$ d'ordre 4 est sans points fixes et opère une bitransposition sur les 4 points fixes de l'involution g^2 . Pour des raisons topologiques (la surface de genre 3 n'est pas un revêtement triple non ramifié), les éléments d'ordre 3 ont tous des points fixes. Ils se répartissent donc en 28 sous-groupes fixant chacun une paire de B-points et tous conjugués

puisque G est transitif sur les B-points. De manière analogue, on voit que les 48 éléments d'ordre 7 sont répartis en 8 sous-groupes tous conjugués et fixant chacun trois A-points.

Quelques remarques additionnelles faciliteront la détermination d'un modèle géométrique de $X(7)$. Puisque l'action par conjugaison de G sur les 8 sous-groupes d'ordre 7 est transitive, le normalisateur d'un tel sous-groupe est d'ordre 21 et non abélien car G n'a pas d'élément d'ordre 21. Soit G'_{21} (notation de [Kle1878c]) l'un de ces normalisateurs : il s'agit d'un produit semi-direct engendré par deux éléments h et r vérifiant (quitte à changer r en r^{-1})

$$h^7 = r^3 = 1 \quad \text{et} \quad rhr^{-1} = h^4. \quad (\text{V.24})$$

Les 3 A-points fixés par h , dont le stabilisateur est cyclique, sont permutés cycliquement par r . Par un raisonnement analogue, le normalisateur de r est un sous-groupe G'_6 isomorphe au groupe symétrique S_3 , engendré par r et une involution s permutant les deux B-points fixes de r .

Remarque V.2.2. — Klein ne mentionne pas la simplicité de G . Elle résulte cependant de l'argumentation élémentaire donnée dans [Kle1884, p. 19] pour $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_5)$. Sachant que les sous-groupes cycliques de même ordre sont tous conjugués (en fait les éléments de même ordre sont tous conjugués), le cardinal d'un sous-groupe normal H de G est de la forme $1 + 21\alpha_1 + 56\alpha_2 + 42\alpha_3 + 48\alpha_4$ avec $\alpha_k = 0$ ou 1 ($k = 1, \dots, 4$). Les seules possibilités pour obtenir ainsi un diviseur de 168 sont $\alpha_k = 0$ pour tout k (H trivial) et $\alpha_k = 1$ pour tout k ($H = G$).

V.2.2. Quartique \mathcal{C}_4

Dans ce paragraphe nous déterminons une équation algébrique explicite de la surface de Riemann $X(7)$. Rappelons qu'étant donnée une surface de Riemann compacte X et $V = \Omega(X)^*$ le dual de l'espace des 1-formes holomorphes sur X , la surface X s'envoie naturellement dans l'espace projectif $P(V)$. Cette application se définit en associant à chaque point x de X le projectifié de l'espace des 1-formes holomorphes qui s'annulent en x . On montre que cet espace est toujours un hyperplan vectoriel de

$\Omega(X)$, donc il s'identifie à un point de $P(V)$. On sait de plus que l'application φ de X dans l'espace projectif $P(V)$ ainsi définie est un plongement holomorphe sauf si X est hyperelliptique⁽⁹⁾ (voir [Rey1989, p. 102]).

Pour exclure cette dernière éventualité dans le cas de $X(7)$, Klein utilise un modèle spécifique des courbes planes hyperelliptiques de genre 3, [Levy1999b, p. 295]. Le fait que $X(7)$ ne soit pas hyperelliptique résulte aussi de la nature de ses involutions⁽¹⁰⁾ : elles n'ont que 4 points fixes (§ V.2.1) alors qu'une involution hyperelliptique en genre 3 doit avoir 8 points fixes. Lorsque $g = 3$ l'espace projectif $P(V)$ est de dimension 2 ; l'image \mathcal{C}_4 du plongement de $X(7)$ est donc une quartique lisse plane.

Le groupe G des automorphismes de $X(7)$ agit linéairement sur l'espace $V = \Omega(X(7))^*$ par

$$(g \cdot \xi)(\omega) = \xi(g^* \omega) \quad (g \in G, \xi \in V, \omega \in \Omega(X)). \tag{V.25}$$

Cette action projective de G est essentielle pour l'étude géométrique de cette quartique. Noter que la représentation (V.25) est à valeurs dans $SL(V) \simeq SL(3, \mathbb{C})$ car G n'a pas de quotient non trivial (voir la remarque V.2.2).

Rappelons que toute courbe plane possède des points spéciaux, notamment : inflexions, contacts avec les bitangentes et points où la courbe admet une conique surosculatrice, c'est-à-dire ayant un contact d'ordre au moins 6 avec la courbe. Ces derniers sont appelés points *sextactiques* (suivant Cayley) ; par exemple, si la courbe admet un axe de symétrie, les intersections avec l'axe sont sextactiques par symétrie. Pour une courbe projective lisse d'équation $f = 0$ (de degré au moins 4), chacune de ces 3 familles de points particuliers s'obtient en prenant l'intersection avec une courbe associée à f (voir § V.2.3 équation (V.31) pour \mathcal{C}_4), par exemple avec $\det \text{Hess } f = 0$ pour les inflexions, où $\text{Hess } f$ est le hessien de f . Les courbes lisses de degré 4 possèdent 24 inflexions, 56 contacts avec les bitangentes et 84 points sextactiques (en comptant les multiplicités).

9. Rappelons qu'une surface de Riemann X est dite *hyperelliptique* s'il existe un revêtement ramifié de degré 2 de X sur $\mathbb{C}P^1$. On appelle alors *involution hyperelliptique* l'unique automorphisme de revêtement non trivial.

10. ou encore de la simplicité de G , puisqu'une involution hyperelliptique est toujours centrale.

Identifions dorénavant G au sous-groupe de $SL(V)$ qui laisse \mathcal{C}_4 invariante par l'action projective (V.25). Étant projectivement invariante, chaque famille de points spéciaux de \mathcal{C}_4 est réunion d'orbites de G . Cela conduit à une unique possibilité : les inflexions correspondent aux A-points, les contacts avec les bitangentes aux B-points et les points sextactiques aux C-points (toutes les autres orbites ont 168 éléments). Comme les inflexions sont simples, toute tangente d'inflexion en $P \in \mathcal{C}_4$ recoupe \mathcal{C}_4 en P' distinct de P . Quand P décrit l'ensemble \mathcal{I} des inflexions, l'ensemble des points P' est une orbite à 24 éléments, donc coïncide avec \mathcal{I} par unicité. De plus, tout élément de G qui fixe P doit fixer P' . Sachant que les stabilisateurs des A-points fixent chacun un triplet de A-points, ce procédé décompose \mathcal{I} en 8 cycles de longueur 3. Les tangentes d'inflexion se regroupent donc en 8 *triangles d'inflexion* (suivant la terminologie de Klein) qui vont jouer un rôle important dans la suite. Par exemple, ils permettent de montrer :

Théorème V.2.3. — Une équation de \mathcal{C}_4 , invariante par G , est donnée par

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0. \quad (\text{V.26})$$

Démonstration. — Soit $f = 0$ une équation de \mathcal{C}_4 , invariante par G . La simplicité du groupe G impose une contrainte supplémentaire. En effet tout caractère de G dans \mathbb{C}^* est trivial, donc tout polynôme projectivement invariant par G est invariant ; en particulier f est invariant par G . Comme le groupe projectif linéaire est 3 fois transitif sur le plan, on peut choisir des coordonnées $[x, y, z]$ telles que les axes forment un triangle d'inflexion de \mathcal{C}_4 et que la tangente au point $[1, 0, 0]$ soit $y = 0$. Le polynôme f est alors de la forme

$$f = ax^3y + by^3z + cz^3x + xyz(ux + vy + wz). \quad (\text{V.27})$$

On sait aussi (voir V.2.1) qu'il existe un élément d'ordre 3 de G qui permute cycliquement les 3 points bases du système de coordonnées $[x, y, z]$. Un tel élément est nécessairement conjugué par une matrice diagonale de $GL(3, \mathbb{C})$ à la matrice r ci-dessous (équation V.28). En effectuant un changement diagonal de coordonnées (ce qui préserve la forme de f), on supposera donc que r est la permutation cyclique de x, y et z . L'invariance de f par r entraîne $a = b = c$ et $u = v = w$. Par ailleurs, chacun des points bases est fixé par un élément (diagonal) $h \in G$ d'ordre 7. Les termes diagonaux de h sont de la forme γ^k, γ^l et γ^m avec

k, l, m entiers et $\gamma = \exp(2i\pi/7)$. L'invariance de f par h implique $l = 4k$, $m = 2k$ et $u = 0$. Finalement, on obtient l'équation annoncée. \square

On peut en fait caractériser géométriquement les systèmes de coordonnées homogènes dans lesquels \mathcal{C}_4 a l'équation (V.27). Ce sont ceux pour lesquels $xyz = 0$ définit un triangle d'inflexion et (x, y, z) sont permutés cycliquement par un élément d'ordre 3 de G .

Nous noterons désormais f le polynôme $x^3y + y^3z + z^3x$. On tire également de la démonstration ci-dessus que le stabilisateur du triangle d'inflexion $xyz = 0$ est le sous-groupe non abélien G'_{21} d'ordre 21 de G (voir V.2.1), engendré par les matrices r et h suivantes :

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^4 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{V.28})$$

Pour compléter la description de G , il reste à trouver une involution s qui normalise r . En effectuant un changement de coordonnées, Klein obtient

$$s = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = i(\gamma^2 - \gamma^5)/\sqrt{7} = -\frac{2}{\sqrt{7}} \sin(\frac{3\pi}{7}), \\ b = i(\gamma^4 - \gamma^3)/\sqrt{7} = \frac{2}{\sqrt{7}} \sin(\frac{\pi}{7}), \\ c = i(\gamma - \gamma^6)/\sqrt{7} = -\frac{2}{\sqrt{7}} \sin(\frac{2\pi}{7}). \end{cases} \quad (\text{V.29})$$

Voici comment retrouver ce résultat. Tout d'abord, la relation $srs^{-1} = r^{-1}$ montre que s est de la forme (V.29). Ensuite, $s^2 = 1$ donne $ab+bc+ca = 0$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Il en résulte que la conique \mathcal{C}_2 dont une équation est $xy + yz + zx = 0$ est aussi stable par s . L'intersection de \mathcal{C}_2 avec \mathcal{C}_4 est formée des points $[1, \alpha, \alpha^2]$, $[1, \alpha^2, \alpha]$ ($\alpha = e^{2i\pi/3}$), des 3 points bases $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ et des 3 points $[a, b, c]$, $[b, c, a]$, $[c, a, b]$ où a, b, c sont définis par (V.29). Quitte à remplacer s par rs ou r^2s (ce qui revient à permuter cycliquement a, b, c), on voit donc que s est donnée par (V.29). Noter que l'on a aussi $a + b + c = -1$ et $abc = 1/7$.

Le normalisateur G'_6 de r dans G , engendré par r et s , est isomorphe au groupe symétrique S_3 (voir V.2.1). Il agit sur l'intersection $\mathcal{C}_4 \cap \mathcal{C}_2$ comme suit : les 2 triangles d'inflexion sont permutés cycliquement par r et échangés par s ; les contacts $B = [1, \alpha, \alpha^2]$ et $B' = [1, \alpha^2, \alpha]$ avec la droite $x + y + z = 0$ sont fixes par r et échangés par s qui stabilise donc cette bitangente. Comme le polynôme $x^2 + y^2 + z^2$ est invariant par s , chaque conique du faisceau

$$u(xy + yz + zx) + v(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \quad ([u, v] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1) \quad (\text{V.30})$$

est stable par G'_6 (c'est le faisceau des coniques bitangentes en B et B'). Par tout point $P \in \mathcal{C}_4$ passe une unique conique du faisceau dont l'intersection avec \mathcal{C}_4 contient l'orbite de P sous G'_6 , généralement formée de 6 points.

En utilisant plusieurs systèmes de coordonnées *ad hoc*, Klein retrouve un sous-groupe G''_{24} isomorphe au groupe symétrique S_4 , préalablement mis en évidence dans son étude de G [Kle1878c, § 1]. Ce sous-groupe permute arbitrairement 4 bitangentes et stabilise la conique \mathcal{C} du faisceau (V.30) correspondant à $u/v = (-1 + i\sqrt{7})/2$ (*ibid.* § 4-5). L'action de G sur \mathcal{C} définit une famille de 7 coniques desquelles Klein déduira ensuite une «résolvante de degré 7» (*ibid.* § 10).

V.2.3. Polynômes invariants

Après avoir construit un modèle projectif de $X(7)$, Klein revient sur la question fondamentale d'expliciter l'invariant modulaire dans ce contexte, c'est-à-dire la fonction de \mathcal{C}_4 dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ notée encore J dont les fibres sont les orbites du groupe G . Pour cela, il détermine tous les polynômes invariants par G (ce qui est aussi utile pour la suite), puis en déduit l'expression de J .

Pour trouver de nouveaux polynômes invariants à partir de f , Klein exploite sa connaissance des covariants. Soit $S_d(\mathbb{C}^3)$ le sous-espace de $\mathbb{C}[x, y, z]$ des polynômes homogènes de degré d . Un *covariant* est une application polynomiale $\Phi : S_d(\mathbb{C}^3) \rightarrow S_{d'}(\mathbb{C}^3)$ équivariante pour l'action du groupe spécial linéaire ; par exemple le hessien est un covariant avec $d' = 3(d - 2)$. Si $P \in S_d(\mathbb{C}^3)$ est invariant par G , alors $\Phi(P)$ l'est aussi. Ainsi Klein introduit trois polynômes G -invariants :

$$\nabla = \frac{1}{54} \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix}, \quad C = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} & \nabla'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} & \nabla'_y \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} & \nabla'_z \\ \nabla'_x & \nabla'_y & \nabla'_z & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } K = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} f'_x & \nabla'_x & C'_x \\ f'_y & \nabla'_y & C'_y \\ f'_z & \nabla'_z & C'_z \end{vmatrix}, \quad (\text{V.31})$$

de degrés respectifs 6, 14 et 21, avec $\nabla = 5x^2y^2z^2 - (xy^5 + x^5z + z^5y)$. Pour vérifier l'invariance, considérons trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{C}[x, y, z]$ et notons $\nabla(P), C(P, Q), K(P, Q, R)$ les polynômes obtenus en remplaçant (f, ∇, C) par (P, Q, R) dans (V.31). En posant $P \cdot u = P \circ u$ pour tout u dans $\text{GL}(3, \mathbb{C})$, on constate alors que

$$\nabla(P \cdot u) = (\det u)^2 \nabla(P) \cdot u, \quad (\text{V.32})$$

$$C(P \cdot u, Q \cdot u) = (\det u)^2 C(P, Q) \cdot u, \quad (\text{V.33})$$

$$K(P \cdot u, Q \cdot u, R \cdot u) = (\det u) K(P, Q, R) \cdot u. \quad (\text{V.34})$$

Proposition V.2.4. — *L'algèbre des polynômes invariants par G est engendrée par f, ∇, C et K .*

Démonstration. — Les intersections de la quartique \mathcal{C}_4 avec les courbes définies par ∇, C et K sont des réunions d'orbites du groupe G ; d'après le théorème de Bézout, elles comprennent respectivement 24, 56 et 84 points. Il s'agit donc des points d'inflexion ($\nabla = 0$), des contacts avec les bitangentes ($C = 0$) et des points sextactiques ($K = 0$). De plus, le quotient C^3/∇^7 définit une fonction méromorphe non constante et donc surjective de \mathcal{C}_4 vers $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Comme le degré de ∇^7 et C^3 est 42, l'intersection d'une courbe du type $\lambda\nabla^7 + \mu C^3 = 0$ avec \mathcal{C}_4 a au plus 168 points. D'autre part, comme C^3/∇^7 est G -invariante, les fibres sont des réunions d'orbites de G et par conséquent, elles sont de cardinal 168 (avec multiplicité). Comme une réunion d'orbites de G a un cardinal de la forme $24\alpha + 56\beta + 84\gamma + 168\zeta$, où $\alpha, \beta, \gamma = 0$ ou 1. La seule possibilité est qu'un seul des $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ soit non nul; autrement dit, chaque fibre est constituée d'exactlyement une orbite.

Toute orbite de G sur \mathcal{C}_4 est donc donnée par une courbe du pinceau $\lambda\nabla^7 + \mu C^3 = 0$ ($[\lambda, \mu] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$). Par suite si P est un polynôme G -invariant non proportionnel à f , l'intersection $\{P = 0\} \cap \mathcal{C}_4$ est une réunion finie de G -orbites et il existe $Q \in \mathbb{C}[\nabla, C, K]$ tel que $\{P = 0\} \cap \mathcal{C}_4$ coïncide avec l'intersection $\{Q = 0\} \cap \mathcal{C}_4$ (avec égalité des multiplicités). Alors P/Q définit une fonction holomorphe sur \mathcal{C}_4 , donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $P - \lambda Q = 0$ sur \mathcal{C}_4 . Par suite (prendre une carte affine) $P - \lambda Q$

appartient à l'idéal engendré par f et donc P appartient à $\mathbb{C}[f, \nabla, C, K]$. \square

En particulier, f , ∇ et K sont les seuls polynômes homogènes invariants (à un facteur près) de degré respectifs 4, 6 et 21. Par unicité, on voit que K est nécessairement le produit de 21 facteurs de degré 1 qui correspondent aux droites de points fixes des involutions de G (par exemple $(a+1)x + by + cz = 0$ pour s , équation (V.29)), chacune coupant \mathcal{C}_4 suivant 4 points sextactiques ; le groupe G permute ces 21 droites, d'où un polynôme invariant de degré 21.

L'orbite des points sextactiques (comptée 2 fois) est l'intersection de \mathcal{C}_4 avec une certaine courbe d'équation $\lambda \nabla^7 + \mu C^3 = 0$ et c'est évidemment l'intersection avec $K^2 = 0$. Il existe donc une relation de la forme $\lambda \nabla^7 + \mu C^3 + \nu K^2 = 0$ modulo f . En évaluant au point $[1, 0, 0]$, sachant que $C = x^{14} + y^{14} + z^{14} + \dots$ et $K = -(x^{21} + y^{21} + z^{21}) + \dots$, on trouve $\mu = -\nu$. Pour obtenir une autre relation, Klein évalue aux points de contacts avec les bitangentes, le calcul étant plus simple dans les coordonnées $[y_1, y_2, y_3]$ suivantes introduites pour l'étude des involutions [Kle1878c, § 5] :

$$-i\sqrt{3}\sqrt[3]{7}x = y_1 + \beta y_2 + \beta' y_3 \quad (\text{V.35})$$

$$-i\sqrt{3}\sqrt[3]{7}y = y_1 + \alpha^2 \beta y_2 + \alpha \beta' y_3 \quad (\text{V.36})$$

$$-i\sqrt{3}\sqrt[3]{7}z = y_1 + \alpha \beta y_2 + \alpha^2 \beta' y_3 \quad (\text{V.37})$$

avec $\alpha = e^{2i\pi/3}$, $\beta^3 = 7(3\alpha^2 + 1)$ et $\beta\beta' = 7$. Dans ces coordonnées, la bitangente $x + y + z = 0$ s'écrit $y_1 = 0$ et les points de contacts sont $[0, 1, 0]$ et $[0, 0, 1]$. Le polynôme $f(x, y, z)$ devient

$$F = 3^{-1}7^{-4/3}(y_1^4 + 21y_1^2y_2y_3 - 147y_2^2y_3^2 + 49y_1(y_2^3 + y_3^3)). \quad (\text{V.38})$$

Comme (V.35) définit un élément de $SL(3, \mathbb{C})$, on peut appliquer (V.32) pour calculer les transformés de ∇ , C et K directement à partir de F , ce qui conduit à $\nabla = 7^2y_3^6/3^3 + \dots$ et $K = -2^37^7y_3^{21}/3^9 + \dots$. D'où $\lambda + 12^3\nu = 0$ et finalement on trouve la relation

$$12^3\nabla^7 + C^3 - K^2 = 0 \pmod{f}. \quad (\text{V.39})$$

On pourra consulter [Adl1999, p. 262] pour une relation liant ∇ , C , K et f . Il est maintenant immédiat de déterminer la fonction J . On observe que la fonction $J\nabla^7/C^3$ est holomorphe sur \mathcal{C}_4 , donc constante ; sa valeur s'obtient en évaluant la relation (V.39) aux points sextactiques (sachant

que J vaut 1 en ces points), ce qui donne

$$J = -\frac{C^3}{12^3 \nabla^7} \quad \text{et} \quad j = -\frac{C^3}{\nabla^7}. \tag{V.40}$$

V.2.4. Triangles d'inflexion et résolvante de degré 8

L'étape suivante est essentielle [Kle1878c, § 8] : dans son étude systématique de l'action de G sur \mathcal{C}_4 , Klein étudie notamment l'action de G sur les triangles d'inflexion et retrouve une équation de degré 8 déjà résolue dans un article antérieur [Kle1878b, § 18] ; il s'agit de (V.19) liée à $X_0(7)$, voir § V.1.5. Nous détaillons maintenant tout ceci.

Rappelons que le stabilisateur du triangle d'inflexion $xyz = 0$ est le sous-groupe G'_{21} de G engendré par r et h (équations. (V.24) et (V.28)). Soit s l'involution définie par (V.29). Les classes à gauche modulo G'_{21} sont G'_{21} et $G'_{21}sh^k$ ($k = 0, \dots, 6$). L'action de G sur $\delta_\infty = -7xyz$ conduit aux polynômes suivants

$$\begin{aligned} \delta_k &= xyz + \gamma^{-k}(x^2y - z^3) + \gamma^{-4k}(y^2z - x^3) + \gamma^{-2k}(z^2x - y^3) \\ &\quad + 2\gamma^k z^2y + 2\gamma^{4k} x^2z + 2\gamma^{2k} y^2x \quad (k = 0, \dots, 6) \end{aligned}$$

qui déterminent les 8 triangles d'inflexion de \mathcal{C}_4 (avec $\gamma = e^{2i\pi/7}$). Par suite, les coefficients de $P = (\delta - \delta_\infty) \prod_{k=0}^6 (\delta - \delta_k)$ comme polynôme en δ sont des polynômes invariants par G . En tenant compte des degrés, on a nécessairement

$$P = \delta^8 + a_6 \nabla \delta^6 + a_4 \nabla^2 \delta^4 + a_2 \nabla^3 \delta^2 + a_1 K \delta + a_0 \nabla^4 = 0 \pmod{f} \tag{V.41}$$

où les a_j sont des constantes. Klein indique que l'on peut déterminer les coefficients a_j par identification.

Pour alléger un peu les calculs, on peut aussi les trouver en évaluant (V.41) en des points bien choisis. Les coefficients de P correspondent aux fonctions symétriques des polynômes (V.2.4), donc sont à coefficients réels ; le coefficient de δ^6 est proportionnel à ∇ (unique polynôme invariant de degré 6 à constante près), les autres sont de la forme (V.41) seulement modulo f . En prenant (x, y, z) égal à $(1, 1, 1)$ puis à $(1, \alpha, \alpha^2)$ (avec $\alpha = e^{2i\pi/3}$), $a_6 = -14$ et $a_0 = -7$. Avec le point d'inflexion $(1, 0, 0)$ et $\delta = \delta_0$, on a immédiatement $a_1 = -1$ car $K(1, 0, 0) = \delta_0(1, 0, 0) = -1$. On voit que les valeurs de (V.2.4) sur les inflexions vérifient $\delta^8 + \delta = 0$. Enfin, sachant que les a_j sont réels, on obtient $a_2 = -70$ et $a_4 = 63$ avec $\delta = \delta_\infty$ et $(x, y, z) = (1, \alpha, \alpha^2)$ (la valeur $K(1, \alpha, \alpha^2)$ se calcule grâce

au changement de coordonnées (V.35), voir § V.2.3). Finalement, en un point $[x, y, z] \in \mathcal{C}_4$, les polynômes δ_∞ et δ_k ($k = 0, \dots, 6$) sont racines de

$$\delta^8 - 14\nabla\delta^6 + 63\nabla^2\delta^4 - 70\nabla^3\delta^2 - K\delta - 7\nabla^4 = 0. \quad (\text{V.42})$$

Cette équation est à rapprocher de (V.19). On a $12^3(J-1) = -K^2/\nabla^7$ sur \mathcal{C}_4 . Par suite si δ est une racine de (V.42), alors $\delta/\sqrt{-\nabla}$ est une racine de (V.19) – pour une détermination convenable de la racine carrée – et son carré $-\delta^2/\nabla$ est une racine de (V.18) qui décrit la fibre de $X_0(7) \rightarrow X(1)$, voir paragraphe V.1.5. En fait Klein commence par montrer que les solutions de « l'équation modulaire » (V.18) s'expriment comme fonctions rationnelles d'un point de la courbe \mathcal{C}_4 (à savoir $-\delta_\infty^2/\nabla$ et $-\delta_k^2/\nabla$, $k = 0, \dots, 6$), puis en déduit la relation (V.42). On notera que $-\delta_\infty^2/\nabla$ induit un isomorphisme de $G'_{21} \setminus \mathcal{C}_4 \simeq X_0(7)$ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

V.2.5. Conclusion

L'équation modulaire (V.42), ou résolvante de degré 8, possède une propriété remarquable mise en évidence par Jacobi [Jac1828, p. 308] : les racines carrées de ses 8 solutions, avec des déterminations convenables, dépendent linéairement de 4 paramètres.

Il est facile de le retrouver à partir des expressions (V.2.4). En suivant Klein, posons pour $[x, y, z] \in \mathcal{C}_4$

$$A_0 = \sqrt{xyz}, \quad A_1 = \sqrt{-y^3 - z^2x}, \quad A_2 = \sqrt{-z^3 - x^2y} \quad \text{et} \quad A_3 = \sqrt{-x^3 - y^2z}. \quad (\text{V.43})$$

Alors, quitte à changer les signes de A_1 , A_2 ou A_3 , on aura $A_0A_1 = x^2y$, $A_0A_2 = y^2z$ et $A_0A_3 = z^2x$. Puis $A_1A_2 = xy^2$, $A_2A_3 = yz^2$, $A_3A_1 = zx^2$ et les équations (V.2.4) des triangles d'inflexion se mettent sous la forme⁽¹¹⁾

$$\sqrt{\delta_\infty} = \sqrt{-7A_0}, \quad (\text{V.44})$$

$$\sqrt{\delta_k} = A_0 + \gamma^{-k}A_1 + \gamma^{-4k}A_2 + \gamma^{-2k}A_3, \quad (k = 0, \dots, 6). \quad (\text{V.45})$$

Rappelons que $\delta_\infty/\sqrt{-\nabla}$ et $\delta_k/\sqrt{-\nabla}$ sont solutions de (V.19). Il ne reste plus qu'à exprimer les rapports $A_1/A_0 = x/z$, $A_2/A_0 = y/x$ et $A_3/A_0 = z/y$ en fonction des rapports $\sqrt{\delta_k}/\sqrt{\delta_\infty}$, c'est-à-dire en fonction des solutions w_∞ et w_k ($k = 0, \dots, 6$) de l'équation (V.19), pour obtenir un paramétrage de \mathcal{C}_4 au moyen de la seule variable q . Le choix des signes pour

11. Klein donne également une interprétation de ces formules à l'aide d'une famille à 4 paramètres de « cubiques de contacts » qui contient les triangles d'inflexion, [Kle1878c, § 9].

les racines carrées peut se déterminer en éliminant les A_j de (V.44). Nous prendrons (voir équation (V.20)) :

$$\sqrt{w_\infty}/\sqrt{-7} = -q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{7n}}{1-q^n}, \tag{V.46}$$

$$\sqrt{w_k} = \gamma^{-2k} q^{-1/28} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-\gamma^{nk} q^{n/7}}{1-q^n} \quad (k = 0, \dots, 6). \tag{V.47}$$

Évidemment, il eût été possible d'exprimer les A_j/A_0 ($j = 1, 2, 3$) directement en fonction des δ_k/δ_∞ ($k = 0, \dots, 6$) à partir de (V.2.4).

Le passage par les racines carrées permet d'utiliser l'identité pentagonale d'Euler (voir par exemple [McKMo1997, p. 143]), à savoir

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n(3n+1)/2}, \tag{V.48}$$

alors que le développement de $\prod_{n \geq 1} (1-q^n)^2$ n'est pas aussi agréable. Des relations (V.44) on tire $7A_1 = \sum_{0 \leq k \leq 6} \gamma^k \sqrt{\delta_k}$ et $A_0 = \sqrt{\delta_\infty}/\sqrt{-7}$, d'où (compte tenu de (V.46) et (V.48)) :

$$\begin{aligned} 7q^{2/7} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{7n}) \frac{A_1}{A_0} &= -\sum_{k=0}^6 \gamma^{-k} \prod_{n=1}^{\infty} (1-\gamma^{nk} q^{n/7}) \\ &= -\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{14}} \sum_{k=0}^6 (\gamma^{\frac{n(3n+1)}{2}} - 1)^k. \end{aligned} \tag{V.49}$$

La somme sur k est nulle sauf si $n(3n+1)/2 - 1$ est divisible par 7 (elle vaut alors 7). C'est le cas seulement si n est de la forme $7m+3$ ou $7m+6$ et si $n(3n+1)/14$ vaut $1/7+(21m^2+19m+4)/2$ ou $1/7+(21m^2+37m+16)/2$. Par un calcul analogue pour A_j/A_0 ($j = 2, 3$), on obtient finalement les formules du théorème V.0.6.

À permutation près des variables x, y, z et en remplaçant $q^{1/2}$ par la valeur $q = e^{i\pi\tau}$, ce sont les formules données par Klein⁽¹²⁾ dans [Kle1878c, § 9].

On pourra également consulter avec intérêt [Elk1999, p. 84] qui décrit un paramétrage direct (*via* le plongement canonique, voir § V.2.2) par des

12. Il reprend la question dans [Kle1880b] pour obtenir des formules plus agréables, exprimées au moyen des valeurs partielles des fonctions thêta et permettant de plus un traitement unifié pour les transformations d'ordre 5, 7 et 11.

1-formes sur $X(7)$:

$$x, y, z = \varepsilon q^{a/7} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^3 (1 - q^{7n}) \prod_{n>0, n \equiv \pm n_0 \pmod{7}} (1 - q^n)$$

avec $q = e^{2i\pi\tau}$, le triplet (ε, a, n_0) valant $(-1, 4, 1)$ pour x , $(1, 2, 2)$ pour y et $(1, 1, 4)$ pour z . Dans cette présentation, les polynômes invariants par G définissent des formes modulaires paraboliques pour $SL(2, \mathbb{Z})$ et peuvent ainsi être reliés facilement à la variable q . Ainsi $x^3y + y^3z + z^3x = 0$ ou encore $\nabla(x, y, z)$ est proportionnel au discriminant Δ .

PARTIE B

Méthode de continuité

Les années 1880–1882 sont cruciales pour notre sujet. Klein et Poincaré énoncent puis « démontrent » que *toutes les courbes algébriques de genre au moins 2 peuvent être uniformisées par le disque*. C'est une grande surprise pour les mathématiciens de l'époque. On connaissait des exemples – nous en avons vu quelques-uns – mais la généralité du résultat semble incroyable. Aujourd'hui encore cela reste un fait majeur et hautement non trivial de la géométrie des courbes algébriques, au point qu'un grand nombre de mathématiciens le connaissent « si bien » qu'ils en oublient le caractère non trivial et le confondent trop souvent avec deux autres théorèmes certes importants, mais bien plus anciens (et bien plus simples) : le *théorème de Riemann* (dont nous verrons que la première preuve convaincante est due à Osgood) selon lequel un ouvert (non trivial) simplement connexe du plan est conformément équivalent au disque et le *théorème de Gauss* (souvent pensé à tort comme dû à Riemann) selon lequel une surface (analytique réelle) est localement conforme à un ouvert du plan.

Même si cet ouvrage n'est pas un livre d'histoire, une brève présentation des protagonistes n'est pas inutile.

En 1880, Poincaré est un jeune maître de conférences de 26 ans. Il a soutenu sa thèse deux ans auparavant et son thème de recherche est celui des équations différentielles. Il est indiscutable que ce sont les équations différentielles qui ont été à l'origine de presque toutes ses découvertes ultérieures. En 1878 l'Académie des sciences de Paris propose justement comme sujet de concours, pour le Grand prix des sciences mathématiques à décerner en 1880, la question suivante :

« Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante. » Alors que quelques mois auparavant, il avait fondé la théorie qualitative des systèmes dynamiques⁽¹³⁾, Poincaré se lance donc dans l'étude des équations différentielles en une variable. Il soumet un premier mémoire en mars 1880 sur la théorie réelle ; mémoire qu'il retire en juin de la même année. Entre temps Poincaré prend connaissance – en mai 1880 – d'un article de Fuchs sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients algébriques. Le mémoire que soumet finalement Poincaré à l'Académie – en juin 1880 – contient des réflexions inspirées par l'article de Fuchs ; il est reproduit dans [Poin1951], tome I, pages 336–373. Dans le travail qui interpelle Poincaré, Fuchs s'applique à généraliser l'inversion de Jacobi. Il considère en particulier la fonction inverse du quotient de deux solutions indépendantes d'une équation différentielle du second ordre et donne une condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction soit méromorphe. Alors que la théorie de Fuchs est essentiellement locale, ce résultat frappe Poincaré mais ne le convainc pas. Il comprend en effet que le résultat de Fuchs est une forme (trop forte) d'uniformisation⁽¹⁴⁾. Quoi qu'il en soit, à cette époque, Poincaré essaye de comprendre les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients algébriques *via* la théorie de Fuchs. Et c'est dans ce but qu'il crée les groupes fuchsien. La première partie de cette belle histoire⁽¹⁵⁾ est absente de ce livre. Heureusement, l'existence de [Poin1997] nous excuse un peu. On peut résumer ces premiers mois en disant que Poincaré s'engouffre avec tout son génie mais aussi avec « naïveté » dans cette nouvelle théorie. Sa correspondance avec Klein montrera par exemple qu'il n'avait pas lu Riemann à cette époque !

13. À cette occasion Poincaré ressent d'ailleurs le besoin de développer une théorie autonome de la topologie (ce qu'il fera plus tard, comme on le sait).

14. Le lendemain de l'envoi de son mémoire à l'Académie, Poincaré envoie d'ailleurs à Fuchs la première d'une série de lettres où le jeune maître de conférences tente – sans succès – d'expliquer au professeur Fuchs qu'un difféomorphisme local n'est pas nécessairement un revêtement. Notons d'ailleurs que, tout au long de son travail sur l'uniformisation, l'aisance de Poincaré avec ce qui n'est pas encore la théorie des revêtements est certainement un atout essentiel. Au point que certains ont voulu voir dans la construction du revêtement universel le principal apport de Poincaré au problème. Nous verrons cependant que cette dernière assertion est largement exagérée.

15. Partie constituée du mémoire envoyé à l'Académie mais aussi des trois suppléments découverts par Gray en 1979 puis publiés et analysés dans [Poin1997].

Klein a six ans de plus que Poincaré. Il est professeur depuis déjà dix ans. Il est probablement le mathématicien le plus en vue de son époque et sa culture mathématique est immense. Il est certainement l'un des plus fins connaisseur des travaux de Riemann et il connaît parfaitement la théorie des fonctions elliptiques. Il est l'un des propagateurs les plus influents de l'idée de groupe en mathématiques : son « programme d'Erlangen » de 1872 à l'occasion de sa nomination comme professeur (à 23 ans) montre une lucidité étonnante. Il a publié des articles majeurs sur l'uniformisation de quelques exemples de courbes algébriques, d'origine arithmétique. Il est aussi celui qui a établi le caractère projectif (réel) de la géométrie non euclidienne. Lorsque le professeur Klein prend connaissance des premières notes de Poincaré sur les groupes fuchsien (datées de février 1881), il est visiblement stupéfait à la fois par la généralité des constructions de Poincaré et par sa méconnaissance de la littérature sur le sujet, allemande en particulier. Le 12 juin 1881, il commence une correspondance passionnante avec son jeune collègue de l'autre côté du Rhin, qui se déroulera jusqu'au 22 septembre 1882.

Nous reproduisons en appendice cette correspondance célèbre et nous en recommandons vivement la lecture. On peut y voir l'affrontement (scientifique!) entre un débutant et un professeur établi, teinté de connotations politiques sous-jacentes. On peut y voir également le respect mutuel croissant au fil des lettres. Mais on peut surtout y voir la genèse de ce théorème d'uniformisation, qui se précise presque au jour le jour. On ne peut que constater que le génie de Poincaré force le respect de Klein qui le reconnaîtra bien volontiers plus tard.

Les premières fonctions fuchsien que Poincaré construit (note du 23 mai 1881, [Poin1951], t. II, p. 12–15) uniformisent les surfaces obtenues en privant une sphère d'un nombre fini de points *réels* (Poincaré autorise aussi les singularités orbifoldes). Comme Klein lui fera remarquer, il retrouve ainsi les fonctions construites par Schwarz (voir le chapitre IV). La méthode suivie par Poincaré est toutefois fort différente. Poincaré considère les groupes (fuchsien) engendrés par les réflexions par rapport aux côtés de polygones hyperboliques idéaux à n côtés. Ces groupes dépendent de $n - 3$ paramètres réels $1 < x_1 < \dots < x_{n-3}$ et Poincaré identifie l'espace de ces groupes avec l'espace des modules des sphères privées de n points réels. C'est une première apparition de

la *méthode de continuité*⁽¹⁶⁾. Force est de constater que « dès le début Poincaré a une avance que Klein ne peut plus rattraper » [Freu1955]. Le 8 août 1881 Poincaré annonce d'ailleurs ([Poin1951], t. II, p. 29–31) :

On en conclut :

1. Que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes ;
2. Que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions d'une variable auxiliaire.

C'est la première fois que le théorème d'uniformisation est énoncé. Il faut toutefois tempérer un peu l'enthousiasme du jeune Poincaré. Ce qu'il démontre vraiment (et complètement rigoureusement) est sensiblement plus faible : *toute courbe algébrique peut être « uniformisée » par une fonction du disque vers la courbe qui évite au plus un nombre fini de points*. Pour Poincaré, motivé par l'intégration des équations différentielles au moyen de fonctions définies par des séries explicites, éviter un nombre fini de points n'est pas un problème. Surtout que la démonstration est ici particulièrement simple et élégante : étant donnée une courbe algébrique ramifiée au-dessus de la sphère, quitte à enlever les points de ramifications, on obtient un revêtement au-dessus de la sphère privée d'un nombre fini de points. Ne reste plus alors qu'à démontrer que quitte à ôter de la sphère un nombre fini de points supplémentaires, celle-ci revêt une sphère privée de points *réels*. Cette dernière étape est un exercice élémentaire que l'on recommande au lecteur.

C'est en fait à Klein que revient l'honneur d'énoncer le théorème d'uniformisation des courbes algébriques tels que nous l'entendons maintenant. Klein, moins intéressé par les équations différentielles, préfère en effet les polygones finis. Sa connaissance intime des travaux de Riemann lui permet en outre d'identifier le nombre de modules de courbes d'un genre fixé aux nombres de paramètres dont dépendent les polygones de Poincaré de même genre. Il est donc plus naturellement amené à dégager le « bon énoncé » (voir Freudenthal [Freu1955] et Scholz [Schol1980]), « c'est le seul point essentiel où Klein, dans les recherches sur les fonctions automorphes, a dépassé Poincaré » [Freu1955]. Le grand

16. La méthode de continuité, telle que pensée par Poincaré, est explicitement décrite dans le cas des sphères privées de 4 points dans le chapitre IX. Nous laissons au lecteur l'exercice de vérifier que la méthode se simplifie considérablement lorsque les 4 points sont réels.

principe est encore la méthode de continuité, mais celle-ci est difficile à mettre en œuvre dans cette généralité. La correspondance entre Klein et Poincaré montre bien comment chacun la présente selon son point de vue.

Klein constate donc que la construction des groupes fuchsien par Poincaré produit des courbes algébriques uniformisables et que celles-ci dépendent d'un nombre de paramètres égal à celui de l'espace des modules de courbes d'un genre fixé. Il constate par ailleurs que si une surface de Riemann peut être uniformisée, elle l'est d'une seule façon. Il s'agit donc de montrer que l'espace des courbes uniformisables est à la fois ouvert et fermé. La question de la connexité de l'espace des modules est mentionnée par Klein comme démontrée dans son livre [Kle1882c] que nous avons déjà décrit⁽¹⁷⁾.

Poincaré quant à lui s'intéresse aux équations différentielles linéaires du second ordre sur une courbe algébrique et il montre que leur description dépend d'une représentation de « monodromie » du groupe fondamental (qu'il n'a pas encore « inventé ») dans $SL(2, \mathbb{C})$. Lorsqu'on fait varier l'équation différentielle sur une courbe algébrique fixe, la représentation varie. Dans les exemples de courbes uniformisables (donnés par les groupes fuchsien) l'une de ces équations différentielles est privilégiée et possède un groupe de monodromie réel : Poincaré la qualifie de *fuchsienne*. Il affirme alors que toutes les courbes algébriques possèdent une telle équation fuchsienne et que ceci permet de montrer que sa construction de groupes fuchsien est assez flexible pour décrire toutes les courbes algébriques. La « preuve » qu'il propose contient également une composante consacrée à l'ouverture et une autre à la fermeture. L'attachement de Poincaré aux polygones idéaux lui permet certainement de mieux cerner les difficultés liées à la fermeture, voir [Schol1980].

Klein et Poincaré ont décrit plus tard cette période de leurs vies. Le texte de Poincaré sur l'« invention mathématique », datant de 1908, est célèbre [Poin1908]. Il décrit la découverte du lien entre les équations différentielles et la géométrie hyperbolique, antérieure au premier contact épistolaire avec Klein.

A ce moment, je quittai Caen, que j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des mines. Les péripéties du voyage

17. Sa « preuve » ne nous convainc guère.

me firent oublier mes travaux mathématiques; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade. Au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsienues étaient identiques à celles de la géométrie non euclidienne. Je ne fis pas la vérification, je n'en aurais pas eu le temps puisqu'à peine dans l'omnibus je repris la conversation commencée; mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.

Il est indiscutable que Poincaré avait compris l'essentiel de la théorie avant le début de sa correspondance avec Klein. Dans son troisième supplément au mémoire pour le prix de l'Académie, soumis le 20 décembre 1880, il « conjecture » que les fonctions fuchsienues permettent de résoudre *toutes* les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques [Poin1997] :

Je ne doute pas d'ailleurs que les nombreuses équations envisagées par M. Fuchs dans son mémoire inséré au tome 71 du Journal de Crelle ... ne fournissent une infinité de transcendentes ... et que ces fonctions nouvelles ne permettent d'intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

On notera cependant l'absence de formulation en termes d'uniformisations de courbes algébriques.

Quant à Klein, dans son livre sur le développement des mathématiques au dix-neuvième siècle [Kle1928], il explique :

Pendant la dernière nuit de mon séjour, celle du 22 au 23 mars [1882], que j'ai passé assis sur un divan à cause d'une crise d'asthme, m'est apparu subitement vers trois heures et demi le théorème central tel qu'il est ébauché dans la figure du polygone à 14 côtés. Le lendemain matin, dans la diligence qui à l'époque circulait entre Norden et Emden, j'ai réfléchi à ce que j'avais trouvé examinant encore une fois tous les détails. Je savais, maintenant, que j'avais trouvé un théorème important. Arrivé à Düsseldorf, j'ai rédigé le mémoire, daté du 27 mars, envoyé à Teubner et fait transmettre les épreuves à Poincaré et à Schwarz, ainsi qu'à Hurwitz.

Dans [Kle1921a, p. 577-586, vol. 3], il ajoute par ailleurs qu'il considère que ni lui ni Poincaré n'avaient obtenu de preuve complète et que la preuve par la méthode de continuité n'a été solidement établie qu'en 1912 par Koebe [Koe1912]. Il décrit également cet épisode de sa vie

comme « la fin de sa période productive ». Il tombera d'ailleurs malade à l'automne 1882⁽¹⁸⁾.

Cette seconde partie du livre n'apporte malheureusement qu'une contribution superficielle à la description de cette aventure mathématique. Le bel article de Freudenthal [Freu1955] nous a servi de point de départ. Le livre de Klein [Kle1928] est une référence incontournable sur l'histoire des mathématiques au dix-neuvième siècle, écrite par un des héros de notre ouvrage. En complément, le lecteur pourra également consulter le chapitre correspondant du livre historique de J. Gray [Gra1986], l'analyse remarquable par J. Dieudonné [Die1982], l'introduction aux trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsienues [Poin1997], les commentaires de J. Stillwell attachés à sa traduction en anglais des articles de Poincaré sur les fuchsions fuchsienues [Poin1985], le chapitre correspondant de l'impressionnante thèse de Chorlay [Cho2007], les commentaires joints à la traduction de la correspondance Klein-Poincaré [Poin1989] ou encore l'article de Fricke [Fric1901] dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Citons enfin un article d'Abikoff [Abi1981] intéressant du point de vue mathématique mais dont nous ne retiendrons, pour ce qui est de l'analyse historique, que son interprétation de la réception par Hurwitz, Schwarz et Poincaré de sa démonstration du théorème d'uniformisation.

– Hurwitz : I accept it without reservation.

– Schwarz : It's false.

– Poincaré : It's true. I knew it and I have a better way of looking at the problem.

Le chapitre VI est une introduction aux groupes fuchsienues. On y trouvera par exemple des constructions de groupes fuchsienues associés à des polygones fondamentaux, ainsi que la construction de formes automorphes et de fonctions fuchsienues invariantes par l'action des

18. « Leipzig seemed to be a superb outpost for building the kind of school he now had in mind : one that would draw heavily on the abundant riches offered by Riemann's geometric approach to function theory. But unforeseen events and his always delicate health conspired against this plan. [In him were] two souls [...] one longing for the tranquil scholar's life, the other for the active life of an editor, teacher, and scientific organiser. [...] It was during the autumn of 1882 that the first of these two worlds came crashing down upon him [...] his health collapsed completely, and throughout the years 1883-1884 he was plagued by depression » [Row1989].

groupes fuchsien. Comme références actuelles sur les groupes fuchsien, on peut indiquer les livres [Kat1992] et [Bea1983], le second étudiant aussi leur généralisation en dimension quelconque : groupes discrets d'isométries de l'espace hyperbolique, notamment les groupes kleinéens en dimension 3. On peut aussi indiquer [Dal2007] et [Mas1988] sur les groupes kleinéens. L'article [Mas1971] donne la première preuve complète et correcte du théorème du polygone de Poincaré (théorème VI.1.10).

Le chapitre VII est une variation autour de l'approche « à la Klein » et aucune tentative n'a été faite pour nous prononcer sur la validité des preuves proposées par Klein⁽¹⁹⁾. Nous proposons une « reconstitution » de ce qu'aurait pu être une preuve du théorème d'uniformisation des courbes algébriques suivant les lignes de la méthode de continuité du point de vue de Klein. Cette preuve utilise des outils développés postérieurement mais sous une forme faible. En résumé, ce chapitre VII est en quelque sorte l'article que Klein aurait pu écrire en ayant plus d'outils à disposition. La littérature sur les représentations des groupes de surfaces, depuis une vingtaine d'années, devient énorme. L'article [GolW1988] est une référence importante pour les questions évoquées dans ce chapitre. Pour une présentation plus proche des idées de Klein, on peut aller voir le livre classique [FrKl1897].

Le chapitre VIII est une introduction à l'approche de Poincaré. Nous y expliquons comment la théorie de l'uniformisation peut s'exprimer en termes d'équations différentielles linéaires du second ordre puis nous donnons une preuve de l'ouverture de l'espace des courbes uniformisables. Pour cela, il nous faut compléter quelques arguments de Poincaré, mais de manière relativement légère. Quant à l'approche par Poincaré de la fermeture, nous ne l'expliquons pas parce qu'elle ne nous convainc pas, mais aussi parce que nous ne voyons pas comment on pourrait la « réparer » sans utiliser essentiellement les arguments utilisés au chapitre VII.

Enfin, le chapitre IX contient la mise en œuvre de l'approche de Poincaré dans des cas particuliers, ainsi que des ouvertures sur la postérité

19. Disons simplement que son approche de la fermeture ne nous paraît pas convaincante.

de ces méthodes. On y trouvera notamment des cas explicites d'uniformisation obtenus par Schwarz dans son étude de l'équation hypergéométrique.

Comme nous l'avons déjà expliqué, le théorème d'uniformisation ne se limite pas au cas des courbes algébriques. Enhardi par ce « cas particulier » (pourtant déjà incroyablement général), Poincaré cherchera à le généraliser à toutes les surfaces de Riemann simplement connexes, qui ne sont pas nécessairement les revêtements universels de surface compactes. Il n'y a plus d'espace de modules de dimension finie, plus de groupes de monodromie. Koebe et Poincaré y parviendront en 1907, comme nous l'expliquerons dans la troisième partie.

Groupes fuchsien

Dans ses articles de 1882-1886 à *Acta Mathematica*, Poincaré propose de nouvelles « transcendant

es » sur le modèle des fonctions elliptiques (chapitre I). La motivation initiale de Poincaré était de développer globalement les solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques en séries entières. Les travaux récents de Fuchs sur les points singuliers des équations linéaires [Fuc1880, Fuc1881] montraient que les solutions s'expriment comme fonctions analytiques d'une variable finiment ramifiée, $z^{1/q}$, ou infiniment ramifiée, $\log(z)$ (ce qui correspond à « $q = \infty$ »). Poincaré cherche un analogue global, tout d'abord sous la forme du revêtement universel de $\mathbb{C}P^1$ privé d'un nombre fini de points, contenant les points singuliers de l'équation différentielle ; puis, au fur et à mesure des notes publiées aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* entre février 1881 et avril 1882, on voit l'énoncé se préciser, jusqu'au revêtement universel d'une surface de Riemann compacte avec « structure orbifold ». Nous exposons tout d'abord sa construction de groupes fuchsien.

VI.1. Groupes fuchsien, polygone fondamental et pavage hyperbolique

On rappelle que \mathbb{H} désigne le demi-plan de Poincaré

$$\mathbb{H} = \{x + \sqrt{-1}y = z \in \mathbb{C} ; y > 0\}$$

muni de la métrique hyperbolique $y^{-2}dzd\bar{z}$. Les géodésiques sont les demi-cercles centrés sur l'axe réel $y = 0$ et les demi-droites verticales.

Occasionnellement, on utilisera aussi le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ muni de la métrique hyperbolique $4(1-|z|^2)^{-2} dz d\bar{z}$, pour lequel les géodésiques sont les arcs de cercles et les segments orthogonaux au cercle unité $\partial\mathbb{D}$.

VI.1.1. Isométries du demi-plan de Poincaré

Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit sur \mathbb{H} par transformations homographiques : $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c et d sont des nombres réels satisfaisant $ad - bc = 1$. Cette action est isométrique pour la métrique hyperbolique. Rappelons également que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ coïncide avec le groupe des difféomorphismes holomorphes de \mathbb{H} .

Il existe trois types d'éléments dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, caractérisés par leurs points fixes sur $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ (on considère ici \mathbb{H} comme un disque de la sphère de Riemann si bien que $\partial\mathbb{H}$ contient un point à l'infini). Le premier type est constitué de transformations dites *elliptiques*. Elles sont caractérisées par l'inégalité $|a + d| < 2$ et ont la propriété d'avoir un unique point fixe sur $\overline{\mathbb{H}}$, qui se situe en fait dans \mathbb{H} . Toute transformation elliptique est conjuguée à $z \mapsto \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} \frac{z + \sin \theta}{z + \cos \theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ (il est en fait plus commode de se placer dans le modèle du disque, où les transformations elliptiques sont conjuguées à des rotations $z \mapsto e^{i\theta} z$). Notons qu'une transformation elliptique engendre un sous-groupe relativement compact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Le second type d'isométries est caractérisé par l'inégalité $|a + d| > 2$. Ces transformations sont dites *hyperboliques*, et à conjugaison près dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, elle sont de la forme $z \mapsto \lambda z$, avec $\lambda > 0$ et différent de 1. Une telle transformation φ possède exactement deux points fixes distincts dans $\overline{\mathbb{H}}$, situés sur $\partial\mathbb{H}$. L'un de ces points fixes (noté p^+) est attractif, l'autre (noté p^-) est répulsif, au sens suivant : si $z \in \overline{\mathbb{H}}$ est différent de p^- , alors $\varphi^n(z)$ tend vers p^+ lorsque n tend vers $+\infty$. De même, si $z \in \overline{\mathbb{H}}$ est différent de p^+ , alors $\varphi^n(z)$ tend vers p^- lorsque n tend vers $-\infty$. La géodésique hyperbolique reliant p^+ à p^- est appelée *l'axe* de φ .

Enfin, les éléments de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ différents de l'identité et satisfaisant $|a + d| = 2$ sont dits *paraboliques*. Une transformation parabolique φ est conjuguée dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ à $z \mapsto z \pm 1$. Elle a un unique point fixe p dans $\overline{\mathbb{H}}$, qui est en fait situé sur $\partial\mathbb{H}$. Si $z \in \overline{\mathbb{H}}$, alors $\varphi^n(z)$ tend vers p lorsque n tend vers ∞ .

VI.1.2. Groupes fuchsien

On appellera *groupe fuchsien* tout sous-groupe discret Γ de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Proposition VI.1.1. — *Un sous-groupe Γ de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ est discret si et seulement s'il agit discontinûment sur \mathbb{H} , i.e. si toutes ses orbites sont discrètes.*

Démonstration. — Le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit librement et transitivement sur le fibré unitaire tangent $U\mathbb{H}$. Par suite, Γ est discret si et seulement s'il agit discrètement sur $U\mathbb{H}$. Comme les fibres de la projection $U\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ sont compactes, les orbites sont discrètes dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ si et seulement si elles le sont dans \mathbb{H} . □

VI.1.3. Polygone fondamental et pavage

On appellera *polygone* $P \subset \mathbb{H}$ une partie convexe fermée à bord géodésique par morceaux, le nombre d'arcs géodésiques étant localement fini dans \mathbb{H} . On appelle *côté* chaque arc géodésique maximal contenu dans le bord de P . L'intersection de deux côtés est ou bien vide, ou bien réduite à un point ; on appelle *sommet* de P l'intersection de deux côtés. On dira que P est *fini* lorsqu'il n'a qu'un nombre fini de côtés.

On appelle *polygone fondamental* pour le groupe fuchsien Γ tout polygone $P \subset \mathbb{H}$ tel que l'orbite $\Gamma(z)$ de tout point $z \in \mathbb{H}$ intersecte P en au moins un point et intersecte l'intérieur $\overset{\circ}{P}$ en au plus un point. Autrement dit, l'ensemble des translatés $\varphi(P)$, $\varphi \in \Gamma$, définit un *pavage* du plan hyperbolique :

$$\bigcup_{\varphi \in \Gamma} \varphi(P) = \mathbb{H} \text{ et } \varphi(\overset{\circ}{P}) \cap \psi(\overset{\circ}{P}) = \emptyset \text{ pour tous } \varphi \neq \psi.$$

L'ensemble des pavés $\{\varphi(P) ; \varphi \in \Gamma\}$ est alors en bijection avec Γ . Nous avons vu l'exemple classique de pavage pour $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ au chapitre précédent (figure V.1, page 162). La figure VI.1 en présente deux autres.

Théorème VI.1.2. — *Soit $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ un groupe fuchsien et soit z_0 un point de \mathbb{H} qui n'est fixé par aucun élément non trivial de Γ . Alors l'ensemble*

$$P = \{z \in \mathbb{H} ; d_{\text{hyp}}(z, z_0) = d_{\text{hyp}}(z, \Gamma(z_0))\}$$

des points $z \in \mathbb{H}$ qui sont plus proches de z_0 que de tout autre point de l'orbite $\Gamma(z_0)$ est un polygone fondamental convexe pour Γ . De plus, P est fini dès que Γ est de type fini.

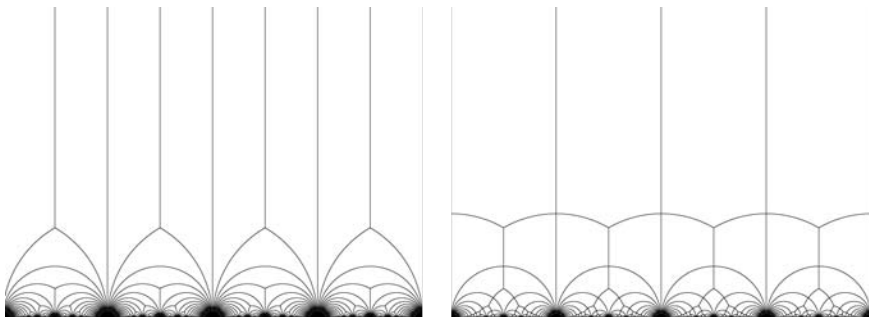


FIGURE VI.1. Deux autres pavages pour $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ (variantes)

Poincaré ne considère que des groupes fuchsien de type fini et admet, dans ce cas, l'existence d'un domaine fondamental bordé par un nombre fini d'arcs de courbes; il explique alors comment le modifier pour le rendre polygonal. Il semble que Poincaré ait omis ici une vraie difficulté. Signalons qu'il existe des groupes discrets de type fini dans $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ n'admettant pas de polyèdre fondamental fini dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 (voir [BoOt1988]). Nous donnons ici la construction du domaine de Dirichlet pour un groupe fuchsien quelconque. Il est fini dès que le groupe fuchsien est de type fini, mais nous renvoyons à [Dal2007] pour la démonstration de ce dernier point.

Démonstration sans la finitude. — Soit z_0 un point de \mathbb{H} qui n'est fixé par aucun élément non trivial de Γ et considérons l'ensemble P des points $z \in \mathbb{H}$ qui sont plus proches de z_0 que de tout autre point de l'orbite $\Gamma(z_0)$:

$$P = \{z \in \mathbb{H} ; d_{\text{hyp}}(z, z_0) = d_{\text{hyp}}(z, \Gamma(z_0))\}.$$

Tout d'abord, puisque Γ est fuchsien, l'orbite $\Gamma(z_0)$ est discrète et P contient un voisinage de z_0 . Maintenant, notons que P est l'intersection des « demi-plans »

$$P_i = \{z \in \mathbb{H} ; d_{\text{hyp}}(z, z_0) \leq d_{\text{hyp}}(z, z_i)\}, \quad z_i \in \Gamma(z_0) - \{z_0\};$$

puisque chaque P_i est convexe (pour la métrique hyperbolique), l'intersection P l'est aussi : P est en particulier connexe et simplement connexe. La restriction de P à une boule (hyperbolique) de rayon $r > 0$ coïncide avec l'intersection d'un nombre fini de P_i , à savoir ceux correspondant aux points $z_i \in \Gamma(z_0)$ contenus dans la boule de rayon $2r$. En particulier, P est un polygone (à bord géodésique par morceaux).

Maintenant, considérons un point $z \in \mathbb{H}$ quelconque. Sa distance à $\Gamma(z_0)$ est atteinte pour un point $z_1 \in \Gamma(z_0)$; en effet, $\Gamma(z_0)$ est discret, donc fermé. Soit $\varphi_1 \in \Gamma$ l'élément du groupe qui envoie z_0 sur z_1 ; puisque φ_1 est isométrique, le point $z_0 \in \Gamma(z_0)$ minimise la distance à $z'_1 := \varphi_1^{-1}(z)$ dans $\Gamma(z_0)$, et z'_1 appartient donc à $P : \Gamma(z) \cap P \neq \emptyset$. Enfin, si $\Gamma(z)$ intersecte P en au moins deux points distincts, disons z'_1 et $z'_2 = \varphi_2^{-1}(z)$, alors z est équidistant de z_1 et $z_2 = \varphi_2(z_0)$, i.e. z'_1 est équidistant de z_0 et $\varphi_1^{-1}\varphi_2(z_0) : z'_1$ et z'_2 sont en fait sur le bord ∂P . \square

VI.1.4. Polygones finis

Par la suite, on ne considérera que des polygones de type Dirichlet, c'est à dire construits comme dans l'énoncé du théorème VI.1.2.

Proposition VI.1.3. — *Soit $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ un groupe fuchsien et soit P un polygone fondamental de Dirichlet. Si P est fini, alors Γ est de type fini. Plus précisément, il existe une décomposition du bord orienté de P en un nombre pair d'arcs géodésiques orientés $\delta_1, \dots, \delta_{2n}$, une involution sans point fixe σ de l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$ et une famille génératrice $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ pour Γ satisfaisant*

$$\varphi_i(\delta_i) = \delta_{\sigma(i)}^{-1} \text{ et } \varphi_{\sigma(i)} = \varphi_i^{-1}, \quad i = 1, \dots, 2n.$$

Un polygone fondamental muni d'une telle décomposition paire de son bord sera dit *adapté* au groupe Γ . Attention, le fait que P soit de Dirichlet est essentiel dans l'énoncé; dans [Bea1983, p. 210-213], on trouvera un exemple de groupe fuchsien avec polygone fondamental convexe à 5 côtés : un des côtés n'est associé à aucun autre et est accumulé par une infinité de translats $\varphi(P)$, $\varphi \in \Gamma$. On dit alors que le pavage n'est pas localement fini.

Démonstration. — Soient $\delta_1, \dots, \delta_p$ les côtés de P , munis de l'orientation de bord de P . Pour tout point $z \in \partial P$, il existe au moins une transformation $\varphi \in \Gamma$ différente de l'identité envoyant z sur un point $z' \in \partial P$ (éventuellement le même). En effet, puisque P est de Dirichlet, disons relativement à un point z_0 (voir énoncé du théorème VI.1.2), la distance de z à l'orbite $\Gamma(z_0)$ est réalisée par z_0 et au moins un autre point $z_1 \neq z_0$ de l'orbite. Il suffit alors de choisir $\varphi \in \Gamma$ qui envoie z_1 sur z_0 : la distance de $z' = \varphi(z)$ à $\Gamma(z_0)$ est réalisée par $z_0 = \varphi(z_1)$ et $\varphi(z_0)$. Ainsi z' est un point du bord de P .

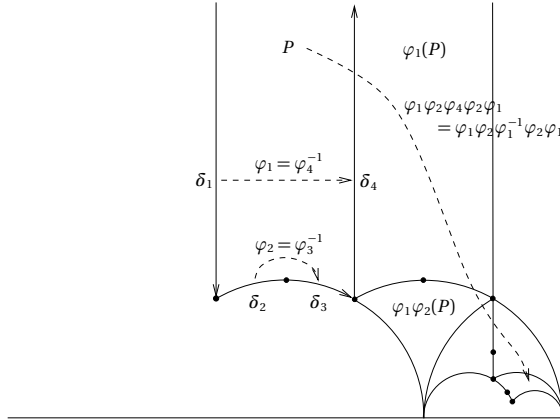


FIGURE VI.2. Un système générateur pour $PSL(2, \mathbb{Z})$

Dans le cas où z et z' sont des points lisses de ∂P (*i.e.* pas des sommets), φ est unique et conjugue les germes d'arcs (δ_i, z) et (δ_j^{-1}, z') correspondants de ∂P ; dans le cas contraire, on trouverait arbitrairement près de z des points dont l'orbite rencontre au moins deux fois l'intérieur de P . La classe d'équivalence d'un point $z \in \partial P$ est finie, car la somme des angles correspondants doit être $\leq 2\pi$ et chaque angle de ∂P est strictement positif (on ne considère que les points dans \mathbb{H}). En considérant comme nouveaux sommets les éléments des classes d'équivalence des points non-lisses de ∂P , on obtient un nouveau découpage par arcs géodésiques $\delta_1, \dots, \delta_p$ satisfaisant : pour tout $i = 1, \dots, p$, il existe j et $\varphi_i \in \Gamma$ uniques tels que $\varphi_i(\delta_i) = \delta_j^{-1}$; de plus, l'orbite d'un point $z \in \delta_i$ différent des extrémités intersecte ∂P exactement en z et $\varphi_i(z)$. Il se peut que $i = j$ auquel cas φ_i a un point fixe au milieu de l'arc δ_i ; on rajoute ce point aux sommets et on découpe δ_i en deux arcs pour obtenir l'énoncé demandé (voir la figure VI.2). En particulier le p final est pair, $p = 2n$.

Pour vérifier que les éléments $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n} \in \Gamma$ ainsi construits engendrent Γ , on utilise le pavage de la manière suivante. Notons d'abord que le pavé adjacent à P le long du côté δ_i est $\varphi_i^{-1}(P)$. Ainsi, si $\varphi(P)$ et $\varphi'(P)$, avec $\varphi, \varphi' \in \Gamma$, sont deux pavés adjacents le long du côté $\varphi'(\delta_i)$, alors $\varphi'^{-1} \circ \varphi(P) = \varphi_i^{-1}(P)$ et par suite $\varphi' = \varphi \circ \varphi_i$. Maintenant, étant donné un élément $\varphi \in \Gamma$, choisissons un chemin γ joignant P au pavé $\varphi(P)$ et évitant tous les sommets du pavage (*i.e.* les translatés par Γ des sommets

de P). Le chemin γ va alors traverser successivement les pavés

$$P_0 = P, P_1, P_2, \dots, P_N = \varphi(P).$$

Si le chemin γ entre dans P_k par le côté δ_{i_k} (via l'unique identification de P_k à P par Γ), $k = 1, \dots, N$, alors on vérifie immédiatement que le pavé $P_k = \varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_k}(P)$ et par suite $\varphi = \varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_N}$. \square

Nous voyons dans la preuve précédente que le mot le plus court en les générateurs $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ permettant de décrire un élément donné Γ correspond au chemin de P à $\varphi(P)$ traversant le moins de pavés intermédiaires possibles.

Dorénavant, on ne considérera que des polygones fondamentaux adaptés, dont les côtés sont par définition les δ_i de la proposition.

VI.1.5. Angle d'un cycle elliptique et relations

Le groupe Γ induit une relation d'équivalence sur le bord ∂P du polygone fondamental et en particulier sur ses sommets. Nous appellerons *cycle* la classe d'équivalence d'un sommet pour cette relation; *l'angle d'un cycle* est la somme des angles aux sommets qui le composent. Oublions pour le moment les côtés qui partent à l'infini et ne s'intersectent pas dans \mathbb{H} : nous nous intéressons uniquement pour l'instant aux sommets (à distance finie). Numérotions les côtés δ_i et les sommets s_i de P dans l'ordre cyclique de sorte que $s_i = \delta_i \cap \delta_{i+1}$ (nous supposons toujours le polygone P connexe et simplement connexe). L'ensemble des indices des sommets est un sous-ensemble strict de $\{1, \dots, 2n\}$ dès que P est non compact. Notons $\tilde{\sigma} \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\}$ la permutation définie par $\tilde{\sigma}(i) := \sigma(i) - 1$ pour $i = 1, \dots, 2n$ (on convient bien sûr que $0 \equiv 2n$) où σ est la permutation donnée par la proposition VI.1.3. Alors on vérifie immédiatement que le cycle associé à un sommet s_i est

$$s_i, s_{\tilde{\sigma}(i)}, s_{\tilde{\sigma}^2(i)}, \dots, s_{\tilde{\sigma}^l(i)}$$

où $l \in \mathbb{N}$ est le plus petit entier tel que $\tilde{\sigma}^{l+1}(i) = i$.

Proposition VI.1.4. — *L'angle de chaque cycle est un diviseur entier de 2π . De plus, avec les notations précédentes, si l'angle du cycle associé à s_i est $\frac{2\pi}{q}$, $q \in \mathbb{N}^*$, alors on a la relation*

$$(\varphi_{\tilde{\sigma}^l(i)} \circ \dots \circ \varphi_{\tilde{\sigma}(i)} \circ \varphi_i)^q = \text{id}.$$

Les relations entre les générateurs $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ sont engendrées par les relations précédentes lorsque s_i parcourt un système de représentants des cycles, et les relations $\varphi_{\sigma(i)} = \varphi_i^{-1}$.

On obtient donc une *présentation* explicite du groupe Γ par n générateurs et r relations où $2n$ est le nombre de côtés du polygone fondamental P , et r le nombre de cycles à distance finie.

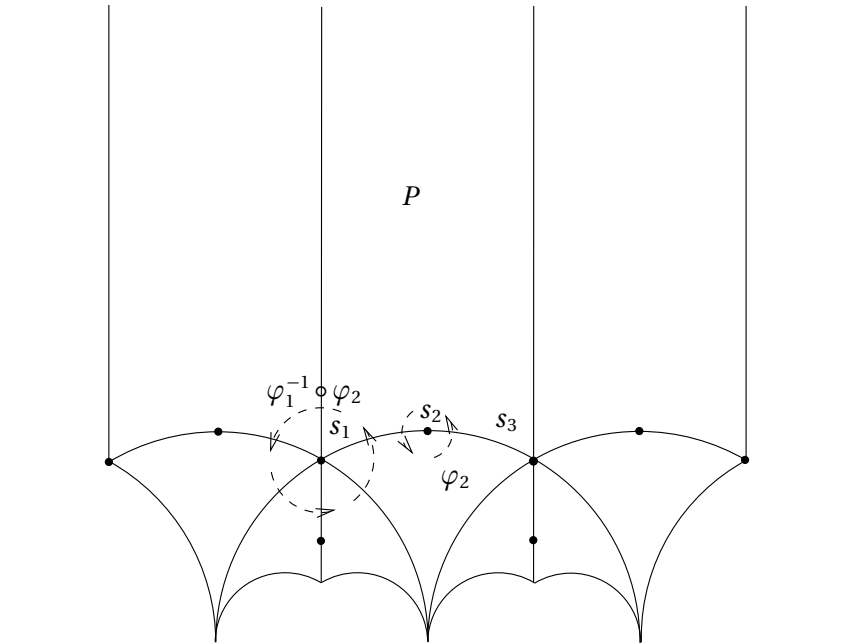


FIGURE VI.3. Deux cycles d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{2}$ pour $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$

Démonstration. — Soit s_i un sommet de P , et considérons le pavage de \mathbb{H} par les $\varphi(P)$, $\varphi \in \Gamma$. La transformation φ_i envoie le côté δ_i sur son conjugué $\delta_{\sigma(i)}^{-1}$ et en particulier s_i sur $s_{\sigma(i)-1}$: le pavé $P_1 := \varphi_i^{-1}(P)$ est celui que l'on rencontre en sortant du polygone P à travers le côté δ_i . En tournant autour de s_i , nous rencontrerons successivement

$$\begin{aligned}
 P_0 &= P, \\
 P_1 &= \varphi_i^{-1}(P), \\
 P_2 &= (\varphi_{\sigma(i)} \circ \varphi_i)^{-1}(P),
 \end{aligned}$$

$$P_3 = (\varphi_{\bar{\sigma}^2(i)} \circ \varphi_{\bar{\sigma}(i)} \circ \varphi_i)^{-1}(P) \dots$$

Observons que si l'on pose $\varphi := \varphi_{\bar{\sigma}^l(i)} \circ \dots \circ \varphi_{\bar{\sigma}(i)} \circ \varphi_i$, on a $\varphi(s_i) = s_i$. Ainsi φ est elliptique, et comme Γ est discret, il existe un entier q pour lequel $\varphi^q(P) = P$, c'est-à-dire $\varphi^q = \text{id}$. Si on pose $Q = P_0 \cup P_2 \cup \dots \cup P_l$, les polygones $Q, \varphi(Q), \dots, \varphi^{q-1}(Q)$ sont d'intérieurs disjoints et ils recouvrent un voisinage de s_i . L'angle au sommet s_i du polygone Q vaut donc $\frac{2\pi}{q}$, et c'est l'angle du cycle contenant s_i . De plus Q et $\varphi^{-1}(Q)$ sont (par construction) adjacents le long de $\varphi^{-1}(\delta_{i+1})$. L'angle de la rotation φ est donc $\frac{2\pi}{q}$. Notons que l'élément φ engendre le stabilisateur de s_i dans Γ .

Il nous reste à montrer que toute relation entre les générateurs φ_i se déduit des relations données par les cycles comme ci-dessus, et des relations $\varphi_i^{-1} = \varphi_{\sigma(i)}$. Pour voir cela, on appelle G le groupe engendré par $2n$ générateurs, disons a_1, \dots, a_{2n} , soumis aux relations $a_{\sigma(i)} = a_i^{-1}$, $i = 1, \dots, 2n$ et celles données par les cycles : on définit un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow \Gamma$ en posant $a_i \mapsto \varphi_i$, dont le noyau est noté N . Nous allons montrer que N est trivial.

Pour cela, on introduit l'espace $\mathcal{H} = P \times G$ muni de la topologie produit, celle de G étant la topologie discrète, et l'on considère sur cet espace la relation d'équivalence engendrée par :

$$(z, g) \sim (z', g') \text{ lorsqu'il existe } 1 \leq i \leq 2n, z' = \varphi_i(z) \text{ et } g = g' \cdot a_i.$$

On note \mathcal{H}^* l'espace topologique quotient de \mathcal{H} par cette relation et l'on appelle π la projection de \mathcal{H} sur \mathcal{H}^* . On vérifie aisément que cette application est propre⁽¹⁾.

Le groupe G agit sur \mathcal{H} : l'élément $g \in G$ définit un homéomorphisme

$$(z, g') \in \tau_g : \mathcal{H} \mapsto (z, g \cdot g') \in \mathcal{H}.$$

Cette action est propre⁽²⁾ et libre et $P \times \{\text{id}\}$ en est un domaine fondamental. L'action de G sur \mathcal{H} passe au quotient en une action sur \mathcal{H}^* , également propre car la projection $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ est propre. Par ailleurs, si $(z, g) \in \mathcal{H}$ est équivalent à (z, g') , z est nécessairement un sommet s_i , et on a $g' = g a_{\bar{\sigma}^k(i)}, \dots, a_{\bar{\sigma}(i)} a_i$, où $0 \leq k < (l_{s_i} + 1)q_{s_i}$, où $\frac{2\pi}{q_{s_i}}$ est l'angle du cycle associé à s_i et $l_{s_i} + 1$ le nombre de sommets de ce cycle. Comme

1. C'est-à-dire que la préimage de tout compact est compacte.
 2. Une action $a : G \times X \rightarrow X$ est propre si l'application $a \times \text{pr}_2 : G \times X \rightarrow X \times X$ est propre.

pour $0 \leq k < (l_{s_i} + 1)q_{s_i}$, $\rho(a_{\bar{\sigma}^k(i)} \dots a_{\bar{\sigma}(i)} a_i) \neq \text{id}$, on obtient que pour tout $v \in N$, (z, g) n'est jamais équivalent à $(z, v g)$. Par conséquent l'action de N sur \mathcal{H}^* est libre (et propre).

Introduisons l'application $p : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{H}$ définie par $p(z, g) = \rho(g)(z)$. Cette application respecte la relation d'équivalence \sim et induit donc une application continue $p^* : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathbb{H}$. On remarque que p^* est un homéomorphisme local. En effet, soit s un sommet de ∂P , $l_s + 1$ le cardinal du cycle auquel s appartient, et $\frac{2\pi}{q_s}$ l'angle de ce cycle. Alors en considérant la réunion de P , des $\varphi_i(P)$, $i = 1, \dots, 2n$ et des $\varphi_{\bar{\sigma}^k(i)} \circ \dots \circ \varphi_{\bar{\sigma}(i)} \circ \varphi_i(P)$, $0 \leq k < (l_{s_i} + 1)q_{s_i}$, où s_i décrit l'ensemble des sommets de P , on obtient un voisinage de P . La projection sur \mathcal{H}^* de $P \times \{\text{id}\}$, des $P \times \{a_i\}$, $i = 1, \dots, 2n$, et des $P \times \{a_{\bar{\sigma}^k(i)} \dots a_{\bar{\sigma}(i)} a_i\}$, $0 \leq k < (l_{s_i} + 1)q_{s_i}$ est alors un voisinage W de $\pi(P \times \{\text{id}\})$ et p^* est un homéomorphisme de W sur son image. Dès lors, pour tout $g \in G$, gW est un voisinage de $\pi(P \times \{g\})$ et p^* est un homéomorphisme de gW sur son image. Enfin, notons que puisque les φ_i engendrent Γ et que $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} \varphi(P) = \mathbb{H}$, l'application p^* est surjective.

Nous allons à présent montrer que les fibres de p^* sont exactement les orbites de N sur \mathcal{H}^* . Il est clair que les orbites de N sont incluses dans les fibres. Maintenant, si $p(z, g) = p(z', g')$, alors $\rho(g)(z) = \rho(g')(z')$, ce qui implique $(z, g) \sim (z', g a)$, avec $a = g^{-1} g'$. Ainsi, $\rho(g a)(z') = \rho(g')(z')$. Si z' n'est pas un sommet de P , on obtient directement l'existence de $v \in N$ tel que $g a = v g'$. Autrement dit, $\pi(z, g) = \pi(z', v g')$, et $\pi(z, g)$ est bien dans la même N -orbite que $\pi(z', g')$. Si z' est le sommet s_i , alors il va exister $0 \leq k < q_{s_i}$ tel que $g a = v g' (a_{\bar{\sigma}^{l_{s_i}(i)}} \dots a_{\bar{\sigma}(i)} a_i)^k$. Comme (z', g') est équivalent à $(z', g' (a_{\bar{\sigma}^{l_{s_i}(i)}} \dots a_{\bar{\sigma}(i)} a_i)^k)$, on obtient bien que $\pi(z, g)$ et $\pi(z', g')$ sont dans la même N -orbite. On conclut donc que \mathcal{H}^*/N est homéomorphe à \mathbb{H} . Comme \mathbb{H} est simplement connexe, N doit être trivial, ce qui prouve que G est isomorphe à Γ . \square

Remarque VI.1.5. — Notons au passage que si Γ contient un élément non trivial φ fixant un point $z_0 \in \mathbb{H}$, alors z_0 est dans l'orbite d'un cycle de P et $\varphi^q = \text{id}$ où $\frac{2\pi}{q}$ est l'angle du cycle. En particulier, φ est conjuguée dans Γ à un élément du groupe (d'ordre q) d'isotropie de z_0 . Ainsi, les cycles d'angle $< 2\pi$ sont en bijection avec les classes de conjugaison de sous-groupes elliptiques maximaux de Γ .

VI.1.6. Cycles à l'infini

Nous allons maintenant considérer l'intersection de l'adhérence de P avec le *cercle à l'infini* $\partial\mathbb{H}$. Notons \bar{P} l'adhérence de P dans $\bar{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$. Le bord à l'infini $\bar{P} \cap \partial\mathbb{H}$ de P se décompose en un nombre fini (éventuellement vide) de points et d'intervalles fermés de $\partial\mathbb{H}$; on appellera *sommets à l'infini* les points isolés et les extrémités des intervalles de $\bar{P} \cap \partial\mathbb{H}$. On rappelle que P est supposé connexe et simplement connexe, son adhérence \bar{P} l'est donc aussi. On notera s_i la composante connexe reliant le côté δ_i au côté δ_{i+1} afin de poursuivre la convention adoptée plus haut. De nouveau, Γ induit une relation d'équivalence sur le bord de P à l'infini, et en particulier sur l'ensemble de ses composantes connexes. Les *cycles à l'infini* sont les classes d'équivalence pour cette dernière : un tel cycle sera dit *parabolique* s'il ne contient que des points isolés et *hyperbolique* lorsqu'il est constitué d'intervalles non réduits à un point. Comme pour les cycles à distance finie, on peut considérer le sous-groupe d'isotropie d'un sommet $x = s_i$ associé à un cycle parabolique. Un élément non trivial est alors donné par $\varphi := \varphi_{\bar{\sigma}^l(i)} \circ \dots \circ \varphi_{\bar{\sigma}(i)} \circ \varphi_i$ où $l \in \mathbb{N}$ est le plus petit entier tel que $\bar{\sigma}^{l+1}(i) = i$.

Proposition VI.1.6. — *Si le sommet $x \in \bar{P} \cap \partial\mathbb{H}$ appartient à un cycle parabolique, l'élément $\varphi \in \Gamma$ construit ci-dessus est parabolique et engendre le groupe d'isotropie de x .*

Démonstration. — Après redécoupage du polygone fondamental, on peut recoller ensemble les différents bouts correspondant au cycle; de cette manière, on se ramène à un polygone fondamental pour lequel le cycle parabolique se réduit au seul point x . Les deux cotés de P adjacents à x sont donc conjugués par φ et bien sûr $\varphi(x) = x$.

Pour voir que φ est parabolique, nous allons considérer les deux géodésiques γ_0 et γ_1 bordant P au voisinage de x et telles que $\varphi(\gamma_0) = \gamma_1$. Supposons φ hyperbolique et considérons la position relative de son deuxième point fixe y par rapport aux deux géodésiques. Si y ou (ce qui revient au même) la géodésique γ de x à y , est entre γ_0 et γ_1 , on voit facilement (en considérant le germe de P le long de γ en x) que l'intersection $P \cap \varphi(P)$ va être d'intérieur non vide; ceci contredit le fait que P est un domaine fondamental. Donc γ n'est pas entre γ_0 et γ_1 . Quitte à changer φ en φ^{-1} , on peut supposer x répulsif et y attractif de sorte que la suite de géodésiques $\gamma_n := \varphi^n(\gamma_0)$ tende vers γ . Le côté de P supporté

par γ_0 va être envoyé par φ^n sur un côté de $P_n = \varphi^n(P)$ supporté par γ_n « de plus en plus grand », c'est à dire tendant vers γ toute entière : le pavage ne va pas être localement fini au voisinage de γ , contradiction.

L'argument que nous venons de voir montre en fait que le groupe d'isotropie ne peut contenir que des éléments paraboliques. Ce groupe d'isotropie est donc contenu dans un groupe à un paramètre d'éléments paraboliques $\{\psi^t\}$, avec $\varphi = \psi^1$. Si un élément du groupe d'isotropie n'est pas une puissance de φ , alors, en le combinant avec φ , on trouvera un élément $\tilde{\varphi} = \psi^{t_0}$, $0 < t_0 < 1$, qui enverra γ_0 entre γ_0 et γ_1 strictement : $P \cap \tilde{\varphi}(P)$ sera alors d'intérieur non vide, contradiction. Donc le groupe d'isotropie de x est engendré par φ . \square

VI.1.7. Orbifolds et surfaces de Riemann

Si un groupe discret Γ agit proprement sur une surface de Riemann S , l'espace quotient S/Γ peut être muni d'une structure de surface de Riemann de telle sorte que la projection $S \rightarrow S/\Gamma$ soit holomorphe. Si l'action est libre et si S est simplement connexe, la donnée de S/Γ permet de reconstruire Γ et S ainsi que l'action de Γ sur S . En effet, S n'est autre que le revêtement universel de S/Γ et Γ est le groupe fondamental de S/Γ agissant par transformations de revêtement. Si l'action n'est pas libre, il n'en est plus ainsi. Par exemple, nous avons vu au chapitre V que le quotient de \mathbb{H} par l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ est une surface de Riemann isomorphe à \mathbb{C} , qui est simplement connexe. Pour pouvoir reconstruire Γ et son action sur S , il faut ajouter des données supplémentaires à la surface de Riemann S/Γ . Ceci mène au concept d'« orbifold » de dimension 2, qui a été défini en toutes dimensions par Satake [Sat1956] sous le nom de « V-variété » et popularisé par Thurston [Thu1980, chap. 13] sous le nom d'orbifold⁽³⁾. Ici nous nous contenterons d'une approche naïve, proche de celle utilisée par Poincaré.

Un orbifold est la donnée d'une surface de Riemann X équipée d'une famille de points isolés (x_i) munis de poids entiers $n_i \geq 2$. On dit parfois que les x_i sont les points de ramification de l'orbifold et que les n_i sont les multiplicités. Lorsqu'un groupe Γ agit proprement sur une surface de Riemann S (en respectant l'orientation), le quotient S/Γ est naturellement muni d'une structure d'orbifold. Chaque point de S dont le

3. La notion correspondante en géométrie algébrique porte le nom de « champ » (*stack* en anglais).

stabilisateur est un groupe (fini cyclique) non trivial définit un point de ramification dans S/Γ dont la multiplicité est le cardinal du stabilisateur. On parle de *l'orbifold quotient* S/Γ .

À deux exceptions près, décrites plus loin, tout orbifold X détermine de manière unique une action propre d'un groupe Γ sur une surface de Riemann simplement connexe S telle que X soit isomorphe à S/Γ . On dit que S est le revêtement universel de l'orbifold X et que Γ est son groupe fondamental. Les exceptions auxquelles nous avons fait allusion sont la sphère avec un ou deux points de ramification de multiplicités différentes. Voici quelques exemples que nous avons rencontrés (voir le chapitre V). Le quotient de \mathbb{H} par $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ est \mathbb{C} avec deux points de ramification de multiplicités 2 et 3. Le quotient de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ par le groupe de l'icosaèdre est $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ avec trois ramifications de multiplicités 2, 3 et 5. Le quotient de \mathbb{H} par $\Gamma_0(7)$ est \mathbb{C}^* avec deux ramifications de multiplicité 3 (voir la section V.1).

Les orbifolds sont donc une généralisation des surfaces de Riemann. On peut définir les concepts d'applications holomorphes entre deux orbifolds, de revêtements, etc. Si X est un orbifold compact, de points de ramification x_i ayant pour multiplicités $n_i \geq 2$, sa caractéristique d'Euler-Poincaré orbifold χ_{orb} est définie par l'égalité $\chi_{\mathrm{orb}}(X) = \chi(X) + \sum(1/n_i - 1)$. Cette définition est dictée notamment par le fait que si $X_1 \rightarrow X_2$ est un revêtement de degré d , alors $\chi_{\mathrm{orb}}(X_1) = d\chi_{\mathrm{orb}}(X_2)$, ce qui est une forme des relations de Riemann-Hurwitz⁽⁴⁾.

VI.1.8. Quotient, vu comme surface de Riemann, puis comme orbifold

Considérons maintenant le quotient

$$\pi : \mathbb{H} \rightarrow S := \mathbb{H}/\Gamma.$$

La structure de surface de Riemann de S peut être décrite comme suit. En tant qu'espace topologique, S est homéomorphe au quotient du polygone fondamental P par la relation identifiant chaque côté δ_i avec son conjugué $\delta_{\sigma(i)}^{-1}$; chaque cycle à distance finie correspond alors à un point de S . Il est tout aussi naturel de considérer la compactification \bar{S} obtenue

4. Une autre interprétation est qu'un point « ordinaire » a pour caractéristique 1 et un point orbifold d'ordre n a pour caractéristique $\frac{1}{n}$.

par les mêmes identifications sur $\overline{P}^{(5)}$. Un cycle à l'infini correspond à un point ou à un cercle selon que le cycle est parabolique ou hyperbolique. L'application $\pi : \mathbb{H} \rightarrow S$ est un revêtement ramifié ; plus précisément, π est totalement ramifié au dessus de chaque cycle d'angle $\frac{2\pi}{q}$ avec $q > 1$ et, en tout point de la fibre, π s'écrit $z \mapsto z^q$ dans des coordonnées locales complexes ; le revêtement π est régulier ailleurs.

Proposition VI.1.7. — *Le genre g de la surface de Riemann $S = \mathbb{H}/\Gamma$ est égal à $n + 1 - c/2$ où $2n$ est le nombre de côtés du polygone P et c le nombre de cycles finis et infinis.*

Démonstration. — Le genre de S est par définition celui de la surface compacte sans bord $S' = \overline{S} \cup \bigcup D_i$, où les D_i sont des disques attachés aux composantes connexes $\partial_i \overline{S}$ du bord de \overline{S} via des identifications entre $\partial_i \overline{S}$ et ∂D_i .

Soit c_{hyp} (resp. c_{par} , c_{ell}) le nombre de cycles hyperboliques (resp. paraboliques, elliptiques) de Γ . On a alors

$$2 - 2g = \chi(S') = \chi(\overline{S}) + c_{\text{hyp}} = \chi(S) + c_{\text{par}} + c_{\text{hyp}},$$

et $\chi(S) = c_{\text{ell}} - n + 1$, en considérant l'image des sommets et côtés de P dans son quotient S . On obtient donc $2 - 2g = 1 - n + c$. \square

Puisque Γ agit par transformations conformes, on peut munir S d'une structure complexe de telle manière que π soit holomorphe ; une coordonnée locale conforme w en un point $\pi(z_0)$ est donnée par la formule $w = (z - z_0)^q$, où q est l'ordre du sous-groupe d'isotropie de z_0 dans Γ . En un bout parabolique, disons $z_0 = \infty$ avec groupe d'isotropie engendré par $\varphi(z) = z + 1$, la fonction $w = \exp(2i\pi z)$ descend en une coordonnée locale conforme au voisinage du point correspondant dans la compactification \overline{S} . Ainsi, lorsque le groupe Γ ne possède pas de cycle hyperbolique, la surface de Riemann \overline{S} ainsi définie est compacte sans bord ; la surface S s'obtient alors en ôtant à \overline{S} un nombre fini de points, un par cycle parabolique.

Lorsque le groupe Γ possède un ou plusieurs cycles hyperboliques, la compactification \overline{S} est naturellement munie d'une structure de surface de Riemann compacte à bord.

5. On prendra garde au fait que $\overline{\mathbb{H}}/\Gamma$, muni de la topologie quotient, n'est pas séparé si Γ est infini.

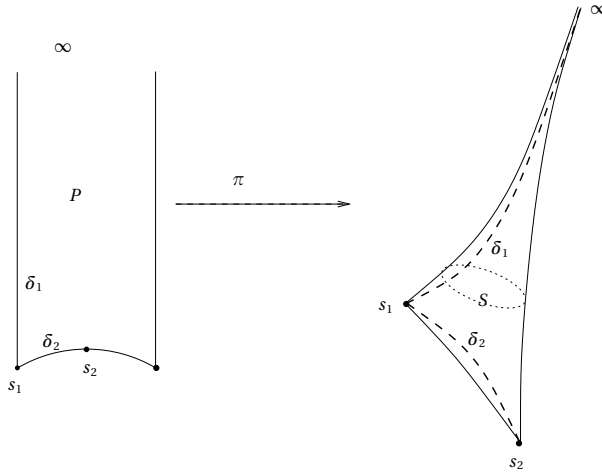


FIGURE VI.4. Quotient orbifold $\mathbb{H}/\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$

La métrique hyperbolique sur \mathbb{H} est invariante par Γ et induit donc, *via* π , une métrique à courbure constante -1 avec singularités orbifold sur le quotient S : en chaque cycle elliptique, on a une singularité orbifold (ou conique) dont l'angle est celui du cycle. De cette manière, on peut voir $\pi : \mathbb{H} \rightarrow S$ comme l'« uniformisation orbifold » de S . Quant aux bouts paraboliques, il est naturel d'y penser comme des points orbifold d'angle nul dans \bar{S} .

L'aire du triangle hyperbolique d'angles α, β et γ est

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma),$$

même si certains angles sont nuls. En particulier, les bouts paraboliques sont d'aire finie. Plus précisément, en découpant le polygone en triangles, un calcul immédiat utilisant la proposition précédente montre :

Proposition VI.1.8. — *Si le polygone P ne possède pas de bout hyperbolique, alors son aire hyperbolique est finie, donnée par*

$$\text{aire}(P) = (2n - 2)\pi - \alpha,$$

où $2n$ est le nombre de côtés de P et $\alpha = \sum_i \alpha_i$, la somme des angles de P en tous ses sommets.

La caractéristique d'Euler-Poincaré orbifold du quotient S est alors donnée par $\chi_{\text{orb}} = -\text{aire}(P)/2\pi$ (cas particulier du théorème de Gauss-Bonnet). Puisque le polygone P est d'aire > 0 , la caractéristique d'Euler-Poincaré de S est nécessairement < 0 .

Dès que le polygone P possède un bout hyperbolique, il est d'aire infinie. Se donner un polygone fondamental pour l'action du groupe Γ , c'est se donner un « découpage » ou graphe géodésique par morceaux du quotient orbifold S dont les sommets contiennent tous les points orbifold et dont le complément est connexe et simplement connexe. Ainsi, on construit de nouveaux polygones fondamentaux en modifiant ou en déformant ce graphe. Par exemple, on peut toujours modifier le graphe pour qu'un point orbifold donné ne soit le sommet que d'une seule arête; le cycle correspondant du nouveau polygone fondamental se réduira alors à un seul sommet. Dans le cas particulier d'un cycle d'angle 2π , il devient un point intérieur du nouveau polygone fondamental. On ne pourra cependant pas éviter l'existence de cycles d'angle 2π , par exemple, dans le cas d'une surface compacte lisse (sans point orbifold). Mais on pourra les déplacer librement, déformant par là le polygone fondamental.

Remarque VI.1.9. — Étant donné un groupe fuchsien Γ quelconque (pas nécessairement de type fini), on peut construire le quotient \mathbb{H}/Γ et lui donner une structure orbifold qui fasse de la projection le revêtement universel orbifold. Le nombre de points orbifold ou de bouts peut alors devenir infini. En fait, la classification topologique des surfaces connexes orientées⁽⁶⁾ montre que le groupe fondamental (orbifold) d'une telle surface est de type fini si et seulement si elle n'a qu'un nombre fini de bouts et de points orbifold. Ainsi, le quotient de \mathbb{H} par un sous-groupe Γ de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ de type fini est géométriquement fini; il est alors facile, à partir d'une triangulation géodésique, de déduire l'existence d'un polygone fondamental fini.

VI.1.9. Le théorème du polygone

Jusqu'à présent, nous sommes partis d'un groupe fuchsien Γ et nous lui avons associé un domaine fondamental polygonal. Nous inversons

6. Cette classification est postérieure au travail de Poincaré qui nous occupe ici, voir l'introduction de la dernière partie.

maintenant le point de vue et nous examinons sous quelles conditions un polygone détermine un groupe fuchsien.

Théorème VI.1.10. — Soit $P \subset \mathbb{H}$ un polygone connexe et simplement connexe dont le bord est composé d'un nombre pair d'arcs géodésiques $\delta_1, \dots, \delta_{2n}$ cycliquement ordonnés. Supposons donnés

- une involution sans points fixes σ sur $\{1, \dots, 2n\}$ permettant d'identifier les arcs par paires ;
- pour chaque i , une transformation $\varphi_i \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ envoyant δ_i sur $\delta_{\sigma(i)}^{-1}$ et vérifiant $\varphi_{\sigma(i)} = \varphi_i^{-1}$.

On suppose en outre que :

- pour chaque cycle à distance finie, l'angle est un diviseur entier de 2π ;
- pour chaque cycle parabolique à l'infini, l'application « de retour » φ correspondante, définie en section VI.1.6, est parabolique.

Alors le groupe Γ engendré par $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ est fuchsien et P est un polygone fondamental.

Remarque VI.1.11. — Étant donnés deux arcs géodésiques orientés δ et δ' il va exister un élément $\varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ envoyant δ sur δ' (en préservant l'orientation) si et seulement si on est dans l'un des cas suivants :

- δ et δ' sont tous deux de même longueur finie ;
- δ et δ' sont deux demi-géodésiques futures (resp. passées) ;
- δ et δ' sont deux géodésiques (complètes).

La transformation φ est unique sauf dans le troisième cas où elle est définie modulo l'action d'un groupe à un paramètre. En particulier, si le polygone ne possède pas de côté « bi-infini », il détermine (avec l'involution σ) le groupe Γ . On peut alors énoncer le théorème précédent en omettant les φ_i , par exemple dans le cas d'un polygone compact, en demandant juste que δ_i et $\delta_{\sigma(i)}$ soient de même longueur pour chaque i . Dans le cas non compact, il faudra en outre traduire la condition de parabolicité.

Celle-ci est nécessaire comme nous l'avons vu dans la proposition VI.1.6. Par exemple, si l'on choisit d'identifier les deux côtés du polygone $\{(x, y) \in \mathbb{H} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$ par la transformation hyperbolique $\varphi(z) = \frac{z}{2}$, alors le pavage ne recouvre que le quart de plan $\{x, y > 0\}$. Dans ses premières notes, Poincaré oubliera cette hypothèse.

Preuve du théorème VI.1.10. — Il suffit de montrer que les polygones $\varphi(P)$, $\varphi \in \Gamma$, forment un pavage du demi-plan \mathbb{H} , c'est-à-dire

- la réunion des $\varphi(P)$ recouvre \mathbb{H} ;
- l'intersection de deux translats $\varphi(P)$ et $\psi(P)$ est ou bien vide, ou bien une union de côtés (resp. de sommets), ou bien $\varphi(P) = \psi(P)$ et dans ce cas $\varphi = \psi$.

Tout d'abord, observons que la condition sur les cycles elliptiques permet au moins de paver un voisinage de P dans \mathbb{H} . Pour cela, on commence par coller le germe de $P_i = \varphi_i^{-1}(P)$ en δ_i . Ensuite, on complète autour de chaque sommet s_i (à distance finie) par une suite de pavés

$$P_{i,j} = \varphi_{i,j} \circ \dots \circ \varphi_{i,1}(P), \quad j = 1, \dots, k_i$$

comme dans la proposition VI.1.4 (on considère le germe de $P_{i,j}$ au voisinage du sommet s_i , sauf pour $j = 1$ et $j = k_i$ où l'on considère les germes au voisinage des côtés δ_i et δ_{i+1}). Notons V un voisinage de P sur lequel le pavage ainsi construit est bien défini. Afin de comprendre la difficulté et donc la force du théorème, notons qu'*a priori* seuls les germes pavent le voisinage de P (voir la figure VI.5).

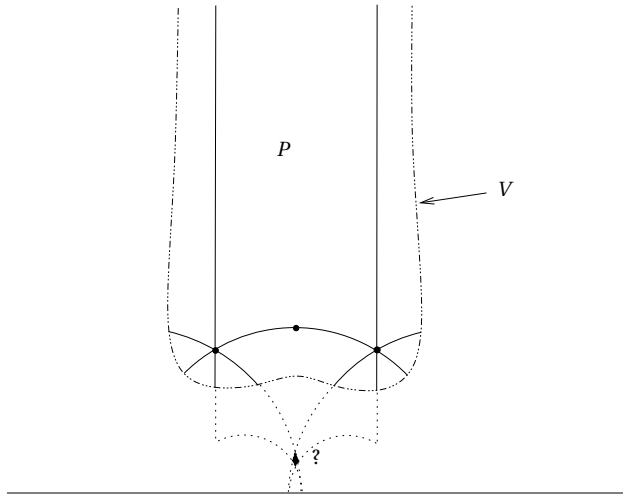


FIGURE VI.5. Le voisinage pavé V

Nous allons maintenant construire le pavage global sur une surface étalée au dessus de \mathbb{H} . Pour cela, nous reprenons la construction faite

dans la preuve de la proposition VI.1.4. Le groupe G , le morphisme $\rho : G \rightarrow \Gamma$, les espaces \mathcal{H} et \mathcal{H}^* ainsi que les applications $p : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{H}$ et $p^* : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathbb{H}$ sont les mêmes qu'en VI.1.4.

L'action de G sur \mathcal{H}^* est discrète et $\pi(P \times \{\text{id}\})$ en est un domaine fondamental. Pour obtenir le théorème du polygone, nous souhaitons montrer que p^* est un homéomorphisme entre \mathcal{H}^* et \mathbb{H} . Comme on ne sait pas *a priori* que les $\varphi(P)$, $\varphi \in \Gamma$, pavent \mathbb{H} , il n'est plus clair que p^* soit surjective. Néanmoins, il est toujours vrai que p^* définit un homéomorphisme local de \mathcal{H}^* dans \mathbb{H} . On le vérifie d'abord au voisinage de $\pi(P \times \{\text{id}\})$. Tout comme on a construit le voisinage pavé V de P dans \mathbb{H} ci-dessus, on construit un voisinage W de $P \times \{\text{id}\}$ dans \mathcal{H} en ajoutant les germes $P \times \{g\}$ correspondants que l'on obtient en remplaçant φ_i par a_i . On appelle $U = \pi(W)$, le projeté de W sur \mathcal{H}^* . Par construction, $p^*|_U : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme. Maintenant, notons que $p^* \circ \tau_g = \rho(g) \circ p^*$ pour tout $g \in G$. Ainsi, $\tau_g(U)$ définit un voisinage de $\pi(P \times \{g\})$ et p^* se restreint en un homéomorphisme de $\tau_g(U)$ sur $\rho(g)(V)$.

Pour montrer que l'homéomorphisme local $p^* : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathbb{H}$ est en fait un homéomorphisme global, il nous suffit de prouver que p^* est un revêtement de \mathcal{H}^* sur \mathbb{H} . Pour cela, nous allons voir que p^* a la propriété de relèvement des chemins. C'est ici que l'on utilise la condition sur les cycles paraboliques. Soit s_i un sommet de \bar{P} appartenant à un cycle parabolique contenant $n_i + 1$ sommets à l'infini. En recollant les germes en s_i des $\varphi_{\bar{\sigma}^k(i)} \circ \dots \circ \varphi_{\bar{\sigma}(i)} \circ \varphi_i(P)$, où $0 \leq k \leq n_i$, on pave un secteur angulaire C_i situé entre deux arcs géodésiques α et β issus de s_i . L'application de retour φ , qui engendre le groupe d'isotropie de s_i , est une transformation parabolique qui envoie α sur β . En considérant les réunions des $\varphi^m(C_i)$ lorsque m décrit \mathbb{Z} , on peut paver tout l'intérieur d'une horosphère basée en s_i . On fait de même en chaque sommet parabolique de \bar{P} et on ajoute les intérieurs des horosphères ainsi pavées au domaine V . On obtient un nouveau voisinage V' de P . La même construction sur \mathcal{H} , en remplaçant les φ_i par les a_i fournit un voisinage W' de $P \times \{\text{id}\}$, puis en projetant sur \mathcal{H}^* , on obtient un nouveau voisinage U' de $\pi(P \times \{\text{id}\})$ sur lequel $p^* : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathbb{H}$ est encore injective.

Maintenant, pour le voisinage V' , il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $z \in P$, la boule hyperbolique de centre z et de rayon ε est incluse dans V' . Ceci entraîne que l'ensemble ouvert $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} \varphi(P)$ coïncide avec son ε -voisinage dans \mathbb{H} , autrement dit, l'application p^* est surjective.

Appelons h^* la métrique de \mathcal{H}^* obtenue en relevant la métrique de Poincaré par p^* . Comme p^* est un homéomorphisme de U' sur V' , on obtient que si $a \in \pi(P \times \{id\})$, alors p^* réalise une isométrie de $D^*(a, \varepsilon)$, la boule de centre a et de rayon ε pour h^* , sur son image $D(p^*(a), \varepsilon)$. Comme G agit isométriquement sur \mathcal{H}^* , on conclut que toute h^* -boule centrée en un point de \mathcal{H}^* et de rayon ε est envoyée isométriquement par p^* sur son image. Il est alors facile de montrer que tout chemin de \mathbb{H} se remonte à \mathcal{H}^* , autrement dit, p^* est un revêtement. □

VI.2. Exemples

Appliquons maintenant le théorème précédent à la construction de groupes fuchsiens et donc d'orbifolds uniformisables.

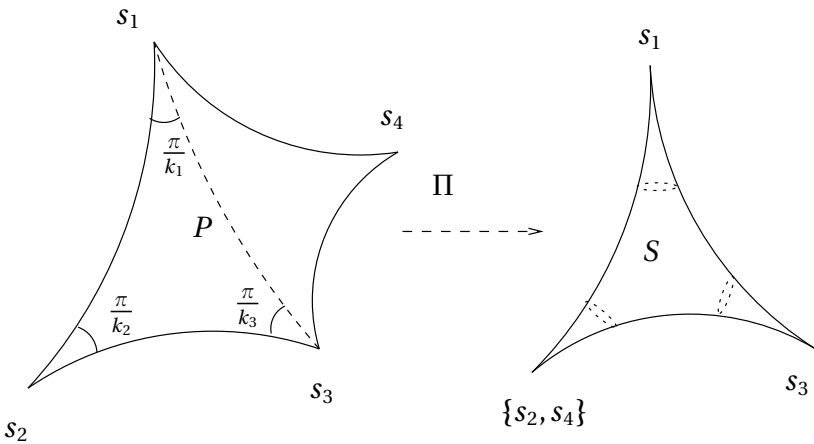


FIGURE VI.6. Triangles hyperboliques et sphères orbifold

VI.2.1. La sphère avec 3 points orbifold

Considérons un triangle hyperbolique T de sommets s_1, s_2 et s_3 et d'angles

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{k_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{k_2} \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{k_3}$$

avec $k_i \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Lorsque $k_i = \infty$, $s_i \in \partial\mathbb{H}$. Notons σ_i la réflexion par rapport au côté $s_j s_k$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Ces trois réflexions engendrent un groupe discret d'isométries de \mathbb{H} . Le sous-groupe Γ engendré par

$$\varphi_i = \sigma_{i+1} \circ \sigma_{i+2}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ mod } 3$$

est d'indice 2 : c'est le sous-groupe des éléments qui préservent l'orientation. Le groupe Γ est fuchsien, de domaine fondamental $P := T \cup \sigma_2(T)$ par exemple. Les sommets de P sont alors s_1, s_2, s_3 et $s_4 = \sigma_2(s_2)$. En notant δ_i l'arc géodésique $s_i s_{i+1}$, on a

$$\varphi_1(\delta_1) = \delta_4, \quad \varphi_3(\delta_3) = \delta_2 \quad \text{et} \quad \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 = \text{id}.$$

Les cycles sont

$$\{s_1\}, \quad \{s_2, s_4\}, \quad \{s_3\}$$

d'angles respectifs

$$\frac{2\pi}{k_1}, \quad \frac{2\pi}{k_2}, \quad \frac{2\pi}{k_3},$$

et de groupes d'isotropie engendrés respectivement par

$$\varphi_1, \quad \varphi_2 = (\varphi_3 \varphi_1)^{-1}, \quad \varphi_3.$$

Les relations du groupe sont

$$\varphi_i^{k_i} = \text{id}.$$

pour chaque $i = 1, 2, 3$ tel que k_i soit fini. Lorsque $k_i = \infty$, on vérifie que la condition de parabolicité est satisfaite pour le cycle associé au sommet s_i , $i = 1, 2, 3$. La surface \bar{S} est compacte, de genre 0 et possède 3 points orbifold (éventuellement d'angle nul). Toute sphère avec 3 points orbifold s'obtient ainsi pourvu que $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < 1$, c'est-à-dire

$$\text{aire}(T) = \pi - \left(\frac{2\pi}{k_1} + \frac{2\pi}{k_2} + \frac{2\pi}{k_3} \right) > 0;$$

c'est la condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un triangle hyperbolique ayant de tels angles.

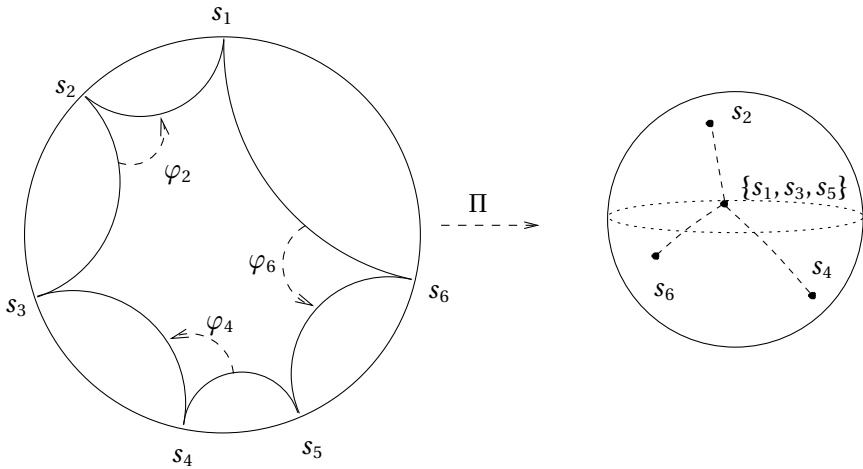


FIGURE VI.7. La sphère privée de 4 points

VI.2.2. La sphère de Riemann privée de $n + 1$ points

Considérons maintenant un polygone P à $2n$ côtés du disque hyperbolique \mathbb{D} dont tous les sommets s_1, \dots, s_{2n} sont sur le bord $\partial\mathbb{D}$, cycliquement ordonnés. On note δ_{i+1} le côté $s_i s_{i+1}$ et φ_{2k} la transformation parabolique qui fixe s_{2k} et envoie δ_{2k+1} sur δ_{2k} . Les cycles sont

$$\{s_2\}, \{s_4\}, \dots, \{s_{2n}\} \text{ et } \{s_1, s_3, \dots, s_{2n-1}\}.$$

Les groupes d'isotropie correspondants sont engendrés par

$$\varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_{2n} \text{ et } \varphi := \varphi_2 \circ \varphi_4 \circ \dots \circ \varphi_{2n}.$$

La transformation φ est parabolique si et seulement si

$$\frac{(s_1 - s_3)(s_3 - s_5) \cdots (s_{2n-1} - s_1)}{(s_2 - s_4)(s_4 - s_6) \cdots (s_{2n} - s_2)} = -1.$$

Si cette condition est satisfaite, le groupe Γ engendré par les φ_i est fuchsien. La surface \bar{S} est compacte, lisse, de genre 0 et possède $n + 1$ points orbifold d'angle nul. Munie de la structure complexe définie en VI.1.8, \bar{S} n'est autre que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Quant à $S = \mathbb{H}/\Gamma$, c'est $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ moins $n + 1$ points. Modulo l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, on peut fixer trois sommets, disons s_2, s_4 et s_6 ; il reste $2n - 3$ paramètres assujettis aux inégalités cycliques et à la condition de parabolicité. L'ensemble de ces polygones forme donc un sous-ensemble semi-algébrique réel de \mathbb{R}^{2n-3} de dimension $2n - 4$. Étant donnés E_1 et E_2 , deux $(n + 1)$ -uplets de points sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, les surfaces de

Riemann $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - E_1$ et $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - E_2$ sont biholomorphiquement équivalentes s'il existe une transformation de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ qui envoie E_1 sur E_2 . L'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ étant transitive sur les triplets de points, une telle structure est complètement déterminée par la donnée de $n - 2$ points distincts sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. On retrouve une dimension réelle de $2n - 4$.

VI.2.3. La surface de genre $g > 1$

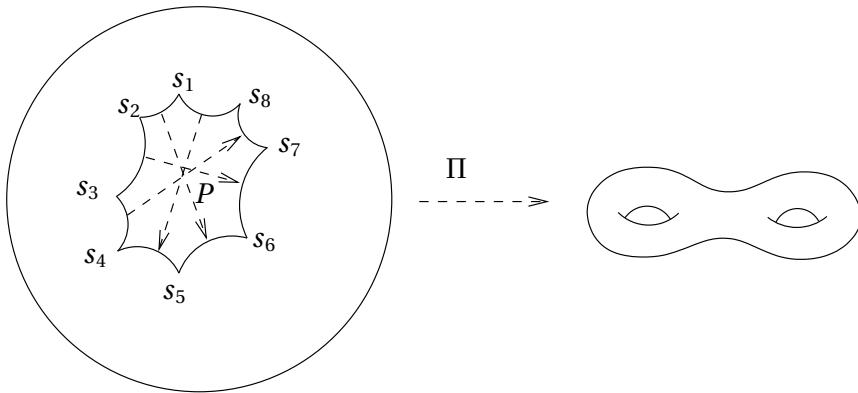


FIGURE VI.8. La surface de genre 2

On considère enfin un polygone P à $4g$ côtés dans \mathbb{H} dont les sommets $s_1, \dots, s_{4g} \in \mathbb{H}$ sont cycliquement ordonnés, de côtés $\delta_i = s_i s_{i+1}$. On suppose en outre δ_i de même longueur que δ_{i+2g} et on note φ_i la transformation qui envoie le premier sur le second en renversant l'orientation induite par P . Tous les sommets forment un seul cycle ; on suppose enfin que la somme des angles est exactement 2π . Le quotient par le groupe fuchsien engendré par les φ_i est une surface de Riemann compacte de genre g . Modulo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, on obtient, pour décrire un tel polygone, $8g - 3$ paramètres réels. Ces paramètres sont assujettis à $2g + 1$ équations, à savoir la congruence des côtés opposés, puis la somme des angles. Ceci nous laisse $6g - 4$ paramètres libres, c'est à dire 2 de plus que la dimension de l'espace des structures complexes sur la surface compacte orientable de genre g . Ces deux dimensions viennent du fait qu'une même surface de Riemann peut être représentée par une famille à deux paramètres de tels polygones : le cycle (d'angle 2π) ne joue aucun rôle sur la surface et peut être déplacé à volonté ; on peut ainsi déformer

continûment le découpage géodésique de la surface. Autrement dit, on peut déformer le polygone sans modifier ni la surface, ni le groupe Γ . On obtient finalement $6g - 6$ paramètres réels essentiels.

Remarque VI.2.1. — Ces calculs de dimension laissent entrevoir le saut conceptuel qu'implique l'introduction des groupes fuchsien; alors qu'auparavant, les surfaces de Riemann uniformisées ne semblaient représenter que des cas exceptionnels (voir par exemple le cas de la quartique de Klein), on voit à présent des ouverts entiers de structures complexes uniformisées grâce aux groupes fuchsien. Nous reviendrons de manière plus rigoureuse sur ce point dans le chapitre suivant.

VI.3. Algébrisation d'après Poincaré

VI.3.1. Formes automorphes

Rappelons (voir V.1.2) qu'une *forme automorphe* de poids $\nu \in \mathbb{N}$ pour un sous-groupe Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est une forme différentielle (holomorphe ou méromorphe) sur \mathbb{H} de degré ν

$$\Theta = \theta(z)(dz)^\nu$$

invariante par Γ , c'est à dire satisfaisant

$$\theta \circ \varphi(z) \cdot (\varphi'(z))^\nu = \theta(z), \quad \forall z \in \mathbb{H}, \varphi \in \Gamma.$$

Ceci n'a d'intérêt que lorsque Γ est discret. Par abus de langage, la fonction θ est aussi appelée forme automorphe de poids ν .

Théorème VI.3.1. — Soit Γ un groupe fuchsien et f une fonction rationnelle n'ayant pas de pôle sur $\partial\mathbb{H}$. Alors pour tout $\nu \geq 2$, la série

$$\theta(z) := \sum_{\varphi \in \Gamma} f \circ \varphi(z) \cdot (\varphi'(z))^\nu$$

converge uniformément vers une forme automorphe méromorphe sur tout compact de \mathbb{H} .

Démonstration. — Considérons le disque

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}.$$

Grâce à une identification de \mathbb{H} à \mathbb{D} , le groupe Γ agit désormais sur \mathbb{D} . Choisissons un point z_0 dans le disque qui n'est fixé par aucun élément de $\Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$.

Soit $D = \overline{\mathbb{D}(z_0, \varepsilon)}$ un disque fermé de centre z_0 et de rayon ε (pour la métrique euclidienne) contenu dans \mathbb{D} . Nous montrons dans un premier temps la convergence uniforme de la série

$$\sum_{\varphi \in \Gamma} |\varphi'(z)|^2$$

sur D pour ε suffisamment petit. Tout d'abord, les $\varphi(D)$, $\varphi \in \Gamma$ sont deux à deux disjoints de sorte que l'aire (euclidienne) totale $\sum_{\varphi \in \Gamma} \text{aire}(\varphi(D))$ est finie.

Nous affirmons qu'il existe une constante $K(\varepsilon) > 0$ telle que tout $\varphi \in \Gamma$ satisfait

$$\text{Max}_{z \in D} |\varphi'(z)|^2 < K^2 \frac{\text{aire}(\varphi(D))}{\text{aire}(D)}.$$

On en déduit

$$\sum_{\varphi \in \Gamma} |\varphi'(z)|^2 \leq \frac{K^2}{\text{aire}(D)} \sum_{\varphi \in \Gamma} \text{aire}(\varphi(D)) < \infty$$

d'où la convergence normale de la série sur D . En particulier, les termes $|\varphi'(z)|$ sont uniformément bornés par une constante $C > 0$ sur D . Il en résulte que pour tout $\nu > 2$, les termes $|\varphi'(z)|^{\nu-2}$ sont majorés par $C^{\nu-2}$, d'où la convergence normale sur D :

$$\sum_{\varphi \in \Gamma} |\varphi'(z)|^\nu \leq C^{\nu-2} \sum_{\varphi \in \Gamma} |\varphi'(z)|^2 < \infty.$$

Maintenant, si $f(z)$ est une fonction rationnelle, ou même méromorphe au voisinage du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$, sans pôle sur le bord $\partial\mathbb{D}$, elle sera uniformément bornée sur tous les $\varphi(D)$ sauf pour un nombre fini sur lesquels elle est méromorphe et la convergence de la série

$$\sum_{\varphi \in \Gamma} f \circ \varphi \cdot (\varphi'(z))^\nu$$

est démontrée sur D , pour tout $\nu \geq 2$.

Il reste à montrer l'inégalité estimant la borne supérieure de $|\varphi'|$ sur D . Si $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, on a

$$|\varphi'(z)| = \frac{1}{|cz+d|^2} = \frac{1}{|c^2|} \cdot \frac{1}{\text{dist}(z, -\frac{d}{c})^2}$$

où seule varie sur D la distance euclidienne de z au point $\varphi^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$. Notons que l'égalité $\varphi(\infty) = \infty$ n'a lieu que pour un nombre fini d'éléments du groupe. Si l'on met à part les termes correspondants à ces éléments, on peut supposer $c \neq 0$. Désignons par M_φ et m_φ le maximum et le minimum de $|\varphi'(z)|$ sur D . Alors

$$\frac{M_\varphi}{m_\varphi} \leq \left(\frac{\text{dist}(D, \varphi^{-1}(\infty)) + 2\varepsilon}{\text{dist}(D, \varphi^{-1}(\infty))} \right)^2 < \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\text{dist}(D, \partial\mathbb{D})} \right)^2.$$

Appelons K le majorant dans l'expression ci-dessus, et A_φ l'aire euclidienne de $\varphi(D)$. En désignant par A l'aire euclidienne de D , il vient

$$A_\varphi > m_\varphi^2 \cdot A > \frac{M_\varphi^2}{K^2} \cdot A$$

qui conduit directement à

$$\text{Max}_{z \in D} |\varphi'(z)|^2 < K^2 \frac{\text{aire}(\varphi(D))}{\text{aire}(D)}.$$

□

Le nombre de pôles de $\theta(z) \cdot (dz)^\nu$ dans le domaine fondamental P est (sauf simplifications) égal au nombre de pôles de f dans le disque. En reprenant les notations de la section VI.1.8, le quotient $S = \mathbb{H}/\Gamma$ est une surface de Riemann de type fini. Sa compactification \bar{S} obtenue en ajoutant les cycles à l'infini est une surface de Riemann à bord.

Lemme VI.3.2. — *La forme automorphe $\theta(z)(dz)^\nu$ construite dans le théorème VI.3.1 définit une forme différentielle Θ méromorphe de degré ν sur la surface de Riemann compacte \bar{S} .*

Démonstration. — Puisque $\theta(z)(dz)^\nu$ est méromorphe sur \mathbb{H} et automorphe (Γ -invariante), elle descend en une forme différentielle méromorphe de degré ν sur

$$S^* = S - \text{cycles elliptiques}.$$

Il nous faut maintenant étudier le comportement de Θ au voisinage de chaque type de cycle.

Commençons par les cycles elliptiques. Plaçons-nous de nouveau dans le disque et supposons que 0 appartienne à un cycle elliptique d'angle $2\pi/q$, de sorte que le sous-groupe d'isotropie de Γ en 0 soit

engendré par la transformation elliptique $\varphi(z) = e^{2i\pi/q}z$. La forme Θ est en particulier invariante par φ et s'écrit

$$\Theta = \sum_{k \geq k_0} a_{kq} z^{kq} \left(\frac{dz}{z}\right)^v = \sum_{k \geq k_0} \frac{a_{kq}}{q^v} w^k \left(\frac{dw}{w}\right)^v,$$

où $w = z^q$ est la coordonnée locale sur S au voisinage du cycle correspondant. La forme Θ est donc méromorphe sur S .

Notons que, même si la fonction rationnelle f du théorème VI.3.1 est holomorphe au voisinage de l'orbite de 0, la forme Θ aura un pôle au point correspondant de S . En effet, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors en moyennant sur le sous-groupe d'isotropie, il vient

$$\sum_{l=1}^q f \circ \varphi^l \cdot (d\varphi^l)^v = q \sum_{k \geq \frac{v}{q}} a_{kq-v} z^{kq} \left(\frac{dz}{z}\right)^v = q \sum_{k \geq \frac{v}{q}} \frac{a_{kq-v}}{q^v} w^k \left(\frac{dw}{w}\right)^v.$$

Ainsi, la forme Θ sera en général d'ordre $k - v$, où k est le plus petit entier $\geq \frac{v}{q}$. Dès que $v, q \geq 2$, ce qui est notre cas, on a $k - v < 0$.

Passons maintenant aux cycles paraboliques. Retournons dans \mathbb{H} et supposons que le point ∞ appartienne à un cycle parabolique, dont le groupe d'isotropie est engendré par $\varphi(z) = z + 1$. Il lui correspond un point s sur la surface \bar{S} en lequel une coordonnée locale est donnée par $w = e^{2i\pi z}$; une base de voisinages est donnée par la famille d'horosphères $\mathbb{H}_M := \{\text{Im}(z) > M\}$, $M > 0$. Quitte à modifier le polygone fondamental P , on peut supposer que

$$P_M := P \cap \mathbb{H}_M = \left\{-\frac{1}{2} \leq \text{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\right\} \cap \mathbb{H}_M$$

pour $M \gg 0$. Par construction, la forme $\theta(z)(dz)^v$ ne possède qu'un nombre fini de pôles dans P et est donc holomorphe sur P_M pour $M \gg 0$. Par ailleurs, $\theta(z)(dz)^v$ est φ -invariante et descend en une forme

$$\Theta = \tilde{\theta}(w) \left(\frac{dw}{w}\right)^v := \frac{1}{(2i\pi)^v} \theta\left(\frac{\log(w)}{2i\pi}\right) \left(\frac{dw}{w}\right)^v.$$

Toute la difficulté est de montrer que $\tilde{\theta}(w)$, qui n'est *a priori* définie holomorphe que sur un voisinage épointé, est à croissance modérée et donc s'étend méromorphiquement en $w = 0$. Nous allons le montrer dans un premier temps pour la série

$$\theta_0(z) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(z+k).$$

Rappelons que la forme rationnelle $f(z)(dz)^v$ est, par hypothèse, holomorphe au voisinage de l'ensemble limite de Γ ; puisque dz a un pôle d'ordre 2 en ∞ , il s'en suit que la fonction f s'annule à l'ordre $2v$ en ∞ . Ainsi, pour $M \gg 0$,

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^{2v}} \quad \forall z \in \mathbb{H}_M,$$

pour une constante $C > 0$. On a donc, pour tout $z_0 \in P_M$

$$\begin{aligned} |\theta_0(z_0)| &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{C}{|z_0 + k|^{2v}} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2C}{(|z_0|^2 + k^2)^v} \\ &\leq \frac{2C}{|z_0|^{2v}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{k}{|z_0|}\right)^2\right)^v} \end{aligned}$$

et comme il y a au plus $|z_0| + 1$ entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq \frac{k}{|z_0|} < n + 1$, il vient

$$|\theta_0(z_0)| \leq \frac{2C}{|z_0|^{2v}} (|z_0| + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1 + n^2)^v} \leq \frac{C'}{|z_0|^{2v-1}}$$

pour une constante $C' > 0$. Par suite, on a

$$\theta_0(z)(dz)^v = \tilde{\theta}_0(w) \left(\frac{dw}{w}\right)^v$$

avec $\tilde{\theta}_0(w)$ holomorphe au voisinage de $w = 0$, s'annulant en $w = 0$.

Le cas général s'en déduit aisément. On choisit, pour chaque classe à droite de Γ modulo $\langle \varphi \rangle$, un représentant φ_i , $i \in I$, puis on réordonne la série

$$\theta(z) = \sum_{i \in I} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_i(z+k) \cdot (dz)^v = \sum_{i \in I} \theta_i(z)(dz)^v$$

où $f_i := f \circ \varphi_i \cdot (\varphi'_i)^v$, $i \in I$. D'après le théorème VI.3.1, cette somme converge uniformément sur tout compact de \mathbb{H} , et en particulier sur la couronne $\{r \leq |w| \leq r'\}$ définie autour de $w = 0$ par $P_M \setminus P_{M+1}$. Chaque fonction f_i est rationnelle et s'annule à l'ordre $2v$ au point ∞ ; par suite, chaque série $\tilde{\theta}_i(w)$ est holomorphe et s'annule au point $w = 0$. La série $\tilde{\theta}(w)$ est donc limite uniforme sur la couronne $\{r \leq |w| \leq r'\}$ de fonctions holomorphes sur le disque $\{|w| \leq r'\}$ s'annulant en $w = 0$. La limite est donc holomorphe, s'annulant en 0, et la forme différentielle $\Theta = \tilde{\theta}(w) \left(\frac{dw}{w}\right)^v$, méromorphe d'ordre $\geq 1 - v$.

Il nous reste à montrer que Θ s'étend méromorphiquement à la surface de Riemann compacte \bar{S} lorsque Γ possède des cycles hyperboliques. Pour cela, nous retournons au disque \mathbb{D} et considérons le domaine fondamental P' , symétrisé de P par la réflexion de Schwarz relativement au cercle $\partial\mathbb{D}$. La convergence de la série

$$\sum_{\varphi \in \Gamma} |\varphi'(z)|^{\nu}$$

reste vraie dans tout compact $D \subset \mathbb{C}$ n'approchant pas l'orbite $\Gamma(\infty)$ dès lors qu'elle est démontrée en un point $z_0 \in \mathbb{D}$. Il suffit en effet de remarquer que, pour $z \in D$, on a

$$\frac{|\varphi'(z)|}{|\varphi'(z_0)|} = \left(\frac{\text{dist}(z_0, \varphi^{-1}(\infty))}{\text{dist}(z, \varphi^{-1}(\infty))} \right)^2 < \left(\frac{\text{dist}(z_0, \varphi^{-1}(\infty))}{\text{dist}(D, \Gamma(\infty))} \right)^2 ;$$

puisque Γ agit discrètement sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \bar{\mathbb{D}}$, on peut borner uniformément $\text{dist}(z_0, \varphi^{-1}(\infty))$ sur tous les éléments non triviaux de Γ ce qui établit la convergence de la série sur D . En fait, dès que le compact D n'est pas accumulé par une infinité de points de $\Gamma(\infty)$ (c'est à dire ne rencontre pas l'ensemble limite du groupe), alors, quitte à mettre de côté le nombre fini de termes contenant un pôle, la série converge encore. La forme Θ s'étend donc méromorphiquement à \bar{S} . \square

Lorsqu'il n'y a pas de cycle hyperbolique, et que la forme différentielle Θ de degré ν est non identiquement nulle sur la surface compacte \bar{S} , on a

$$\text{nombre de zéros} - \text{nombre de pôles} = 2\nu(g - 1)$$

où g est le genre de la surface \bar{S} , soit encore, par la proposition VI.1.7 :

$$\text{nombre de zéros} - \text{nombre de pôles} = \nu(n - c - 1)$$

où $2n$ est le nombre de côtés de P et c le nombre de cycles (elliptiques ou paraboliques) distincts. Pour construire une forme Θ non identiquement nulle à l'aide du théorème VI.3.1, il suffit de faire en sorte qu'elle ait un pôle. Notons cependant que plusieurs pôles de f peuvent se trouver dans la même orbite sous Γ et se simplifier dans la série θ . Pour éviter cela, on pourra par exemple choisir la fonction $f(z)$ de sorte que tous ses pôles soient dans l'intérieur \mathring{P} du polygone fondamental : ces pôles persisteront (avec le même ordre) pour la forme Θ .

VI.3.2. Fonctions fuchsiennes et algébrisation de la surface de Riemann

On appelle *fonction fuchsienne* pour le groupe Γ toute fonction méromorphe $f(z)$ sur le disque \mathbb{D} invariante par Γ :

$$f \circ \varphi(z) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}, \varphi \in \Gamma$$

(i.e. une forme automorphe de poids $\nu = 0$). On construit de telles fonctions en prenant le quotient de deux formes automorphes de même poids ; pour assurer la non-trivialité, il suffit de choisir convenablement les pôles des fonctions rationnelles utilisées dans le théorème VI.3.1. Ce sont les « *nouvelles transcendentes* » que propose Poincaré.

Proposition VI.3.3. — *Supposons que le polygone P n'ait pas de cycle hyperbolique. Alors le corps des fonctions fuchsiennes est engendré par deux d'entre elles, disons $\mathbb{C}(x, y)$, où $x = x(z)$ et $y = y(z)$ satisfont une relation algébrique $F(x, y) = 0$, $F \in \mathbb{C}[X, Y]$. L'application*

$$\mathbb{H} \rightarrow X = \{F(x, y) = 0\}; \quad z \mapsto (x(z), y(z))$$

identifie le quotient compact \bar{S} avec une compactification/désingularisation de la courbe algébrique $X = \{F(x, y) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Le genre de cette courbe est celui calculé plus haut.

Remarque VI.3.4. — Ici, la courbe est considérée modulo équivalence birationnelle (i.e. isomorphisme des corps de fonctions). Lorsque le genre g est ≥ 3 , on peut ne pas obtenir de courbe lisse. Elle a des singularités « apparentes » qui dépendent du choix des générateurs x et y . On peut néanmoins parler de la surface de Riemann sous-jacente en passant à sa désingularisée ou, ce qui revient au même, à n'importe quel plongement dans un espace projectif \mathbb{P}^N . Le genre de la courbe est ainsi défini.

Démonstration. — Tout d'abord, il est facile de construire une fonction fuchsienne non constante sur le quotient S en prenant le quotient de deux formes automorphes de même poids : on peut choisir les pôles de la seconde de sorte qu'ils ne compensent pas les pôles de la première. Notons $x(z)$ la fonction obtenue. Nous allons prouver que le corps K des fonctions méromorphes sur S est une extension finie de $k = \mathbb{C}(x)$. Pour cela, montrons d'abord que tout élément $y(z) \in K$ est algébrique sur k . En effet, $x(z)$ est un revêtement ramifié de degré d de la sphère

de Riemann. Ainsi, son inverse possède en un point x générique exactement d déterminations $z_i(x)$, $i = 1, \dots, d$. Les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_k(x)$ des d déterminations locales de $y(z_i(x))$ sont quant à elles bien définies et méromorphes sur la sphère de Riemann, donc rationnelles en x . Finalement, $y(z)$ est solution de l'équation polynomiale

$$y^d - \sigma_1(x)y^{d-1} + \dots + (-1)^{d-1}\sigma_{d-1}(x)y + (-1)^d\sigma_d(x) = 0.$$

Comme le degré sur k de tout élément de K est borné par d , on voit (grâce au théorème de l'élément primitif) que K est une extension finie de k et finalement que $K = \mathbb{C}(x(z), y(z))$ pour un certain $y \in K$. \square

VI.3.3. Dépendance d'une fonction fuchsienne par rapport au groupe Γ

Considérons le polygone fondamental P_0 d'un groupe fuchsien Γ_0 , ainsi que les générateurs $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ donnés par la proposition VI.1.3. Imaginons maintenant une déformation

$$t \mapsto P_t \subset \mathbb{H}$$

du polygone P_0 dont les sommets finis ou infinis dépendent continûment d'un paramètre t , sans collision, et satisfaisant identiquement aux hypothèses du théorème VI.1.10 : il existe une déformation continue des générateurs

$$t \mapsto \varphi_1^t, \dots, \varphi_n^t$$

telle que les groupes Γ_t engendrés soient tous fuchsien. Par exemple, dans le cas compact, il suffit que les angles aux cycles soient constants et que les côtés conjugués par les φ_i^t restent conjugués, *i.e.* de même longueur.

Dans ce cas, la famille de formes automorphes

$$\theta_t(z) := \sum_{\varphi \in \Gamma_t} f \circ \varphi(z) \cdot (\varphi'(z))^y$$

construite à partir d'une fonction rationnelle f donnée dépendra elle aussi continûment du paramètre t ; en effet, il suffit pour cela de remarquer que, dans la preuve du théorème VI.3.1, toutes les constantes intervenant dans la majoration de la série

$$\sum_{\varphi \in \Gamma_t} |\varphi'(z)|^2$$

sur D dépendent continûment de t . La dépendance continue se prolonge automatiquement aux cycles paraboliques de la surface \bar{S}_t . En prenant le quotient de deux telles formes, on construira une fonction méromorphe $x_t(z)$ dépendant continûment de t . En particulier, la fonction méromorphe $x_t : \bar{S} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est de degré constant ; la construction de la fonction $y_t(z)$ dans la proposition VI.3.3 dépendra alors continûment de t , et la courbe $X_t = \{F_t(X, Y) = 0\}$ aussi.

VI.4. Appendice

Nous concluons ce chapitre par deux lemmes techniques qui seront utiles dans le chapitre IX pour comprendre comment Poincaré uniformise les structures complexes obtenues en ôtant 4 points à la sphère de Riemann. Le lecteur pourra omettre cette section en première lecture.

Considérons le disque unité \mathbb{D} muni de la métrique hyperbolique. On notera respectivement dist et aire la distance et l'aire pour cette métrique. Par exemple, le disque ouvert centré en 0 et de rayon $R > 0$ (pour la métrique hyperbolique) est

$$D(0, R) := \{z \in \mathbb{D} ; \text{dist}(0, z) < R\} \quad \left(= \mathbb{D}(0, \frac{e^R - 1}{e^R + 1}) \right)$$

et son aire (hyperbolique) croît exponentiellement en R :

$$\text{aire}(D(0, R)) = 2\pi(\cosh(R) - 1), \quad \cosh(R) = \frac{e^R + e^{-R}}{2}.$$

Considérons maintenant un groupe fuchsien Γ agissant sur le disque \mathbb{D} .

Lemme VI.4.1. — *Pour tout rayon $R > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $z_0 \in D(0, R)$, le disque $D(z_0, \varepsilon)$ contient au plus k autres points de l'orbite $\Gamma(z_0)$. Si Γ est de type fini, alors on peut choisir k indépendamment de R avec $\varepsilon(R) = c e^{-c'R}$, $c, c' > 0$.*

Démonstration. — Supposons d'abord Γ sans cycle elliptique au voisinage de $\overline{D(0, R)}$: aucun élément non trivial de Γ n'aura de point fixe dans ce voisinage. Alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ séparant deux points quelconques d'une même orbite dans $D(0, R)$. Si tel n'était pas le cas, on trouverait, par compacité de $\overline{D(0, R)}$, une suite de points $z_n \in D(0, R)$ et d'éléments $\varphi_n \in \Gamma$ tels que z_n et $\varphi_n(z_n)$ convergent vers un même point

$z_0 \in \overline{D(0, R)}$; on trouverait alors, dans l'adhérence des φ_n , une transformation φ fixant z_0 . Mais puisque Γ est discret, la suite φ_n doit être stationnaire et $\varphi \in \Gamma$: contradiction. Ici, $k = 0$.

Si maintenant Γ possède un point fixe elliptique $z_0 \in \overline{D(0, R)}$, par exemple d'ordre k , alors dans l'orbite d'un point arbitrairement proche de z_0 , on trouvera un k -uplet de points arbitrairement proches les uns des autres. En prenant, disons, $k + 1$ majorant l'ordre maximal d'un point fixe elliptique dans $\overline{D(0, R)}$, l'argument précédent permet de trouver ε .

Dans le cas où Γ est de type fini, et lorsque R croît, le complément de $D(0, R)$ ne contiendra plus qu'un nombre fini de cycles paraboliques ou hyperboliques d'un polygone fondamental. La distance entre deux points quelconques d'une même orbite ne sera pas minorée dans le cas d'un bout parabolique : si φ est parabolique, un calcul immédiat montre que $\text{dist}(z, \varphi(z)) \leq c e^{-c' \text{dist}(0, z)}$ où $c' > 1$ peut être pris arbitrairement proche de 1 quitte à choisir $c > 0$ convenablement. \square

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons C_n la couronne

$$C_n := D(0, n + 1) - D(0, n)$$

et décomposons la série du théorème VI.3.1 sous la forme d'une somme $\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta_n(z)$ avec

$$\theta_n(z) := \sum_{\varphi \in \Gamma, \varphi(z) \in C_n} f \circ \varphi(z) \cdot (\varphi'(z))^v.$$

Lemme VI.4.2. — *Étant donné Γ un groupe fuchsien, $v > 1$ et $R > 0$, il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\sum_{\varphi \in \Gamma, \varphi(z) \in C_n} |\varphi'(z)|^v \leq K e^{(1-v)n},$$

la constante K ne dépendant que de v , de R et des deux constantes ε et k données par le lemme précédent.

Démonstration. — Étant donné un rayon $R > 0$ fixé, le lemme précédent nous garantit l'existence de constantes $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ telles que pour chaque $z_0 \in D(0, R)$, tout point du disque \mathbb{D} soit contenu dans $\varphi(D(z_0, \varepsilon))$ pour au plus k éléments $\varphi \in \Gamma$ distincts. Ainsi, le nombre de points de l'orbite de z_0 contenus dans le disque $D(0, n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est majoré par

$$\#(\Gamma(z_0) \cap D(0, n)) \leq k \frac{\text{aire}(D(0, n))}{\text{aire}(D(z_0, \varepsilon))} \leq k \frac{2\pi(\cosh(n + \varepsilon) - 1)}{2\pi(\cosh(\varepsilon) - 1)} \leq k \frac{e^n + \varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

En particulier, le nombre de points dans la couronne C_n est lui aussi majoré par

$$\#(\Gamma(z_0) \cap C_n) \leq k \frac{e^{n+1} + \varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que pour tout automorphisme φ du disque \mathbb{D} , on a

$$|\varphi'(z)| = \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Or, lorsque $\varphi(z_0) \in C_n$, on a

$$|\varphi(z_0)|^2 \geq \frac{e^n - 1}{e^n + 1}$$

de sorte que

$$1 - |\varphi(z_0)| \leq \frac{2}{\cosh(n) + 1} \leq \frac{4}{e^n}$$

et donc

$$|\varphi'(z_0)| \leq \frac{4}{(1 - R^2)e^n}.$$

Il vient

$$\sum_{\varphi(z_0) \in C_n} |\varphi'(z_0)|^v \leq K e^{(1-v)n} \quad \text{avec} \quad K = k \frac{e^{1+\varepsilon}}{\varepsilon^2} \left(\frac{4}{1 - R^2} \right)^v.$$

□

De ces lemmes, on tire

$$\sum_{n \geq N} \sup\{|\theta_n(z)|; z \in D(0, R)\} \leq K \frac{e^{(1-v)N}}{(v-1)N} \sup\{|f(z)|; z \in D(0, R)\}.$$

Par conséquent, si pour un sous-groupe Γ' de Γ , les Γ -orbites des points de $D(0, R)$ coïncident avec les Γ' -orbites en restriction à un disque $D(0, N)$ suffisamment grand, alors les séries θ et θ' correspondantes seront proches sur $D(0, R)$. Cette propriété nous sera utile pour comprendre le comportement de l'application $P_t \mapsto X_t$ construite dans la section VI.3.3 lorsque la famille de polygones P_t tend vers le bord de l'espace des modules.

La « méthode de continuité »

L'objectif de ce chapitre est d'établir le théorème d'uniformisation pour les surfaces de Riemann compactes, en suivant l'esprit de la « méthode de continuité » élaborée parallèlement par Klein et Poincaré. Celle-ci consiste à montrer que l'espace des surfaces de Riemann uniformisables est à la fois ouvert et fermé dans l'espace de toutes les surfaces de Riemann. La preuve que nous présentons ici suit plutôt l'approche de Klein, du moins en ce qui concerne la partie « ouverture » ; l'approche de Poincaré sera évoquée au chapitre suivant. Plus précisément, nous allons montrer que toute surface riemannienne compacte de caractéristique d'Euler-Poincaré strictement négative est conformément équivalente à un quotient du plan hyperbolique. Comme toute surface de Riemann admet une métrique riemannienne compatible avec sa structure complexe, ceci implique bien sûr que toute surface de Riemann compacte est uniformisée par le plan hyperbolique. L'ensemble des métriques uniformisables sera décrit comme l'image continue d'un espace de groupes fuchsien (modulo conjugaison) dans un espace \mathcal{T}_g de métriques (modulo équivalence conforme). Puis, en admettant que \mathcal{T}_g est une variété réelle connexe de dimension $6g - 6$ ($g \geq 2$), nous vérifierons que l'ensemble des métriques uniformisables est ouvert et fermé dans l'espace \mathcal{T}_g .

VII.1. Préliminaires

VII.1.1. Introduction

Passons aux définitions de ces différents objets. Soit S une surface fermée connexe orientée de genre $g \geq 2$ munie d'une structure lisse et soit Mét_S l'espace des métriques riemanniennes sur S , muni de la convergence uniforme. Nous dirons que deux métriques m_1 et m_2 sont équivalentes ($m_1 \sim m_2$) s'il existe $\varphi \in \text{Diff}^0(S)$ (groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité) tel que m_1 soit conforme à $\varphi^* m_2$. Notons

$$\mathcal{T}_g = \text{Mét}_S / \sim$$

l'espace quotient de cette relation. D'après le théorème local de Gauss – étendu au cas lisse par Korn et Lichtenstein – d'existence de coordonnées conformes, l'espace \mathcal{T}_g est isomorphe à l'espace de Teichmüller des structures complexes sur la surface S , à isotopies près.⁽¹⁾

L'espace des groupes fuchsien sera quant à lui décrit en termes de représentations. Soit Γ le groupe fondamental de la surface S . Notons $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ l'ensemble des représentations fidèles et discrètes de Γ dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ (avec la topologie produit de $\text{SL}(2, \mathbb{R})^{\Gamma}$) et considérons le quotient par conjugaison

$$\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g) = \text{Rep}_{\mathbb{R}}^{fd}(g) / \text{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Nous vérifierons que $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ est une variété de dimension $6g - 6$; en fait, c'est une réunion de composantes connexes de la variété des représentations irréductibles, considérées à conjugaison près (§ VII.2, VII.3).

1. Le fait que ce dernier est une variété topologique (en fait lisse) de dimension réelle $6g - 6$ peut se prouver avec les méthodes de Riemann. L'espace qu'il considérerait implicitement, soit l'espace modulaire \mathcal{M}_g des structures complexes modulo difféomorphismes, est lui singulier (orbifold) aux points correspondant aux surfaces ayant des automorphismes non triviaux (comme la surface de Klein!), mais on peut éliminer ce problème en considérant les « structures de niveau » (on fixe une base de $H_1(S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ pour $n \geq 3$), voir la discussion qui suit la proposition II.3.1. On obtient ainsi un espace intermédiaire entre \mathcal{T}_g et \mathcal{M}_g et les méthodes de Riemann permettent de prouver que c'est une variété complexe lisse de dimension $3g - 3$, donc *a fortiori* une variété réelle lisse de dimension $6g - 6$. Pour tout ceci, voir par exemple [HaMo1998].

Sinon, l'étude de l'espace de Teichmüller lui-même, qui donne en particulier qu'il est difféomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} , est faite dans de nombreux ouvrages. On peut conseiller [ImTa1992], qui contient aussi d'appréciables considérations historiques.

VII.1.2. Des représentations aux métriques

Il s'agit de construire une application continue de la variété des représentations $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ dans l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g . Pour toute la suite, fixons une composante connexe \mathcal{X} de $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ ⁽²⁾ et notons X la composante de $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ au-dessus de \mathcal{X} . Si \mathbb{H} désigne le demi-plan de Poincaré, le groupe Γ agit sur $X \times \mathbb{H}$ par

$$\gamma \cdot (\rho, z) = (\rho, \rho(\gamma) \cdot z) \quad (\rho, z) \in X \times \mathbb{H}.$$

La projection de $X \times \mathbb{H}$ sur X passe au quotient en une submersion de l'espace $E = \Gamma \backslash (X \times \mathbb{H})$ sur X ; c'est une fibration \mathcal{C}^∞ localement triviale par le théorème d'Ehresmann. De plus, la fibre S_ρ au-dessus de $\rho \in X$ est une surface compacte naturellement munie d'une métrique hyperbolique m_ρ . Comme surface de référence, choisissons la fibre $S = S_{\rho_0}$ au-dessus d'un point base $\rho_0 \in X$ fixé. Soit $\rho \in X$ et soit $c(t) = \rho_t$ ($t \in [0, 1]$) un chemin lisse (par morceaux) de ρ_0 à ρ . Le fibré c^*E est trivialisable et toute trivialisations $F : [0, 1] \times S \rightarrow c^*E$ définit une famille continue de difféomorphismes $f_t = F(t, \cdot) \in \text{Diff}(S, S_{\rho_t})$. Nous pouvons toujours supposer que f_0 est l'identité de S .

Lemme VII.1.1. — *La classe d'isotopie de la métrique $f_1^*m_\rho \in \text{Met}_S$ est indépendante du choix d'une trivialisations de c^*E (normalisée comme ci-dessus) et du choix d'un chemin c de ρ_0 à ρ .*

Démonstration. — Par construction, le groupe Γ agit *via* ρ comme groupe d'automorphismes du revêtement universel \mathbb{H} de S_ρ (pour tout $\rho \in X$). La trivialisations précédente F se relève en $\tilde{F} : [0, 1] \times \mathbb{H} \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{H}$ (revêtements universels), d'où une famille continue de relèvements $\tilde{f}_t : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}_{\rho_t}$; on peut supposer que \tilde{f}_0 est l'identité de \tilde{S} . Chaque \tilde{f}_t définit un automorphisme θ_t du groupe Γ par la relation $\tilde{f}_t \circ \rho_0(\gamma) = \rho_t(\theta_t(\gamma)) \circ \tilde{f}_t$ où $\gamma \in \Gamma$. Mais θ_t dépend continûment de t , donc $\theta_t = \theta_0 = \text{Id}_\Gamma$ pour tout $t \in [0, 1]$. Autrement dit \tilde{f}_t est Γ -équivariant, en particulier

$$\tilde{f}_1 \circ \rho_0(\gamma) = \rho(\gamma) \circ \tilde{f}_1 \quad (\gamma \in \Gamma). \tag{VII.1}$$

Considérons un autre chemin σ_t de ρ_0 à ρ , éventuellement confondu avec ρ_t pour traiter le changement de trivialisations. Soit $g_1 \in \text{Diff}(S, S_\rho)$

2. Il est connu que \mathcal{X} est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} , mais nous n'utiliserons pas ce fait.

obtenu par une trivialisat on normalisée. Son relevé \tilde{g}_1 , construit comme ci-dessus, vérifie aussi (VII.1). Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a donc

$$\tilde{f}_1^{-1} \circ \tilde{g}_1 \circ \rho_0(\gamma) = \rho_0(\gamma) \circ \tilde{f}_1^{-1} \circ \tilde{g}_1.$$

Le difféomorphisme $\varphi = f_1^{-1} \circ g_1$ vérifie évidemment $\varphi^*(f_1^* m_\rho) = g_1^* m_\rho$. De plus, la relation précédente signifie que l'automorphisme extérieur du groupe $\Gamma = \text{Aut}_S \tilde{S}$ associ e à φ est trivial. Il en résulte que φ est isotope à l'identité (voir [ZVC1970, 5.13]). \square

Considérons maintenant deux représentations conjuguées $\rho, \sigma \in X$, reliées par des chemins ρ_t et σ_t au point base ρ_0 ($t \in [0, 1]$). Choisissons des familles continues $f_t \in \text{Diff}(S, S_{\rho_t})$ et $g_t \in \text{Diff}(S, S_{\sigma_t})$ comme plus haut avec $f_0 = g_0 = \text{Id}_S$. Soit $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ tel que $\rho = A\sigma A^{-1}$ et soit A_t un chemin lisse de I   A dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ($t \in [0, 1]$). L' l ement A_t induit un difféomorphisme h_t de S_σ sur $S_{A_t \sigma A_t^{-1}}$, avec $h_0 = \text{Id}_{S_\sigma}$ et $h_1^* m_\rho = m_\sigma$. Alors g_t ($t \in [0, 1]$) suivi de $h_t \circ g_1$ ($t \in [0, 1]$) est une famille continue de difféomorphismes au-dessus d'un chemin de ρ_0 à ρ . D'après le lemme VII.1.1 (et comme $g_0 = \text{Id}_S$) les classes d'isotopie des métriques $f_1^* m_\rho$ et $(h_1 \circ g_1)^* m_\rho = g_1^* m_\sigma$ coïncident.

Notons $[\rho] \in \mathcal{X}$ la classe de conjugaison de $\rho \in X$ et notons $[m] \in \mathcal{T}_g$ la classe d'une métrique $m \in \text{Met}_S$. Grâce à ce qui précède, nous pouvons définir une application Φ de \mathcal{X} dans \mathcal{T}_g en posant

$$\Phi([\rho]) = [f_1^* m_\rho] \in \mathcal{T}_g \quad ([\rho] \in \mathcal{X}).$$

Il est immédiat de voir que Φ est continue en trivialisant le fibré E au-dessus d'un ouvert contractile contenant ρ et ρ_0 . Le théorème d'uniformisation «   la Klein » est contenu dans l'énoncé suivant.

Théorème VII.1.2. — *Soit \mathcal{X} une composante connexe de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$. Alors l'application $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_g$ est un homéomorphisme.*

VII.2. Représentations des groupes de surfaces

VII.2.1. Variété des représentations

Soit Γ le groupe fondamental d'une surface orientable fermée et connexe de genre $g \geq 2$ (en un certain point base) et soit $(\gamma_i)_{i=1, \dots, 2g}$ une famille génératrice de Γ telle que $\prod_{i=1}^g [\gamma_i, \gamma_{i+g}] = 1$, que nous appellerons

famille génératrice standard dans la suite. L'ensemble des représentations de Γ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ s'identifie au sous-ensemble $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$ formé des $(A_1, \dots, A_{2g}) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})^{2g}$ vérifiant

$$\prod_{i=1}^g [A_i, A_{i+g}] = I.$$

Ce sous-ensemble $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$ est une sous-variété algébrique affine de $M_2(\mathbb{C})^{2g}$. Notons $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$ formé des représentations ρ irréductibles sur \mathbb{C} (c'est-à-dire que les seuls sous-espaces de \mathbb{C}^2 invariants par $\rho(\Gamma)$ sont $\{0\}$ et \mathbb{C}^2). C'est un sous-ensemble non vide de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$ d'après le paragraphe VI.2.3 puisqu'une représentation fidèle et discrète est nécessairement irréductible, comme on le voit aisément⁽³⁾. C'est de plus un sous-ensemble ouvert (même pour la topologie de Zariski) car l'ensemble

$$\{(\rho, D) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(g) \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 ; \rho(\Gamma)D \subset D\}$$

des couples formés d'une représentation ρ et d'un sous-espace invariant non trivial D de \mathbb{C}^2 est un fermé dont la première projection (fermée car $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est compact) est $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(g) \setminus \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$.

Pour toute représentation ρ de Γ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, on peut voir l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ comme un Γ -module *via* l'action adjointe définie par $\gamma \cdot \xi = \mathrm{Ad}\rho(\gamma)(\xi) = \rho(\gamma)\xi\rho(\gamma)^{-1}$; notons ce module $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho}$. Rappelons qu'un 1-cocycle est une application c de Γ dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho}$ telle que pour tout $\gamma, \gamma' \in \Gamma$

$$c(\gamma\gamma') = c(\gamma) + \gamma \cdot c(\gamma'),$$

et qu'un 1-cobord est un 1-cocycle de la forme $c_{\xi}(\gamma) = \xi - \gamma \cdot \xi$ avec ξ dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho}$. Notons $Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho})$ l'espace des 1-cocycles et $B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho})$ le sous-espace des 1-cobords. On définit alors

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho}) = Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho}) / B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho}).$$

L'espace tangent à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ en un point σ quelconque est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$; l'application $\xi \mapsto \exp(\xi)\sigma$ fournit une carte locale de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ vers $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ au voisinage de σ .

3. Si le groupe $\rho(\Gamma)$ possédait un sous-espace invariant non trivial dans \mathbb{C}^2 (autrement dit une droite invariante) $\rho(\Gamma)$ serait alors résoluble car contenu dans un conjugué du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Proposition VII.2.1. — *L'espace $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(\mathfrak{g})$ est une sous-variété complexe de dimension $6g - 3$ dans $\text{SL}(2, \mathbb{C})^{2g}$. Pour tout $\rho \in \text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(\mathfrak{g})$ l'application qui à $c \in Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho})$ associe $(c(\gamma_i))_{1 \leq i \leq 2g} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{2g}$ induit un isomorphisme de $Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho})$ sur $T_{\rho} \text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. — Nous suivons la preuve donnée par Hubbard dans [Hub1981]. Soit $f : \text{SL}(2, \mathbb{C})^{2g} \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ définie par

$$f(\sigma_1, \dots, \sigma_{2g}) = \prod_{i=1}^g [\sigma_i, \sigma_{i+g}].$$

L'ensemble $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ a pour équation analytique $f = I$. Un calcul simple qui commence par

$$\begin{aligned} & [e^{\xi_1} \sigma_1, e^{\xi_{1+g}} \sigma_{1+g}] \\ &= e^{\xi_1} (\sigma_1 e^{\xi_{1+g}} \sigma_1^{-1}) (\sigma_1 \sigma_{1+g} \sigma_1^{-1} e^{-\xi_1} \sigma_1 \sigma_{1+g}^{-1} \sigma_1^{-1}) [\sigma_1, \sigma_{1+g}] e^{-\xi_{1+g}} \\ &= e^{\xi_1} e^{\text{Ad}_{\sigma_1} \xi_{1+g}} e^{-\text{Ad}_{(\sigma_1 \sigma_{1+g} \sigma_1^{-1})} \xi_1} e^{-\text{Ad}_{[\sigma_1, \sigma_{1+g}]} \xi_{1+g}} [\sigma_1, \sigma_{1+g}] \end{aligned}$$

et se termine en utilisant $e^{\chi_1} e^{\chi_2} = e^{\chi_1 + \chi_2} + O(|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2)$ implique que la différentielle de f en $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{2g}) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})^{2g}$ dans la direction $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2g}) \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{2g}$ est

$$\sum_{i=1}^g \prod_{j=1}^{i-1} [\sigma_j, \sigma_{j+g}] \cdot \left((1 - \sigma_i \sigma_{i+g} \sigma_i^{-1}) \cdot \xi_i + (\sigma_i - [\sigma_i, \sigma_{i+g}]) \cdot \xi_{i+g} \right).$$

Remarquons maintenant qu'un calcul analogue montre que l'application $\gamma_i \mapsto \xi_i$ ($i = 1 \dots 2g$) s'étend en un 1-cocycle $\Gamma \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho}$ (nécessairement unique) si et seulement si $d_{\sigma} f(\xi_1, \dots, \xi_{2g}) = 0$ où $\sigma = (\rho(\gamma_i))_{i=1, \dots, 2g}$.

Il s'agit donc de voir que l'application $d_{\sigma} f : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho}^{2g} \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est surjective dès que ρ est irréductible. Nous le déduisons en appliquant deux fois le lemme suivant :

Lemme VII.2.2. — *Si $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ ne commutent pas, l'application $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho} \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho} \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho}$ envoyant (ξ_1, ξ_2) sur $(1 - \sigma_1) \cdot \xi_1 + (1 - \sigma_2) \cdot \xi_2$ est surjective.*

Supposons d'abord que pour un certain entier i , $1 \leq i \leq g$, les éléments σ_i et σ_{i+g} ne commutent pas. Alors, puisque

$$(1 - \sigma_i \sigma_{i+g}) \cdot \xi_i + (\sigma_i - [\sigma_i, \sigma_{i+g}]) \cdot \xi_{i+g} \\ = \sigma_i \left((1 - \sigma_{i+g} \sigma_i) \sigma_i^{-1} \cdot \xi_i + (1 - \sigma_{i+g} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+g}^{-1}) \xi_{i+g} \right),$$

le lemme VII.2.2 implique que l'application $d_\sigma f$ est surjective en restriction aux ξ_i et ξ_{i+g} . Si maintenant nous supposons que chaque σ_i commute à σ_{i+g} la différentielle de f prend la forme

$$d_\sigma f(\xi) = \sum_{i=1}^g \left((1 - \sigma_{i+g}) \cdot \xi_i + (\sigma_i - 1) \cdot \xi_{i+g} \right)$$

et le lemme VII.2.2 permet encore de conclure puisque, par irréductibilité de ρ , il existe au moins deux indices i et j dans $[1, 2g]$ tels que σ_i et σ_j ne commutent pas. □

Démonstration du lemme VII.2.2. — Soit $\sigma \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, $\sigma \neq \pm I$. L'endomorphisme $f_\sigma(\xi) = (1 - \sigma) \cdot \xi$ est de rang 2 avec $\ker f_\sigma = \mathbb{C}(2\sigma - \text{tr} \sigma I)$. Il est immédiat de vérifier que $\ker f_\sigma$ est l'orthogonal de $\text{im } f_\sigma$ pour la forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ définie par $b(\xi, \xi') = \text{tr}(\xi \xi')$. Par suite, les images de f_{σ_1} et f_{σ_2} ne peuvent être confondues puisque σ_1 et σ_2 ne commutent pas, d'où le résultat. □

Le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ agit par conjugaison sur $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$ en préservant $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$ et sur ce sous-espace l'action est localement libre. En effet, soit \mathbb{C}_ρ^2 le $\mathbb{C}[\Gamma]$ -module simple défini par ρ . L'anneau $\text{End}_{\mathbb{C}[\Gamma]}(\mathbb{C}_\rho^2)$ se réduit aux homothéties (chacun de ses éléments est inversible ou nul et possède une valeur propre); le centralisateur de ρ dans $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ vaut donc $\{\pm I\}$. Notons

$$\mathcal{R}_{\mathbb{C}}^*(g) = \text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g) / \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

le quotient. Pour tout $\rho \in \text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$ la différentielle en l'identité de l'inclusion de $\text{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm 1\}$ dans $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$ définie par $\sigma \mapsto \sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1}$ est l'application de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\rho$ dans $Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\rho)$ donnée par $\xi \mapsto c_\xi$. On déduit alors facilement le théorème suivant de la proposition VII.2.1.

Théorème VII.2.3. — *L'espace $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}^*(g)$ est naturellement une variété complexe de dimension $6g - 6$. Son espace tangent en un point ρ est canoniquement isomorphe à $H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\rho)$.*

Démonstration. — Il reste à vérifier que $SL(2, \mathbb{C})$ agit proprement sur $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$, autrement dit que l'ensemble

$$E_K = \{\sigma \in SL(2, \mathbb{C}) : \sigma K \sigma^{-1} \cap K \neq \emptyset\}$$

est compact dans $SL(2, \mathbb{C})$ pour tout compact K de $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$. Pour cela, observons que l'ensemble F des couples $(\rho, \rho') \in \text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)^2$ pour lesquels l'équation linéaire

$$X\rho - \rho'X = 0$$

admet une solution non nulle $X \in M_2(\mathbb{C})$ constituent un fermé (car la projection $P(M_2(\mathbb{C})) \times (\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g))^2 \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)^2$ est propre) non vide ; de plus, sur F , l'espace solution est une droite $D(\rho, \rho') = \text{Hom}_{\mathbb{C}[\Gamma]}(\mathbb{C}_{\rho}^2, \mathbb{C}_{\rho'}^2)$ – engendrée par un inversible – qui dépend continûment de (ρ, ρ') . Si (σ_k) est une suite d'éléments de E_K , il existe $(\rho_k, \rho'_k) \in (K \times K) \cap F$ tels que $\sigma_k \rho_k = \rho'_k \sigma_k$, la suite (ρ_k, ρ'_k) étant supposée convergente vers $(\rho_{\infty}, \rho'_{\infty})$ par compacité. On a alors $D(\rho_k, \rho'_k) = \mathbb{C}\tau_k$ avec τ_k inversible ($k = 0, \dots, \infty$), $\lim \tau_k = \tau_{\infty}$ (k tend vers ∞) et on peut normaliser pour avoir $\tau_k \in SL(2, \mathbb{C})$. Par suite $\sigma_k = \pm \tau_k$ ($k < \infty$) et quitte à extraire, on a $\lim \sigma_k = \pm \tau_{\infty}$. L'ensemble E_K est donc compact. \square

Considérons maintenant l'ensemble $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^*(g)$ des représentations \mathbb{C} -irréductibles de Γ dans $SL(2, \mathbb{R})$, c'est-à-dire l'intersection des points réels $\text{Rep}_{\mathbb{R}}(g)$ de $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$ avec $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$. Il s'agit comme ci-dessus d'un ouvert non vide de $\text{Rep}_{\mathbb{R}}(g)$.

Corollaire VII.2.4. — *L'espace $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g) = \text{Rep}_{\mathbb{R}}^*(g)/SL(2, \mathbb{R})$ est une variété réelle de dimension $6g - 6$.*

Démonstration. — Les points de $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^*(g)$ sont des points lisses de $\text{Rep}_{\mathbb{R}}(g)$ car ce sont des points lisses de $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$ par la proposition VII.2.1 et cette variété est définie sur \mathbb{R} . Comme plus haut, on voit que l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^*(g)$ est localement libre (si $\rho \in \text{Rep}_{\mathbb{R}}^*(g)$, le module \mathbb{C}_{ρ}^2 est simple). Enfin la preuve de la propriété de cette action est analogue à celle du théorème VII.2.3. \square

Remarque VII.2.5. — Plus généralement, soit S une surface compacte de genre g , privée de M points (avec $M \geq 1$ et $2g + M > 2$). Le groupe fondamental Γ de S (qui est libre sur $2g + M - 1$ générateurs) est engendré par $2g + M$ éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g}, c_1, \dots, c_M$ satisfaisant l'unique relation $\prod_{i=1}^g [\sigma_i, \sigma_{i+g}] \prod_{j=1}^M c_j = 1$. On note $R_{\mathbb{C}}(g, M)$ l'espace des représentations ρ de Γ dans $SL(2, \mathbb{C})$ vérifiant la contrainte supplémentaire

$\text{tr}(\rho(c_j)) = -2$ ($1 \leq j \leq M$). On peut montrer comme ci-dessus que les espaces $R_{\mathbb{C}}^*(g, M)$ de représentations irréductibles et leurs quotients $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}^0(g, M) = R_{\mathbb{C}}^*(g, M)/\text{SL}(2, \mathbb{C})$ sont des variétés complexes de dimensions respectives $6g - 3 + 2M$ et $6g - 6 + 2M$. Ces résultats restent vrais si l'on remplace \mathbb{C} par \mathbb{R} .

VII.2.2. Caractères et invariants fondamentaux

Soit Γ un groupe de type fini et soit ρ une représentation de Γ dans $\text{SL}(N, \mathbb{C})$. Le *caractère* de ρ est la fonction χ_{ρ} de Γ dans \mathbb{C} définie par $\chi_{\rho}(\gamma) = \text{tr}(\rho(\gamma))$; deux représentations conjuguées dans $\text{SL}(N, \mathbb{C})$ ont le même caractère.

Poincaré s'intéresse à la réciproque quand il considère, dans le premier paragraphe de son mémoire [Poin1884b], une représentation de monodromie ρ_E qui provient d'une équation différentielle sur une surface. Le groupe Γ est dans ce cas le groupe fondamental de la surface et les $\chi_{\rho_E}(\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma$ sont les invariants que Poincaré associe aux substitutions $\rho_E(\gamma) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$. Poincaré affirme alors :

Si l'on connaissait les invariants de toutes les substitutions $\rho_E(\gamma)$, le groupe Γ serait complètement déterminé, puisque nous ne le regardons pas comme distinct de ses transformés $\sigma^{-1}\Gamma\sigma$. Mais il ne sera pas nécessaire de connaître tous ces invariants, il suffira d'en connaître un certain nombre que nous appellerons *invariants fondamentaux* et dont tous les autres ne seront que des fonctions.

Nous allons ici justifier cette affirmation (donnée sans démonstration). Cela nous sera aussi utile dans le chapitre VIII. La première phrase de cette citation est donnée par la proposition suivante.

Proposition VII.2.6. — *Soient ρ et ρ' deux représentations de Γ dans $\text{SL}(N, \mathbb{C})$. Si $\chi_{\rho} = \chi_{\rho'}$ et si ρ et ρ' sont irréductibles, alors ρ et ρ' sont conjuguées dans $\text{SL}(N, \mathbb{C})$.*

La démonstration que nous allons donner est due à Selberg [Sel1960] et se réduit aux lemmes VII.2.7 et VII.2.8 ci-dessous.

Lemme VII.2.7. — *Soit ρ' une représentation irréductible de Γ dans $\text{SL}(N, \mathbb{C})$. Alors il existe N^2 éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_{N^2}$ de Γ tels que la famille $(\rho'(\gamma_j))_{j=1, \dots, N^2}$ engendre le \mathbb{C} -espace vectoriel $M_N(\mathbb{C})$ des matrices carrées.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que le sous-espace vectoriel R engendré par les $\rho'(\gamma)$ quand γ décrit Γ est l'espace $M_N(\mathbb{C})$. C'est le lemme de Burnside, voir [Lan2002, XVII, corollaire 3.4]; en effet R est une sous-algèbre de $M_N(\mathbb{C})$ et l'espace \mathbb{C}^N est un R -module simple. \square

Lemme VII.2.8. — *Tout automorphisme d'algèbre $\psi : M_N(\mathbb{C}) \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ est intérieur.*

Démonstration. — Notons E_{ij} les matrices élémentaires. D'abord les $p_i = \psi(E_{ii})$ vérifient $p_i^2 = p_i$, $p_i p_j = 0$ si $i \neq j$, $\sum p_i = Id$; les p_i sont donc des projecteurs sur n droites indépendantes. À conjugaison près, on a $p_i = E_{ii}$. Puis $E_{kk}\psi(E_{ij}) = 0$ si $k \neq i$, $\psi(E_{ij})E_{kk} = 0$ si $k \neq j$, donc $\psi(E_{ij}) = a_{ij}E_{ij}$ ($a_{ij} \in \mathbb{C}$). On a $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ donc $a_{ij} = b_i/b_j$, c'est-à-dire que ψ est la conjugaison par la matrice $(\delta_{ij}b_i)$. \square

Démonstration de la proposition VII.2.6. — Soient $\gamma_j \in \Gamma$ ($j = 1, \dots, N^2$) comme au lemme VII.2.7. Montrons d'abord que si une combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{N^2} \lambda_j \rho(\gamma_j)$ ($\lambda_j \in \mathbb{C}$) est nulle dans $M_N(\mathbb{C})$ alors on a également $\sum_{j=1}^{N^2} \lambda_j \rho'(\gamma_j) = 0$. Pour cela considérons une combinaison linéaire quelconque $X = \sum_{k=1}^{N^2} \mu_k \rho'(\gamma_k) \in M_N(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(\sum_{j=1}^{N^2} \lambda_j \rho'(\gamma_j) X\right) &= \sum_{j,k=1}^{N^2} \lambda_j \mu_k \operatorname{tr}(\rho'(\gamma_j \gamma_k)) \\ &= \sum_{j,k=1}^{N^2} \lambda_j \mu_k \operatorname{tr}(\rho(\gamma_j \gamma_k)) \\ &= \operatorname{tr}\left(\sum_{j=1}^{N^2} \lambda_j \rho(\gamma_j) X\right) = 0. \end{aligned}$$

Il découle du lemme VII.2.7 (et du fait que la trace définit une forme bilinéaire non dégénérée sur $M_N(\mathbb{C})$) que $\sum_{j=1}^{N^2} \lambda_j \rho'(\gamma_j) = 0$. L'endomorphisme de $M_N(\mathbb{C})$ qui à une combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{N^2} \lambda_j \rho(\gamma_j)$ associe la matrice $\sum_{j=1}^{N^2} \lambda_j \rho'(\gamma_j) \in M_N(\mathbb{C})$ est donc bien défini. C'est un morphisme d'algèbre et le lemme VII.2.8 conclut la démonstration de la proposition VII.2.6. \square

Dans la deuxième phrase de la citation ci-dessus Poincaré explique qu'il suffit en fait de connaître les invariants d'un nombre fini de substitutions, les « invariants fondamentaux ».

Proposition VII.2.9. — Soit Γ le groupe fondamental d'une surface close de genre g . Pour tout $\gamma \in \Gamma$ on définit une fonction $\tau_\gamma : \mathcal{R}_\mathbb{C}(g) \rightarrow \mathbb{C}$ par $\tau_\gamma(\rho) = \text{tr}(\rho(\gamma)) = \chi_\rho(\gamma)$. Alors l'anneau T engendré par toutes les fonctions τ_γ ($\gamma \in \Gamma$) est de type fini.

Démonstration. — Ici $N = 2$. La preuve repose sur l'identité :

$$\text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(AB^{-1}) \quad (A, B) \in \text{SL}_2(\mathbb{C})^2$$

(qui résulte immédiatement de Cayley-Hamilton) et sur le fait que Γ est de type fini (on désignera par γ_i des générateurs, $1 \leq i \leq N$). Rappelons l'argument (voir [Hor1972] ou [CuSh1983, p. 116]). Soit T_0 l'anneau engendré par les τ_γ avec $\gamma = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_k}$, les indices i_1, \dots, i_k étant tous distincts (en particulier $k \leq N$). Considérons un élément

$$\delta = \gamma_{i_1}^{m_1} \cdots \gamma_{i_r}^{m_r} \in \Gamma$$

avec $m_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, r$). Supposons d'abord que les indices i_1, \dots, i_r sont tous distincts et vérifions que $\tau_\delta \in T_0$. Pour cela on procède par récurrence sur $q = \sum_{j=1}^r \max(m_j - 1, -m_j)$. Pour $q = 0$, on a $\tau_\delta \in T_0$ par définition. Pour $q > 0$, quitte à remplacer δ par un conjugué on peut supposer que $m_r \neq 1$. Si $m_r < 0$, alors d'après la relation sur les traces, on a

$$\tau_\delta = \tau_{\delta\gamma_{i_r}} \tau_{\gamma_{i_r}^{-1}} - \tau_{\delta\gamma_{i_r}^2} \in T_0$$

car $\tau_{\delta\gamma_{i_r}}, \tau_{\delta\gamma_{i_r}^2} \in T_0$ (hypothèse de récurrence) et $\tau_{\gamma_{i_r}^{-1}} = \tau_{\gamma_{i_r}} \in T_0$ par définition ; si $m_r \geq 2$ on écrit τ_δ comme ci-dessus en remplaçant γ_{i_r} par $\gamma_{i_r}^{-1}$. Traitons maintenant le cas général par récurrence sur r . D'après ce qui précède, on peut supposer que $r \geq 2$ puis (en conjuguant) qu'il existe un indice $j < r$ tel que $i_j = i_r$. Pour conclure, il suffit alors d'introduire $\alpha = \gamma_{i_1}^{m_1} \cdots \gamma_{i_j}^{m_j}, \beta = \gamma_{i_{j+1}}^{m_{j+1}} \cdots \gamma_{i_r}^{m_r}$ et d'écrire $\tau_\delta = \tau_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \tau_\beta - \tau_{\alpha\beta^{-1}}$. \square

Fixons $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ une famille finie d'éléments de Γ telle que les fonctions $\tau_{\alpha_1}, \dots, \tau_{\alpha_m}$ engendrent l'anneau T . On définit alors une application t de $\mathcal{R}_\mathbb{C}(g)$ dans \mathbb{C}^m en posant

$$t(\rho) = (\tau_{\alpha_1}(\rho), \dots, \tau_{\alpha_m}(\rho)). \tag{VII.2}$$

Ces nombres $\tau_{\alpha_i}(\rho), i = 1, \dots, m$ sont exactement ce que Poincaré appelle les *invariants fondamentaux* du groupe $\rho(\Gamma)$.

VII.3. Représentations réelles fidèles et discrètes

VII.3.1. Les représentations fidèles et discrètes forment un ouvert

Soit Γ (comme au § VII.2.1) le groupe fondamental d'une surface fermée et connexe S de genre $g \geq 2$. Dans la suite, on fixe une action de Γ comme groupe d'automorphismes d'un revêtement universel \tilde{S} . Considérons l'ensemble $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ des représentations fidèles et discrètes de Γ dans $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ (ensemble non vide, voir section VI.2.3). Ces représentations sont \mathbb{C} -irréductibles (voir VII.2.1). Si $\rho \in \text{Rep}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$, l'action de $\rho(\Gamma)$ sur le demi-plan \mathbb{H} est fidèle – car Γ n'a pas d'éléments d'ordre 2 – et la surface $\rho(\Gamma) \backslash \mathbb{H}$ est difféomorphe à S .

Notons $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ le quotient de $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ par les conjugaisons. Tout d'abord, $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ est une variété de dimension $6g - 6$ en vertu de la proposition suivante :

Proposition VII.3.1. — *L'ensemble $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ est un ouvert de la variété $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g)$ des représentations irréductibles.*

Démonstration. — Il revient au même de montrer que $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ est un ouvert de $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^*(g)$. Soit $\rho_0 \in \text{Rep}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ et soit $\delta_0 : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{H}$ un difféomorphisme lisse et $(\Gamma, \rho_0(\Gamma))$ -équivariant. Fixons un compact K de \tilde{S} tel que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(K) = \tilde{S}$. Étant donnée $\rho \in \text{Rep}_{\mathbb{R}}(g)$, nous allons montrer qu'il existe une application $\delta_\rho : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{H}$ lisse, $(\Gamma, \rho(\Gamma))$ -équivariante et C^1 -proche de δ_0 sur K lorsque ρ est proche de ρ_0 . Admettons ce point pour l'instant. Si ρ est assez proche de ρ_0 , l'application δ_ρ est une immersion au voisinage de K (les immersions forment un ouvert de la topologie C^1), donc une immersion sur \tilde{S} par équivariance. En considérant l'image inverse de la métrique hyperbolique de \mathbb{H} par δ_ρ , on hérite d'une métrique Γ -invariante sur \tilde{S} . Comme l'action de Γ sur \tilde{S} est cocompacte, il découle du théorème de Hopf-Rinow que cette métrique est complète. Par suite, l'isométrie locale δ_ρ est un revêtement de \mathbb{H} , donc un difféomorphisme. La $(\Gamma, \rho(\Gamma))$ -équivariance assure alors que ρ est fidèle et discrète.

Il reste à expliquer la construction de δ_ρ . Fixons un recouvrement fini de K par des ouverts U_1^1, \dots, U_s^1 , ainsi que pour tout $2 \leq l \leq s$, des raffinements successifs U_1^l, \dots, U_s^l de ce recouvrement. Plus précisément $\overline{U_j^{l+1}}$ est inclus dans U_j^l ($1 \leq j \leq s-1$) avec de plus $K \subset \bigcup_{j=1}^s U_j^l$ pour $1 \leq l \leq s$. Les U_j^1 sont choisis de sorte que $\gamma(U_j^1) \cap \gamma'(U_j^1) = \emptyset$ si $\gamma \neq \gamma'$

dans Γ . Posons enfin $V_j^l = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U_1^l \cup \dots \cup U_j^l)$ pour tout $1 \leq j, l \leq s$. L'application cherchée δ_ρ sera construite par des « restrictions-extensions » successives de V_l^l à V_{l+1}^{l+1} . Définissons d'abord δ_ρ^1 comme étant l'application $(\Gamma, \rho(\Gamma))$ -équivariante de V_1^1 dans \mathbb{H} qui vaut δ_0 sur U_1^1 . Supposons ensuite que pour un certain $l \in \{1, \dots, s-1\}$, on ait pu construire une application δ_ρ^l lisse $(\Gamma, \rho(\Gamma))$ -équivariante de V_l^l dans \mathbb{H} . L'ouvert $U_{l+1}^{l+1} \cap V_l^{l+1}$ est d'adhérence compacte dans V_l^l . Ainsi, étant donnée une application lisse $f : V_l^l \rightarrow \mathbb{H}$, il est possible, en utilisant des fonctions plateau, d'étendre la restriction de f à $U_{l+1}^{l+1} \cap V_l^{l+1}$ en une application lisse $\bar{f} : U_{l+1}^{l+1} \rightarrow \mathbb{H}$. De plus, cette procédure d'extension peut être choisie continue en topologie C^1 , de sorte que si f est C^1 -proche de δ_0 sur $V_l^l \cap K$, alors \bar{f} est C^1 -proche de δ_0 sur $U_{l+1}^{l+1} \cap K$. Il est donc possible par ce procédé d'étendre la restriction de δ_ρ^l à V_l^{l+1} en une application lisse de $U_{l+1}^{l+1} \cup V_l^{l+1}$ dans \mathbb{H} ; on complète par $(\Gamma, \rho(\Gamma))$ -équivariance et on obtient $\delta_\rho^{l+1} : V_{l+1}^{l+1} \rightarrow \mathbb{H}$. En s étapes, on aboutit à une application $\delta_\rho = \delta_\rho^s$ lisse et $(\Gamma, \rho(\Gamma))$ -équivariante de $V_s^s = \tilde{S}$ dans \mathbb{H} . Maintenant, si une suite $(\rho_k)_{k \geq 1}$ converge vers ρ_0 , alors pour chaque $\gamma \in \Gamma$ la suite $(\rho_k(\gamma))$ converge vers $\rho_0(\gamma)$ au sens C^1 sur le compact K ; de plus, pour $1 \leq j, l \leq s$, l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma(U_j^l) \cap K \neq \emptyset$ est fini. C'est pour cela que, si ρ est choisie suffisamment proche de ρ_0 , chacune des applications δ_ρ^l ($1 \leq l \leq s$) sera C^1 -proche de δ_0 sur $V_l^l \cap K$. \square

VII.3.2. Fermeture des représentations fidèles discrètes

Nous établissons maintenant que $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ est fermé dans $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g)$, résultat dû sous cette forme à Wielenberg [Wiel1977].

Proposition VII.3.2. — *Une limite de représentations fidèles et discrètes de Γ dans $SL(2, \mathbb{R})$ est encore fidèle et discrète.*

Quelques préliminaires s'imposent. Notons $\|\cdot\|$ la norme d'algèbre sur $M_2(\mathbb{R})$ déduite de la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^2 . Étant données deux matrices $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$, en notant $\alpha = A - I$ et $\beta = B - I$, on a :

$$[A, B] - I = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} = (\alpha\beta - \beta\alpha)A^{-1}B^{-1}.$$

Supposons $\|\alpha\|, \|\beta\| < 1$, alors $\|A^{-1}\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n\| \leq (1 - \|\alpha\|)^{-1}$ et de même $\|B^{-1}\| \leq (1 - \|\beta\|)^{-1}$. Par suite

$$\|[A, B] - I\| \leq \frac{2\|\alpha\|\|\beta\|}{(1 - \|\alpha\|)(1 - \|\beta\|)}. \tag{VII.3}$$

En particulier, si $\|A - I\|$ et $\|B - I\| < 2 - \sqrt{3}$, alors $\|[A, B] - I\| < \|B - I\|$.

Le lemme classique ci-dessous, qui dans une bien plus grande généralité est dû à Zassenhaus, est également connu sous le nom de lemme de Margulis en référence à sa généralisation non linéaire (voir par exemple [Kap2001, § 4.12]).

Lemme VII.3.3. — Soient A et B deux éléments de $SL(2, \mathbb{R})$ avec $\|A - I\|$ et $\|B - I\|$ strictement inférieurs à $2 - \sqrt{3}$. Si A et B engendrent un sous-groupe discret dans $SL(2, \mathbb{R})$, alors A et B commutent.

Démonstration. — Puisque le groupe Π engendré par A et B est discret, il existe un élément $C \in \Pi - \{I\}$ tel que la norme $\|C - I\|$ soit minimale. D'après l'inégalité (VII.3), on a donc

$$[A, C] = [B, C] = I$$

et C est un élément non trivial du centre de Π . Cet élément est hyperbolique, parabolique ou elliptique. Dans le premier cas, le groupe Π préserve l'axe de C et est donc abélien. Si C est parabolique, Π fixe le point fixe à l'infini de C , c'est donc un sous-groupe du groupe des similitudes de \mathbb{R} . Mais comme C ne peut commuter à une similitude strictement dilatante ou contractante, le groupe Π est encore abélien. Enfin si C est elliptique, Π fixe l'unique point fixe de C et est donc abélien. \square

Démonstration de la proposition VII.3.2. — Rappelons d'abord que si une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ est fidèle et discrète, alors tous les éléments de $\rho(\Gamma)$ sont hyperboliques (par compacité de $\rho(\Gamma) \backslash \mathbb{H}$, voir par exemple [ImTa1992, p. 46]) et que deux éléments de $\rho(\Gamma)$ commutent si et seulement s'ils ont un point fixe commun (le commutateur devant alors être parabolique). Remarquons également que si $A \in SL(2, \mathbb{R})$ est hyperbolique, les seuls ensembles finis de $\mathbb{H} \cup \partial \mathbb{H}$ invariants par A sont les sous-ensembles de l'ensemble de ses deux points fixes. Par suite, si A et B sont des hyperboliques tels que $[A, BAB^{-1}] = I$, alors A et BAB^{-1} ont les mêmes points fixes, d'où l'on voit que A et B ont les mêmes points fixes.

Soit maintenant (ρ_k) une suite de représentations fidèles et discrètes de Γ dans $SL(2, \mathbb{R})$ qui converge vers ρ . Notons comme plus haut $(\gamma_i)_{i=1, \dots, 2g}$ une famille génératrice standard de Γ . D'abord, montrons que ρ est fidèle. Soit $\gamma \neq 1$ un élément de Γ tel que $\rho(\gamma) = I$. On a $\rho(\gamma_i \gamma \gamma_i^{-1}) = I$ pour tout $i = 1, \dots, 2g$. Il découle du lemme VII.3.3 que

pour k suffisamment grand, $\rho_k(\gamma)$ et $\rho_k(\gamma_i\gamma\gamma_i^{-1})$ commutent, donc (voir ci-dessus) que $\rho_k(\gamma)$ et $\rho_k(\gamma_i)$ commutent. Mais alors $\rho_k(\gamma)$ est central dans $\rho_k(\Gamma)$, ce qui est absurde.

Montrons ensuite que ρ est discrète. Soit Ω l'ensemble des $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ tels que $\|A - I\| < 2 - \sqrt{3}$ et soit $\Omega' \subset \Omega$ un voisinage ouvert de l'identité tel que $\rho_k(\gamma_i)\Omega'\rho_k(\gamma_i)^{-1} \subset \Omega$ pour tout k et tout i . Si ρ n'est pas discrète, il existe pour k suffisamment grand un élément $\delta \neq 1$ de Γ tel que $\rho_k(\delta)$ appartienne à Ω' . Cela entraîne comme plus haut que $\rho_k(\delta)$ et $\rho_k(\gamma_i)$ commutent, d'où une absurdité. \square

Il résulte des propositions VII.3.1 et VII.3.2 que $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ est une réunion de composantes de la variété des représentations irréductibles $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g)$. Soit G un revêtement de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Les composantes connexes de l'espace $\text{Hom}(\Gamma, G)/G$ ont été décrites par Goldman dans [GolW1988]. D'abord, pour $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, elles coïncident avec les fibres de la *classe d'Euler*⁽⁴⁾

$$\text{eu} : \text{Hom}(\Gamma, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))/\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Les représentations fidèles et discrètes constituent les deux composantes associées à la valeur maximale $|\text{eu}| = 2g - 2$ - lesquelles sont homéomorphes à des boules. Ensuite, la projection de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ sur $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ définit un revêtement de degré 2^{2g} de $\text{Hom}(\Gamma, \text{SL}(2, \mathbb{R}))/\text{SL}(2, \mathbb{R})$ sur les composantes de classe d'Euler paire de $\text{Hom}(\Gamma, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. On voit ainsi que $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ a au plus 2^{2g+1} composantes. Mais si $[\rho] \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$, les signes de $\text{tr}\rho(\gamma_i)$, $i = 1, \dots, 2g$ (pour une famille génératrice standard) et celui de $\text{eu}(\rho)$ sont continus et peuvent être rendus arbitraires en changeant $\rho(\gamma_i)$ en $-\rho(\gamma_i)$ pour certains i , ou en prenant l'inverse de la relation $\prod_{i=1}^g [\rho(\gamma_i), \rho(\gamma_{i+g})] = I$ (ce qui change la classe d'Euler en son opposée, et revient à changer l'orientation de la surface S). La variété $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ admet donc 2^{2g+1} composantes connexes.

4. Voici la définition de $\text{eu}(\rho)$. Pour chaque i , on choisit un relevé $\widetilde{\rho}(\gamma_i)$ de $\rho(\gamma_i)$ dans le revêtement universel $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, dont le noyau, canoniquement isomorphe à \mathbb{Z} , est le centre de $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$. On a alors $\text{eu}(\rho) = \prod_{i=1}^g [\rho(\gamma_i), \widetilde{\rho}(\gamma_{i+g})]$, qui ne dépend pas du choix des relevés ni des générateurs standards γ_i , du moment que les classes d'homologie $[\gamma_i] \in H_1(S, \mathbb{Z})$ forment une base symplectique, i.e. vérifient $[\gamma_i] \cdot [\gamma_{j+g}] = \delta_{ij}$, $[\gamma_i] \cdot [\gamma_j] = [\gamma_{i+g}] \cdot [\gamma_{j+g}] = 0$, $1 \leq i, j \leq g$.

VII.3.3. Propreté de l'application « invariants fondamentaux »

Considérons les invariants fondamentaux définis par la formule (VII.2), paragraphe VII.2.2. Étant invariants par conjugaison, ils induisent (par restriction aux représentations fidèles et discrètes) une application \bar{t} de $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ dans \mathbb{R}^m . On note $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd,+}(g) \subset \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ la sous-variété des classes de représentations à classe d'Euler positive (en fait nécessairement égale à $2g - 2$).

Proposition VII.3.4. — *L'application $\bar{t} : \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd,+}(g) \rightarrow \mathbb{R}^m$ est injective et propre.*

Démonstration. — Soient $[\rho], [\rho'] \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ tels que $\bar{t}([\rho]) = \bar{t}([\rho'])$. Comme les invariants fondamentaux déterminent le caractère, on a $\chi_{\rho} = \chi_{\rho'}$ (prop. VII.2.9). Il existe donc $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ qui conjugue ρ et ρ' (prop. VII.2.6), autrement dit une solution complexe non nulle $X = A$ du système d'équations linéaires à coefficients réels $X\rho(\gamma) = \rho'(\gamma)X$, $\gamma \in \Gamma$, dont l'espace des solutions est alors la droite $\mathbb{C}A$. Cela entraîne aussitôt l'existence d'une solution réelle non nulle, qui est nécessairement inversible puisque ρ et ρ' sont irréductibles. Par suite on peut choisir $A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$, $\det A = \pm 1$, et $\det A = 1$ dès que $\text{eu}(\rho)$ et $\text{eu}(\rho')$ ont même signe. On a alors $[\rho] = [\rho']$.

Vérifions la propriété. Soit $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ une famille génératrice standard du groupe fondamental Γ de la surface S telle que l'intersection de γ_1 et γ_2 dans l'homologie $H_1(S, \mathbb{Z})$ soit égale à ± 1 . Si $\rho \in \text{Rep}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$, les classes d'homologie 1-dimensionnelle de la surface $\rho(\Gamma) \setminus \mathbb{H}$ sont représentées par des géodésiques fermées, projections des axes des éléments hyperboliques $\rho(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$). On voit ainsi que les axes de $\rho(\gamma_1)$ et $\rho(\gamma_2)$ se coupent⁽⁵⁾. Soit $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de représentations avec $t(\rho_k)$ bornée. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, la suite $t\rho_k(\gamma)$ est donc bornée (voir prop. VII.2.9). Quitte à conjuguer pour chaque k , on peut supposer que $\rho_k(\gamma_1)$ et $\rho_k(\gamma_2)$ sont de la forme

$$A_k = \rho_k(\gamma_1) = \begin{pmatrix} u_k & 0 \\ 0 & 1/u_k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_k = \rho_k(\gamma_2) = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}.$$

De plus, on peut encore conjuguer par une matrice diagonale (ce qui ne change pas A_k) pour avoir $|b_k| = |c_k|$. La condition d'intersection des

5. On peut aussi facilement construire un exemple de telle représentation ρ dans chaque composante connexe de $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$, voir la fin du paragraphe VII.3.2.

axes de A_k et B_k se traduit par $b_k c_k > 0$. Grâce à la relation

$$\text{tr}^2 B_k - 4 = (a_k - d_k)^2 + 4b_k c_k,$$

on voit que $a_k - d_k$ et $b_k c_k$ sont bornés, puis que B_k est bornée. Un calcul élémentaire montre que

$$\text{tr}[A_k, B_k] - 2 = -b_k c_k (\text{tr}^2 A_k - 4), \tag{VII.4}$$

d'où $\text{tr}[A_k, B_k] < -2$ (car $b_k c_k > 0$), c.-à-d. $b_k c_k (\text{tr}^2 A_k - 4) > 4$. Comme $b_k c_k$ et $\text{tr} A_k$ sont bornées, il en résulte que $\inf_k (b_k c_k)$ et $\inf_k (\text{tr}^2 A_k - 4)$ sont strictement positifs.

Considérons maintenant $\gamma \in \Gamma$ quelconque et notons a'_k, b'_k, c'_k, d'_k les coefficients de $B'_k = \rho_k(\gamma)$. La relation (VII.4), écrite avec B'_k à la place de B_k , implique que $b'_k c'_k$ est bornée; par suite les coefficients diagonaux a'_k et d'_k sont bornés, puisque $a'_k + d'_k = \text{tr} B'_k$ et $a'_k d'_k = b'_k c'_k + 1$ le sont. De même, en considérant $\rho_k(\gamma_2 \gamma)$, on a que $a_k a'_k + b_k c'_k$ et $d_k d'_k + c_k b'_k$ sont bornés, puis que b'_k et c'_k sont bornés puisque $\inf_k |b_k| = \inf_k |c_k|$ est strictement positif. Ainsi tous les générateurs $\rho_k(\gamma_i)$ sont bornés, pour $i = 1, \dots, 2g$, et on peut extraire de ρ_k une sous-suite qui converge, nécessairement vers une représentation fidèle et discrète (prop. VII.3.2). □

On a bien sûr l'énoncé analogue avec la sous-variété $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd,-}(g)$ des classes de représentations fidèles discrètes à classe d'Euler négative.

VII.4. Preuve de l'uniformisation

VII.4.1. L'ensemble des surfaces uniformisables est ouvert

Considérons l'application $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_g$ définie en VII.1.2. On rappelle que \mathcal{X} est une composante arbitraire de la variété $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$.

Proposition VII.4.1. — *L'application $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_g$ est injective et ouverte.*

Démonstration. — Pour l'injectivité, il convient de rappeler la définition de Φ . Celle-ci s'appuie sur un fibré naturel E en surfaces hyperboliques au-dessus de la composante X de $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ qui correspond à \mathcal{X} . Les métriques m_ρ des fibres $S_\rho = \rho(\Gamma) \backslash \mathbb{H}$ ($\rho \in X$) sont ramenées sur une fibre de référence $S = S_{\rho_0}$ en trivialisant le fibré E au-dessus des chemins. Ainsi, pour $\rho, \sigma \in X$, nous avons posé $\Phi([\rho]) = [f_1^* m_\rho]$ ainsi que $\Phi([\sigma]) = [g_1^* m_\sigma]$, f_1 et g_1 obtenues par trivialisations (voir les

détails en VII.1.2). Supposons qu'il existe $\varphi \in \text{Diff}_0(S)$ tel que $\varphi^*(f_1^* m_\rho)$ soit conforme à $g_1^* m_\sigma$. Nous savons que f_1 et g_1 se relèvent de façon équivariante aux revêtements universels (relation (VII.1)). Il en est de même pour φ qui est isotope à l'identité. Par suite, le difféomorphisme $\psi = f_1 \circ \varphi \circ g_1^{-1}$ admet un relevé qui conjugue la représentation σ sur ρ . Mais ψ est conforme direct de S_σ sur S_ρ . D'après le lemme de Schwarz (ou plutôt son corollaire $\text{Aut}^+(\mathbb{D}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$), un tel difféomorphisme se relève en une homographie du demi-plan. On a donc $[\rho] = [\sigma]$.

L'espace $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ est une variété de dimension $6g - 6$ (théorème VII.2.3). En admettant – comme précisé dans l'introduction VII.1.1 – que \mathcal{T}_g est aussi une variété de dimension $6g - 6$, on a que Φ est ouverte par le théorème d'invariance du domaine de Brouwer (bien sûr postérieur). \square

VII.4.2. L'ensemble des surfaces uniformisables est fermé

Proposition VII.4.2. — *L'application $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_g$ est propre.*

Soit $[\rho_k]$ une suite de points de $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{fd}(g)$ telle que $\Phi([\rho_k])$ converge dans \mathcal{T}_g . Toujours en suivant le point de vue de Klein (voir section III.1), cette convergence signifie qu'il existe des métriques riemanniennes ds_k^2 , pour $k = 1, \dots, \infty$, sur S telles que ds_k^2 converge vers ds_∞^2 , chaque ds_k^2 ($k \in \mathbb{N}$) étant conformétement équivalente à la métrique hyperbolique sur S associée à ρ_k (bien définie à isotopie près, voir § VII.1.2). Il s'agit de montrer que, quitte à extraire, la suite $([\rho_k])$ converge vers une limite $[\rho_\infty]$. Si tel est le cas, la représentation ρ_∞ sera fidèle et discrète (proposition VII.3.2) et la métrique ds_∞^2 (ou la structure complexe associée) sera uniformisée par $\rho_\infty(\Gamma)$.

Nous savons (voir § VII.2.2) qu'il existe une famille finie $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq m}$ de classes d'homotopie libres non triviales de courbes simples fermées de S telle que chaque $[\rho_k]$ soit déterminé par les longueurs $(\ell_{\rho_k}(\alpha_j))_{1 \leq j \leq m}$ des classes α_j pour la métrique hyperbolique associée à ρ_k – ces longueurs correspondent aux invariants fondamentaux de Poincaré⁽⁶⁾. Grâce à la propriété de l'application « invariants fondamentaux » (prop. VII.3.4), l'existence d'une sous-suite de $([\rho_k])$ convergente découle de l'énoncé suivant.

6. Les traces sont bien déterminées par les longueurs car leurs signes sont fixés dans la composante \mathcal{X} .

Proposition VII.4.3. — Soit α une classe d'homotopie libre de courbes fermées simples de S . Il existe une constante $C_\alpha < +\infty$ telle que $\ell_{\rho_k}(\alpha) \leq C_\alpha$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. — Elle repose sur un argument simple de « longueur extrémale »⁽⁷⁾. Considérons tout d'abord une métrique riemannienne ds^2 sur S . Pour toute fonction continue positive φ sur S , on pose

$$L_\varphi(\alpha, ds^2) = \inf_{c \in \alpha} \int_c \varphi ds \quad \text{et} \quad A_\varphi(S, ds^2) = \int_S \varphi^2 dA,$$

où dA est la mesure d'aire de ds^2 ; il s'agit respectivement de la longueur de α et de l'aire de S pour la métrique $\varphi^2 ds^2$. La *longueur extrémale* de α est alors définie par

$$E_{ds^2}(\alpha) = \sup_{\varphi > 0} \frac{L_\varphi(\alpha, ds^2)}{A_\varphi(S, ds^2)}.$$

Cette quantité est un invariant conforme associé à la classe de ds^2 dans \mathcal{T}_g (α étant fixée). De plus, si ds^2 est uniformisée par une représentation ρ de Γ dans $SL(2, \mathbb{R})$, on a par définition $\ell_\rho^2(\alpha) \leq 4\pi(g-1)E_{ds^2}(\alpha)$. Le lemme de semi-continuité VII.4.4 permet donc de conclure. \square

Lemme VII.4.4. — Soit α une classe d'homotopie libre de courbes fermées simples de S et soit (ds_k^2) une suite de métriques riemanniennes sur S qui converge vers ds_∞^2 quand k tend vers l'infini. On a alors

$$\overline{\lim}_k E_{ds_k^2}(\alpha) \leq E_{ds_\infty^2}(\alpha).$$

Démonstration. — On peut se restreindre aux fonctions vérifiant $\varphi \leq 1$ dans la définition de la longueur extrémale (S est compacte et φ continue). Dans ces conditions, la suite $\varphi^2 ds_k^2$ converge vers $\varphi^2 ds_\infty^2$ uniformément en φ . Soit L strictement supérieur à la longueur de la classe α pour ds_∞^2 et soit $\varepsilon > 0$. Pour toute courbe $c \in \alpha$ de longueur $\text{Long}(c, ds_\infty^2)$ inférieure à L , il existe k_0 indépendant de $\varphi \leq 1$ et de c tel que

$$\frac{L_\varphi(\alpha, ds_k^2)}{A_\varphi(S, ds_k^2)} \leq \frac{\text{Long}^2(c, \varphi^2 ds_k^2)}{A_\varphi(S, ds_k^2)} \leq \frac{\text{Long}^2(c, \varphi^2 ds_\infty^2)}{A_\varphi(S, ds_\infty^2)} + \varepsilon \quad (k \geq k_0).$$

En prenant la borne inférieure sur les courbes c , puis la borne supérieure sur les fonctions φ , on voit que $E_{ds_k^2}(\alpha) \leq E_{ds_\infty^2}(\alpha) + \varepsilon$ pour $k \geq k_0$, d'où le résultat. \square

7. dans l'esprit des travaux d'Ahlfors et Beurling [Ahl1973].

Démonstration du théorème VII.1.2. — C'est une conséquence immédiate des propositions VII.4.1, VII.4.2 et du fait que \mathcal{T}_g est connexe, comme quotient de Mét_S . \square

Équations différentielles et uniformisation

Le but de ce chapitre est de présenter la voie d'accès au théorème d'uniformisation suivie par Poincaré, qui était avant tout intéressé par la résolution d'équations différentielles linéaires. L'uniformisation n'était pas son but initial et n'est apparue que comme une conséquence de ses résultats.

Il nous a semblé utile de faire précéder le corps de ce chapitre par un paragraphe préliminaire où nous revenons sur quelques aspects des équations différentielles algébriques qui étaient sans aucun doute présents à l'esprit de Poincaré au début de ses recherches.

VIII.1. Préliminaires : quelques aspects des équations différentielles algébriques du premier ordre

Les équations différentielles de Riccati. — Elles sont de la forme

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

dans lesquelles a, b, c dépendent rationnellement d'une variable complexe x (qui peut aussi décrire une courbe algébrique plus générale).

Ce sont ces équations qui mèneront Poincaré à l'uniformisation. Nous allons en rappeler les propriétés fondamentales, classiques depuis longtemps.

Elles sont bien connues comme des équations différentielles linéaires « déguisées ». Partant d'une équation différentielle linéaire d'ordre un à

deux inconnues

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.1})$$

où $A(x)$ est une matrice 2×2 qui dépend rationnellement de x , le quotient $y = u_1/u_2$ vérifie une équation de Riccati et, réciproquement, une équation de Riccati provient d'une telle équation linéaire.

En effet, on peut transformer l'équation de Riccati en une équation linéaire scalaire mais *du second ordre*. Plus précisément, le changement de variable $y(x) = -\frac{w'(x)}{a(x)w(x)}$ implique que w est solution de l'équation linéaire d'ordre deux, de la forme

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + p(x) \frac{dw}{dx} + q(x)w(x) = 0,$$

avec $p = -a'/a - b$ et $q = ac$.

Inversement, si w est une solution de l'équation linéaire d'ordre deux précédente, la fonction $y = -w'/w$ vérifie l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = y(x)^2 - p(x)y(x) + q(x).$$

Rappelons également que l'équation linéaire d'ordre deux à une inconnue w se ramène à une équation linéaire d'ordre un en les deux inconnues (w, w') .

Une propriété importante (et élémentaire) des équations différentielles linéaires est que le domaine de définition des solutions coïncide avec celui de l'équation. Si l'on reprend par exemple l'équation à deux inconnues ci-dessus associée à une matrice $A(x)$ on peut prolonger toute solution locale au voisinage d'un point le long de n'importe quel chemin qui évite les pôles de A . Bien sûr, on constate des phénomènes de *monodromie* qui seront au cœur de ce chapitre, mais les solutions de l'équation de Riccati associée ne présentent que des pôles comme singularités – en dehors des pôles des coefficients a, b, c . Le plus intéressant est peut-être que cette propriété les caractérise. Voici un énoncé allant dans ce sens.

Proposition VIII.1.1. — *Soit Ω un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et soit $F : \Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Considérons l'équation différentielle d'ordre un $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \in \Omega \times \mathbb{C}$, il existe une solution méromorphe y définie sur Ω et telle que $y(x_0) = y_0$.*

(b) Il existe des fonctions holomorphes a, b et c définies sur Ω telles que $F(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$.

Démonstration. — Montrons d'abord que (b) implique (a). Le changement de variable précédent montre que les solutions de l'équation différentielle s'expriment comme des quotients de deux solutions d'une équation linéaire, qui sont donc définies (et holomorphes sur Ω). Les solutions sont donc méromorphes sur Ω .

Une deuxième preuve est la suivante. Les graphes des solutions de notre équation différentielle sont les courbes intégrales du champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x} + F(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ défini sur $\Omega \times \mathbb{C}$. Pour chaque x fixé, la composante $F(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ de ce champ de vecteurs est quadratique en y et se prolonge donc en un champ de vecteurs holomorphe bien défini sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. En effet, si l'on pose $Y = 1/y$, notre équation devient

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = Y^2 \frac{dy}{dx} \\ &= -Y^2 \left[a(x) \frac{1}{Y^2} + \frac{b(x)}{Y} + c(x) \right] \\ &= -c(x)Y^2 - b(x)Y - a(x). \end{aligned}$$

On peut donc *compactifier* notre équation et, quitte à considérer des solutions méromorphes, chercher les graphes des solutions comme les courbes intégrales d'un champ de vecteurs bien défini sur $\Omega \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Comme la fibre $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est compacte, ceci implique que les solutions méromorphes de notre équation sont définies le long de toute courbe différentiable c contenue dans Ω . En particulier, les solutions sont méromorphes sur Ω .

Prouvons maintenant que (a) implique (b). Les graphes des solutions sont des courbes transverses aux fibres $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ du produit $\Omega \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Comme les solutions sont supposées uniformes et définies sur Ω , la projection sur le facteur Ω est un difféomorphisme entre le graphe de chaque solution et le domaine de définition Ω .

Considérons le graphe de la solution y qui vaut $y_0 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ au point $x_0 \in \Omega$. Ce graphe intersecte la fibre au-dessus de $x \in \Omega$ au point $y \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. L'application qui au point initial y_0 associe le point y , est un biholomorphisme entre les deux fibres, isomorphes à $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Par conséquent, ce

biholomorphisme est une application de Möbius et on a

$$y(x) = \frac{\alpha(x)y_0 + \beta(x)}{\gamma(x)y_0 + \delta(x)}.$$

On récupère le champ de vecteurs $F(x, y)$ en considérant la dérivée en x_0 de $y(x)$ qui vaut $-\gamma'(x_0)y_0^2 + (\alpha'(x_0) - \delta'(x_0))y + \beta'(x_0)$. Le résultat est bien quadratique en y . Ceci vient du fait que l'algèbre de Lie de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ s'identifie avec les polynômes de degré deux. \square

Il faut encore décrire rapidement les *travaux de Fuchs* sur les équations différentielles linéaires, inspirant directement ceux de Poincaré et absents de ce livre. Heureusement, l'existence du livre de Hille [Hil1976] excuse un peu notre brièveté. Citons également les excellents ouvrages [Forsy1902, Gra1986, Inc1944, IKSy1991, Val1945].

Considérons donc une fois de plus une équation linéaire du type (VIII.1). Fuchs cherche les conditions sur la matrice A (dépendant rationnellement de x) qui permettent de garantir que les solutions locales, au voisinage des pôles de A peuvent s'exprimer comme des séries entières en $(x - x_i)^\lambda$ et $\log(x - x_i)$ pour certains λ . Il établit que c'est le cas si et seulement si A ne présente que des pôles simples. Il montre également comment il est possible de calculer simplement les exposants λ comme racines d'une équation dite « radicielle » facile à expliciter.

Cette théorie de Fuchs est essentiellement *locale* et on est donc amené à étudier les équations linéaires du même type – appelée *équations fuchsiennes* – à ceci près que A est maintenant une fonction algébrique de x , autrement dit une fonction méromorphe sur une certaine surface de Riemann compacte étalée au-dessus du plan des x . Nous reviendrons en détail dans la section IX.1 sur une partie de ses travaux.

Retour sur les équations différentielles et les fonctions elliptiques. — Revenons sur les fonctions elliptiques que nous avons à peine abordées au chapitre I. Le point de départ est donc l'étude d'intégrales de la forme

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{(y - \alpha)(y - \beta)(y - \gamma)}}$$

avec α, β, γ nombres complexes distincts.

Il faut d'abord justifier l'idée de Gauss, Abel et Jacobi selon laquelle y est une fonction uniforme (et périodique) de x .

La forme différentielle

$$\omega = \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)}}$$

est bien définie et *non singulière* sur le revêtement double de la droite projective $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, ramifié au-dessus des points $\alpha, \beta, \gamma, \infty$. Autrement dit, la cubique projective lisse C d'équation affine $z^2 = (y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)$ hérite d'une forme volume holomorphe non singulière. En effet, la coordonnée locale v de la cubique C au voisinage de $y = \alpha$ est telle que $y - \alpha = v^2$. Par conséquent, $dy = 2vdv$ et $\omega \simeq 2dv$. Un calcul similaire au voisinage de l'infini (où la variable locale v satisfait la relation $1/y = v^2$) montre que ω est également holomorphe et non singulière à l'infini.

De manière duale, C hérite d'un champ de vecteurs holomorphe non singulier X , défini par $\omega(X) = 1$. Comme C est compacte, le flot (complexe) de X est complet et son action (transitive) paramètre C comme quotient de \mathbb{C} par le stabilisateur Λ d'un point. La cubique lisse vient d'être uniformisée par \mathbb{C} . La relation $\omega(X) = 1$ montre que le paramétrage d'une orbite donnée de X (application uniformisante) est la réciproque de la primitive x correspondante. Cette réciproque est donc une fonction elliptique Λ -périodique et par construction elle vérifie l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma),$$

dont les solutions sont la fonction \wp de Weierstrass ainsi que tous ses translatés $y = \wp(x + cte)$.

On peut d'ailleurs fonder toute la théorie des fonctions elliptiques en partant de cette équation différentielle :

Théorème VIII.1.2. — *Les solutions non triviales de l'équation*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)$$

sont des fonctions elliptiques qui uniformisent la cubique projective lisse C d'équation affine $z^2 = (y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)$.

Démonstration. — La preuve utilise une méthode géométrique inventée par Lie (voir [PaSe2004]). Appelons z la quantité $\frac{dy}{dx}$, de sorte que $dy = zdx$. On cherche les solutions sous la forme d'applications

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(x) = (y(x), z(x))$, dont le graphe est tangent au champ de contact $dy - zdx = 0$ et contenu dans $\mathbb{C} \times C$.

L'intersection de l'espace tangent à $\mathbb{C} \times C$ avec le champ de contact permet de définir un champ de droites non singulier. En effet, si l'on pose $F(y) = (y - \alpha)(y - \beta)(y - \gamma)$, cette intersection coïncide avec le noyau de la 2-forme différentielle holomorphe

$$(dy - zdx) \wedge (2zdz - F'(y)dy) = z\Omega,$$

où Ω est une 2-forme holomorphe qui ne s'annule pas. Le noyau de Ω est un champ de droites (défini même en $z = 0$) et on vérifie qu'il s'étend en un champ de droites \mathcal{F} défini aussi au point à l'infini de C (et donc sur tout $\mathbb{C} \times C$). De plus \mathcal{F} est transverse, autrement dit la projection sur la coordonnée x est un isomorphisme.

Les solutions de notre équation différentielle sont des courbes tangentes à \mathcal{F} . Soit $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe différentiable et (y_0, z_0) un point qui se trouve sur C au-dessus de $c(0)$. Il existe alors une unique courbe différentiable $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \times C$ qui relève c et telle que $\tilde{c}(0) = (0, y_0, z_0)$. La courbe \tilde{c} est bien définie sur tout l'intervalle $[0, 1]$ car la fibre C est compacte.

Ceci montre que pour toute condition initiale et toute courbe c dans \mathbb{C} , il existe une solution méromorphe définie le long de cette courbe. Par conséquent, les solutions non triviales de notre équation sont définies sur \mathbb{C} .

Désignons par Λ le groupe des périodes d'une solution non triviale y . Comme y est complètement définie par sa valeur initiale, on a aussi que

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C}, y(\lambda) = y(0)\}.$$

Or, le théorème des zéros isolés implique que Λ est un sous-groupe discret de \mathbb{C} . On obtient donc une application injective $f: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow C$. On vérifie aisément que f envoie la 1-forme canonique dx sur la forme $\omega = dy/z$ de C . En effet,

$$f^*(\omega) = f^*\left(\frac{dy}{z}\right) = \frac{y'(x)dx}{y'(x)} = dx.$$

En particulier, f envoie la forme volume réelle $dx \wedge \overline{dx}$ sur $vol \wedge \overline{vol}$.

Supposons par l'absurde que Λ ne soit pas un réseau dans \mathbb{C} . Alors f envoie injectivement la variété de volume infini \mathbb{C}/Λ dans la cubique de volume fini C , ce qui est absurde. Comme l'image de \mathbb{C}/Λ est ouverte et fermée (car compacte), elle doit coïncider avec C . \square

Les équations différentielles non linéaires. — Dans un article remarquable, pourtant passé inaperçu [Poin1885b], Poincaré parvient à caractériser les équations différentielles de Riccati ou elliptiques dans la jungle des équations différentielles algébriques : ce sont celles qui n'ont pas de singularités mobiles.

Précisons cela. Partant d'une équation différentielle rationnelle

$$R\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

Poincaré dit qu'elle ne possède pas de *singularités mobiles* si on peut trouver un nombre fini de points x_1, \dots, x_n (*singuliers* pour l'équation différentielle) tels que pour tout $x_0 \neq x_1, \dots, x_n$, tout $y_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ issu de x_0 , il existe une solution y méromorphe de l'équation de long de γ telle que $y(x_0) = y_0$. Les solutions peuvent donc être multiformes mais elles ne présentent que des pôles comme singularités, à part les « singularités fixes » que sont les x_1, \dots, x_n .

Donnons quelques exemples d'équations qui admettent des singularités mobiles.

L'équation $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y^3 = 0$ dont la solution générale est $y(x) = 1/\sqrt{x-c}$ développe des singularités mobiles de *type algébrique*. Remarquons en effet que la singularité $x = c$ dépend de la condition initiale.

L'équation (non rationnelle cette fois) $\frac{dy}{dx} + \exp(y) = 0$ constitue un deuxième exemple car les solutions $y(x) = -\log(x-c)$ admettent des singularités mobiles de type logarithmique.

Un autre exemple est l'équation $\frac{dy}{dx} + y \log^2 y = 0$ dont les solutions de la forme $y(x) = \exp(1/(x-c))$ présentent des singularités mobiles essentielles.

Théorème VIII.1.3. — Soit $R\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ une équation différentielle sans singularités mobiles, où R est polynomial par rapport à $y, \frac{dy}{dx}$ et analytique en x . Alors ou bien l'équation « provient » d'une équation de Riccati, ou bien la solution générale s'exprime au moyen des fonctions elliptiques, ou bien la solution générale est une fonction algébrique des coefficients de y et de $\frac{dy}{dx}$ dans R .

Démonstration. — On cherche à nouveau les graphes des solutions de l'équation différentielle $R\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ comme étant des courbes situées naturellement sur la surface d'équation $R(x, y, z) = 0$ (ou plus précisément sur sa compactification projective suivant les variables

(y, z)) et tangentes au champ de plans $dy - zdx = 0$. Cette surface est balayée par une famille de courbes obtenues en fixant une valeur pour x . Par l'hypothèse sur l'inexistence de singularités mobiles, pour tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ et pour toute condition initiale x_0, y_0 (avec $x_0 = \gamma(0)$), on peut trouver une solution le long de γ . Le point final $\gamma(1)$ de cette solution permet ainsi *d'identifier holomorphiquement* les courbes $R(\gamma(0), y, z) = 0$ et $R(\gamma(1), y, z) = 0$ (il faut bien sûr montrer que ces identifications se prolongent aux surfaces compactes associées). En d'autres termes, toutes les courbes $R(x, y, z) = 0$ avec x fixé (en dehors de x_1, \dots, x_n) sont birationnellement équivalentes.

Tous les chemins γ évitant les x_i définissent ainsi un isomorphisme « de monodromie ». On distingue alors trois cas.

Si *le genre de ces courbes est 0*, autrement dit si ce sont des copies de la sphère de Riemann, les monodromies sont des transformations projectives et le groupe de monodromie est un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Nous avons vu dans la preuve de la proposition VIII.1.1 que ceci caractérise les équations linéaires ou de Riccati.

Si *le genre est 1*, nous avons vu lors du théorème VIII.1.2 que la théorie des courbes elliptiques permet d'identifier ces courbes au quotient de \mathbb{C} par un réseau et on peut paramétrer les solutions par les fonctions elliptiques correspondantes.

Enfin, si *le genre est supérieur ou égal à 2*, un théorème de Klein affirme que le groupe d'automorphismes holomorphes d'une telle courbe est fini. Il en résulte que le groupe de monodromie est fini ou encore que les solutions générales ne prennent qu'un nombre fini de valeurs pour une valeur donnée de x (différente des x_i). Il n'est pas difficile d'en conclure que la solution générale est algébrique. Pour beaucoup plus de détails sur cette preuve, on peut consulter [PaSe2004]. \square

Développements ultérieurs. — Ainsi donc, le théorème précédent de Poincaré montre que *la quête des nouvelles transcendentes à travers les équations différentielles algébriques d'ordre un se concentre sur des équations différentielles de Riccati ou, ce qui revient au même, sur les équations différentielles linéaire du second ordre*. Voilà donc la motivation principale de Poincaré dans les articles qui nous intéressent ici.

Bien sûr, on pourrait aussi chercher à étudier les équations différentielles algébriques *non linéaires d'ordre supérieur*, qui ne sont pas

du ressort du théorème de Poincaré que nous venons de décrire. C'est Painlevé qui, postérieurement aux travaux de Poincaré qui nous occupent ici, aura des contributions majeures sur le sujet. Il est cependant utile de citer deux d'entre elles. La première montre que pour les équations algébriques du premier ordre, les singularités mobiles sont d'un type contrôlé.

Théorème VIII.1.4. — *Une équation du type $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$, où F est une fraction rationnelle en y dont les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable x n'admet que des singularités mobiles de type algébrique.*

Démonstration. — Les graphes des solutions doivent être contenus dans la surface d'équation $R(x, y, z) = z - F(x, y) = 0$ et tangents au champ de plans $dy - z dx = 0$. La trace de ce champ de plans sur la surface $R(x, y, z) = 0$ définit un champ de droites holomorphe singulier \mathcal{F} (les singularités étant des points isolés). De plus ce champ de droites se compactifie en un champ de droites singulier bien défini sur le compactifié de la courbe $R(x, y, z) = 0$ dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Attention, \mathcal{F} peut devenir vertical (contenu dans $dx = 0$) à l'infini.

Les points singuliers $\{x_1, \dots, x_n\}$ de l'équation seront les projections sur la droite projective $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de la variable x des points singuliers du feuilletage.

Considérons une courbe différentiable c contenue dans le plan de la variable x . Nous avons alors les deux possibilités suivantes. Si la courbe c se relève en une courbe \tilde{c} tangente à \mathcal{F} (le long de laquelle le feuilletage \mathcal{F} n'est pas vertical), il existe une solution méromorphe de l'équation différentiable le long de la courbe c .

Si la tangente à une courbe relevée \tilde{c} de c devient verticale au-dessus du point $c(t_0)$, alors le prolongement analytique d'une solution locale le long de c n'est pas méromorphe, mais présente une singularité algébrique en $c(t_0)$. Pour se convaincre que cette singularité est bien algébrique, il faut inverser les rôles des variables x et y et constater qu'au point considéré x est bien une fonction holomorphe de y dont la dérivée s'annule car $\frac{dx}{dy} = F(x, y) = 0$. Si cette dérivée s'annule à l'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors y présente une singularité algébrique mobile qui est une série en $(x - c(t_0))^{\frac{1}{k}}$. □

Par ailleurs, Painlevé s'attaquera à l'étude systématique des équations non linéaires du second ordre sans singularités mobiles pour découvrir les « transcendentes de Painlevé ». Il réussit à classer les équations de la forme $y'' = F(x, y, y')$ sans singularités mobiles, où F est une fonction analytique en x et rationnelle en y, y' . Painlevé montre que seulement six classes d'équations (dont la plus simple s'écrit sous la forme $y'' = 6y^2 + x$) mènent effectivement à des nouvelles transcendentes : elles ne s'expriment pas à l'aide des fonctions algébriques et des transcendentes déjà étudiées.

VIII.2. L'approche de Poincaré

Revenons à Poincaré, nourri des fonctions elliptiques et convaincu par son théorème que les équations linéaires sont le bon cadre pour la recherche de transcendentes nouvelles. Il considère donc une équation du type de Riccati et il lui impose d'être fuchsienne, puis impose que les λ qui interviennent aux pôles sont des inverses d'entiers. Les équations qu'il obtient, qu'il qualifie de « normales », ont toutes les propriétés locales nécessaires pour que les inverses de leurs solutions, à la Jacobi, soient *localement* uniformes (les exposants locaux deviennent entiers). Les inverses de leurs solutions sont-elles *globalement* uniformes ? Le miracle elliptique se reproduit-il ? *Il n'en est rien* mais Poincaré fait une découverte remarquable. Parmi toutes les équations différentielles normales sur une même surface de Riemann S , il en existe une *unique*⁽¹⁾ dont les inverses des solutions sont uniformes dans un disque D . Ceci mène à un paramétrage de S par D . De la même manière qu'une courbe elliptique est le quotient de \mathbb{C} par un réseau agissant par translations, la surface de Riemann S est le quotient du disque par un groupe discret d'automorphismes holomorphes. *Les fonctions fuchsienues étaient nées.*

Poincaré montrera ensuite que ces fonctions fuchsienues permettent non seulement de résoudre cette équation fuchsienne privilégiée mais aussi toutes les équations normales sur S . Ainsi, Poincaré a découvert des transcendentes nouvelles, uniformes sur un disque, et il a montré

1. Cette équation est appelée par Poincaré *fuchsienne* (*sic*). Nous lui préférons la terminologie d'*équation uniformisante*.

qu'elles permettent de résoudre les équations normales. Mission accomplie!⁽²⁾

Accessoirement, mais ce n'était pas le but recherché, Poincaré uniformise toutes les surfaces de genre au moins 2. Elles sont isomorphes au quotient d'un disque par un groupe discret agissant holomorphiquement. Ce résultat majeur, qui surprendra Klein, n'est cependant que secondaire dans l'esprit de Poincaré.

Le mieux est probablement de citer des extraits de la notice de Poincaré [Poin1921].

J'étais donc conduit à examiner les équations linéaires à coefficients rationnels et algébriques.

[...]

Cette étude intime de la nature des fonctions intégrales ne peut se faire que par l'introduction de transcendentes nouvelles, dont je vais maintenant dire quelques mots. Ces transcendentes ont de grandes analogies avec les fonctions elliptiques, et l'on ne doit pas s'en étonner, car si j'imaginai ces fonctions nouvelles, c'était afin de faire pour les équations différentielles linéaires ce qu'on avait fait à l'aide des séries ϑ elliptiques et abéliennes, pour les intégrales des différentielles algébriques.

C'est donc l'analogie avec les fonctions elliptiques qui m'a servi de guide dans toutes mes recherches. Les fonctions elliptiques sont des fonctions uniformes qui ne sont pas altérées quand on augmente la variable de certaines périodes. Cette notion est tellement utile dans l'Analyse mathématique, que tous les géomètres ont dû penser depuis longtemps qu'il conviendrait de la généraliser en cherchant des fonctions uniformes d'une variable x qui

2. Citons le témoignage de Lecornu, condisciple à l'École polytechnique et à l'École des mines, tel que rapporté par Appell dans [App1925] :

Je me souviens qu'invité par moi à dîner chez mes parents le 31 décembre 1879, il passa la soirée à se promener de long en large, n'entendant pas ce qu'on lui disait ou répondant à peine par des monosyllabes, et oubliant l'heure à tel point que passé minuit, je pris le parti de lui rappeler doucement que nous étions en 1880. Il parut, à ce moment redescendre sur terre, et se décida à prendre congé de nous. Quelques jours après, m'ayant rencontré sur le quai du port de Caen, il me dit négligemment : je sais intégrer toutes les équations différentielles. Les fonctions fuchsienues venaient de naître, et je devinais alors à quoi il songeait en passant de 1879 à 1880.

Cette citation, mentionnée dans [MiPo1999], n'est pas complètement cohérente avec la chronologie de la découverte des fonctions fuchsienues rapportée par Poincaré lui-même dans [HaPo1993]; reste qu'elle montre bien la motivation originelle de Poincaré.

demeurent inaltérées, quand on fait subir à cette variable certaines transformations ; mais ces transformations ne peuvent pas être choisies de manière quelconque.

[...]

Il est aisé de voir quelle est l'espèce particulière de groupes discontinus qu'il convient d'introduire. On se rappelle quel est le mode de génération des fonctions elliptiques : on considère ensuite certaines intégrales appelées de première espèce, ensuite, par un procédé connu sous le nom d'inversion, on regarde la variable x comme fonction de l'intégrale ; la fonction ainsi définie est uniforme et doublement périodique.

De même, nous envisageons une équation linéaire du second ordre et, par une sorte d'inversion, nous regardons la variable comme fonction, non plus de l'intégrale, mais du rapport z de deux intégrales de notre équation. Dans certains cas, la fonction ainsi définie sera uniforme, et alors elle demeurera inaltérée par une infinité de substitutions linéaires, changeant z en $\frac{az+\beta}{\gamma z+\delta}$.

[...]

Les résultats ainsi obtenus ne donnaient encore qu'une solution bien incomplète du problème que je m'étais proposé, c'est-à-dire l'intégration des équations différentielles linéaires. Les équations que j'ai appelées fuchsiennes, et qu'on peut intégrer par une simple inversion, ne sont que des cas très particuliers des équations linéaires du second ordre. On ne doit pas s'en étonner si on réfléchit un peu à l'analogie avec les fonctions elliptiques. Le procédé d'inversion ne permet de calculer que les intégrales de première espèce. Pour les intégrales de deuxième et troisième espèce, il faut procéder d'une autre manière.

Envisageons par exemple l'intégrale de deuxième espèce

$$u = \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Pour l'obtenir, nous considérons comme équation auxiliaire celle qui donne l'intégrale de première espèce

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

d'où par inversion $x = \operatorname{sn} z$. Remplaçant x par $\operatorname{sn} z$, on trouve que u est égal à une fonction uniforme de z , $Z(z)$, qui augmente d'une constante quand z augmente d'une période. On est donc conduit à employer un procédé analogue : étant donnée une équation différentielle linéaire E d'ordre quelconque, à coefficients algébriques en x , on se sert d'une équation auxiliaire E' du second ordre, et cette équation auxiliaire doit être choisie de telle

façon que x soit une fonction fuchsienne du rapport z de deux intégrales de E' et que les intégrales de E soient des fonctions uniformes de z .

Est-il toujours possible de faire ce choix de manière à satisfaire à toutes ces conditions? Telle est la question qui se pose naturellement. Cela revient d'ailleurs à se demander si, parmi les équations linéaires qui satisfont à certaines conditions, qu'il est inutile d'énoncer ici, il y a toujours une équation fuchsienne. Je suis parvenu à démontrer qu'on pouvait répondre affirmativement à cette question. Je ne puis expliquer ici en quoi consiste la méthode que nous avons suivie, M. Klein et moi, dans l'étude de divers exemples particuliers; comment M. Klein a cherché à appliquer cette méthode dans le cas général, ni comment j'ai comblé les lacunes qui subsistaient encore dans la démonstration du géomètre allemand, en introduisant une théorie qui a les plus grandes analogies avec celle de la réduction des formes quadratiques.

[...]

Ainsi, il est possible d'exprimer les intégrales des équations linéaires à coefficients algébriques, à l'aide de transcendentes nouvelles, de la même manière que l'on a exprimé, à l'aide de fonctions abéliennes, les intégrales des différentielles algébriques. D'ailleurs ces dernières intégrales elles-mêmes sont susceptibles d'être obtenues aussi par l'intermédiaire des fonctions fuchiennes, et l'on a ainsi une expression nouvelle, entièrement différente de celle où entrent les séries ϑ à plusieurs variables.

VIII.3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2, équations normales et équations uniformisantes

L'idée d'utiliser les équations différentielles linéaires d'ordre 2 pour uniformiser les surfaces de Riemann naît essentiellement des deux observations suivantes. D'une part, si S est une surface de Riemann uniformisable par le demi-plan et si $w : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{H}$ est un biholomorphisme, alors w peut s'écrire au voisinage de tout point comme le quotient de deux solutions indépendantes d'une certaine équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur un ouvert de S . D'autre part, si E est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur un ouvert U de S , alors le quotient w de deux solutions indépendantes de E est toujours un biholomorphisme local de \tilde{U} dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Le but de ce paragraphe est de justifier ces deux faits et d'introduire les définitions nécessaires pour formuler la question de l'uniformisation « à la Poincaré », c'est-à-dire comme un problème d'existence d'une équation différentielle « *uniformisante* ».

VIII.3.1. Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Soit U un ouvert connexe d'une surface de Riemann S et soit $x : U \rightarrow \mathbb{C}$ une coordonnée holomorphe définie sur cet ouvert⁽³⁾. Pour nous, une *équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur U dans la coordonnée x* sera une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2v}{dx^2} + f \frac{dv}{dx} + gv = 0 \quad (E)$$

où $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions *holomorphes* données (nous insistons sur le fait que les fonctions f et g ne sont pas autorisées à avoir des pôles dans U) et $v : U \rightarrow \mathbb{C}$ est la fonction inconnue⁽⁴⁾.

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur U dans la coordonnée x sera dite *réduite* si elle n'a pas de terme d'ordre 1, c'est-à-dire si elle s'écrit

$$\frac{d^2v}{dx^2} + hv = 0 \quad (E')$$

où h est une fonction holomorphe sur U .

La notion d'équation différentielle linéaire d'ordre 2 est bien sûr stable par changement de coordonnée : si on réécrit l'équation E ci-dessus dans une coordonnée y , l'équation différentielle obtenue sera linéaire d'ordre 2. C'est pourquoi il nous arrivera de parler d'équation différentielle linéaire d'ordre 2 sans préciser la coordonnée. Par contre, la notion d'équation réduite n'est pas invariante par changement de coordonnée : si on réécrit l'équation E' dans une coordonnée y , on obtient une équation qui n'est plus réduite en général.

Si E est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur un ouvert U , alors les solutions de E sont des fonctions holomorphes $v : U \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont en général *multivaluées*. Autrement dit, il est plus correct de voir ces solutions comme des (vraies) fonctions définies sur le revêtement universel $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$: les solutions de l'équation différentielle sur \tilde{U} déduite de E

$$\frac{d^2\tilde{v}}{d\tilde{x}^2} + (f \circ \pi) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} + (g \circ \pi)\tilde{v} = 0,$$

avec $\tilde{x} = x \circ \pi$. En fait, il est commode de conserver les deux points de vue : nous verrons en général les solutions de E comme des fonctions

3. Par là, on entend que x est un biholomorphisme local de U vers un ouvert de \mathbb{C} . Typiquement, on considérera un revêtement ramifié $x : S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ et U sera la surface S privée de $x^{-1}(\infty)$ et des points de ramification de x .

4. $\frac{dv}{dx}$ désigne le « rapport » de dv et dx comme sections du cotangent.

sur \tilde{U} , mais le langage des fonctions multivaluées est parfois pratique et nous ne nous en priverons pas.

VIII.3.2. Quotients de solutions et équivalence projective

Soit U un ouvert connexe d'une surface de Riemann S et soit \tilde{U} son revêtement universel. Nous allons nous intéresser aux fonctions qui apparaissent comme quotient de deux solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur U . Commençons par quelques remarques élémentaires concernant ces fonctions.

Proposition VIII.3.1. — *Considérons une équation différentielle E linéaire d'ordre 2 sur U et considérons deux solutions indépendantes v_1, v_2 de cette équation. Notons w le quotient v_1/v_2 .*

Alors w est un biholomorphisme local⁽⁵⁾ de \tilde{U} dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et pour tout automorphisme γ du revêtement universel \tilde{U} il existe une homographie $\rho(\gamma)$ telle que $w \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ w$ ⁽⁶⁾. De plus, une fonction s'écrit comme quotient de deux solutions indépendantes de E si et seulement si c'est la composée de w avec une homographie.

Démonstration. — Les solutions v_1, v_2 sont des fonctions holomorphes multivaluées sur U , c'est-à-dire des fonctions holomorphes sur \tilde{U} . Leur quotient w est méromorphe sur \tilde{U} et sa dérivée est donnée (à un facteur près qui ne s'annule pas) par le déterminant wronskien $\frac{dv_1}{dx}v_2 - v_1\frac{dv_2}{dx}$ qui ne s'annule pas puisque les solutions v_1 et v_2 sont indépendantes. Ceci montre que $w : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est étale.

Soit γ un automorphisme du revêtement universel \tilde{U} et soit v une solution (c'est-à-dire une solution de l'équation sur \tilde{U} déduite de E , voir section VIII.3.1). Sachant que la coordonnée de \tilde{U} (déduite de celle de U) est invariante par γ , on vérifie que $v \circ \gamma$ est encore une solution. Les solutions $(v_1 \circ \gamma, v_2 \circ \gamma)$ se déduisent alors des solutions indépendantes (v_1, v_2) par un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Par suite, il existe une homographie $\rho(\gamma)$ telle que $w \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ w$.

La dernière affirmation résulte du même argument de comparaison des bases d'un espace vectoriel. \square

5. Nous dirons aussi que w est étale.

6. Autrement dit : w est une fonction méromorphe multivaluée sur U , chaque détermination locale de w est étale de U dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et on passe d'une détermination locale à une autre en composant par une homographie.

Nous définissons maintenant une relation d'équivalence sur l'ensemble des équations différentielles linéaires d'ordre 2, qui tient compte du fait que nous ne sommes pas intéressés par les solutions des équations en elles-mêmes, mais plutôt par les quotients de solutions indépendantes.

Proposition VIII.3.2. — *Étant données deux équations différentielles E et E' linéaires d'ordre 2 sur un ouvert connexe U , les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'ensemble des fonctions qui s'écrivent comme quotient de deux solutions de E coïncide avec l'ensemble des fonctions qui s'écrivent comme quotient de deux solutions de E' ;*
- (ii) *le quotient de deux solutions indépendantes quelconques de E' s'obtient en composant le quotient de deux solutions indépendantes quelconques de E par une homographie ;*
- (iii) *il existe une fonction holomorphe sans zéro multivaluée k telle que les solutions de E' s'obtiennent en multipliant par k les solutions de E .*

Démonstration. — L'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) découle immédiatement de la dernière affirmation de la proposition VIII.3.1. L'implication (iii) \Rightarrow (i) est évidente. Reste à montrer l'implication (i) \Rightarrow (iii).

Supposons que (i) est satisfaite. Considérons deux solutions indépendantes v'_1, v'_2 de E' . Alors il existe deux solutions indépendantes v_1, v_2 de E telles que $v_1/v_2 = v'_1/v'_2$. Notons $k = v'_1/v_1$. Alors $v'_1 = k v_1$ et $v'_2 = k v_2$. Et comme (v'_1, v'_2) est une base de solutions de E' , ceci entraîne que toute solution de E' s'obtient en multipliant par k une certaine solution de E . *A priori*, k est une fonction méromorphe ; mais il est facile de voir qu'elle n'a en fait ni pôle, ni zéro. Par exemple, si k s'annulait en un point x_0 de U , alors les solutions v'_1 et v'_2 devraient s'annuler simultanément, ce qui est impossible car ces solutions sont supposées indépendantes. On démontre de même que k n'a pas de pôle en inversant les rôles des solutions. Par conséquent, k est une fonction holomorphe sans zéro et (iii) est satisfaite. \square

Définition VIII.3.3. — Si les conditions de la proposition ci-dessus sont satisfaites, alors les équations E et E' sont dites *projectivement équivalentes*.

La proposition VIII.3.4 ci-dessous nous permettra de remplacer l'espace abstrait des classes d'équivalence projectives d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 sur U par un espace plus concret : celui des équations différentielles linéaires d'ordre 2 qui sont réduites dans une coordonnée fixée.

Proposition VIII.3.4. — Soit $x : U \rightarrow \mathbb{C}$ une coordonnée holomorphe locale. Toute équation différentielle linéaire du deuxième ordre sur U est projectivement équivalente à une unique équation réduite dans la coordonnée x .

Démonstration. — Considérons une équation différentielle E linéaire du deuxième ordre sur U dans la variable x :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + f \frac{dv}{dx} + gv = 0. \tag{E}$$

D'après l'item (iii) de la proposition VIII.3.2, une équation E' est projectivement équivalente à E si et seulement si elle s'obtient à partir de E par un changement d'inconnue du type $v = k(x)v'$. Si on effectue un tel changement d'inconnue dans E , on obtient l'équation :

$$\frac{d^2v'}{dx^2} + \left(f + \frac{2}{k} \frac{dk}{dx} \right) \frac{dv'}{dx} + \left(g + \frac{f}{k} \frac{dk}{dx} + \frac{1}{k} \frac{d^2k}{dx^2} \right) v' = 0.$$

Pour qu'elle soit réduite, k doit satisfaire $\frac{dk}{dx} = -\frac{1}{2}fk$. L'équation s'écrit alors

$$\frac{d^2v'}{dx^2} + \left(g - \frac{1}{2} \frac{df}{dx} - \frac{1}{4} f^2 \right) v' = 0. \tag{E'}$$

Ceci montre la proposition. Notons que, bien que la fonction k soit *a priori* multivaluée, les fonctions qui apparaissent finalement dans l'équation E' sont univaluées. □

Intéressons-nous maintenant au problème suivant : *quelles sont les fonctions (multivaluées) qui apparaissent comme quotient de deux solutions indépendantes d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 ?*

D'après l'étude précédente, une telle fonction w est nécessairement étale et ses branches doivent être échangées par des homographies. Nous allons vérifier, grâce à la dérivée schwarzienne (voir l'encadré IV.1, p. 149), que ces deux conditions suffisent à caractériser les fonctions cherchées. Ce phénomène élémentaire mais fondamental met en évidence le lien entre l'uniformisation et les équations différentielles (voir corollaire VIII.3.7).

Proposition VIII.3.5. — Soit $w : U \rightarrow \mathbb{C}P^1$ une fonction méromorphe multivaluée, étale et dont les branches s'échangent par des homographies. Soit $x : U \rightarrow \mathbb{C}$ une coordonnée sur U . Alors w est le quotient de deux solutions indépendantes de l'équation linéaire d'ordre 2

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{2}\{w, x\}v = 0. \quad (E')$$

Démonstration. — Puisque w est étale, sa dérivée par rapport à x ne s'annule pas et $\{w, x\}$ est holomorphe. De plus, grâce à l'invariance projective (de la dérivée schwarzienne et de w), cette dérivée schwarzienne $\{w, x\}$ est univaluée sur U . Ainsi l'équation E' est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, au sens restrictif où nous l'entendons. Posons

$$v_1 = w / \sqrt{\frac{dw}{dx}} \quad \text{et} \quad v_2 = 1 / \sqrt{\frac{dw}{dx}}.$$

On a évidemment $w = v_1/v_2$ et on vérifie par un calcul – pénible mais élémentaire – que v_1 et v_2 sont solutions de l'équation E' . \square

Corollaire VIII.3.6. — Soit w le quotient de deux solutions indépendantes d'une équation différentielle E linéaire d'ordre 2 sur U . Alors l'équation E' ci-dessus est l'équation réduite projectivement équivalente à E .

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la proposition VIII.3.2. \square

Corollaire VIII.3.7. — Soit S une surface de Riemann uniformisable par le demi-plan \mathbb{H} , soit $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ le revêtement universel de S et soit $\varphi : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{H}$ un biholomorphisme. Alors pour tout ouvert U de S muni d'une coordonnée x , la restriction w de φ à $\pi^{-1}(U)$ est le quotient de deux solutions indépendantes de l'équation différentielle E' sur U .

Démonstration. — Les conjugués par φ des automorphismes du revêtement universel \tilde{S} sont des biholomorphismes du demi-plan \mathbb{H} , c'est-à-dire des homographies à coefficients réels. Par suite, la fonction w , considérée comme fonction multivaluée sur U (au sens où elle est définie sur un revêtement de U), satisfait les hypothèses de la proposition VIII.3.5. \square

Il nous faut maintenant considérer le problème du changement de coordonnées dans les équations linéaires d'ordre 2. Supposons donnée une équation linéaire d'ordre 2 sur U , réduite dans une coordonnée x . Si

l'on réécrit cette équation dans une coordonnée y , on obtient en général une équation non réduite. Cependant, d'après la proposition VIII.3.4, l'équation en y admet une unique équation réduite qui lui est projectivement équivalente. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition VIII.3.8. — Soient x et y deux coordonnées sur U . Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre 2 réduite dans la coordonnée x :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + hv = 0. \quad (E_x)$$

Alors l'unique équation projectivement équivalente à E_x et réduite dans la coordonnée y s'écrit

$$\frac{d^2v}{dy^2} + Hv = 0, \quad \text{avec } h = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 H + \frac{1}{2}\{y, x\}. \quad (E_y)$$

Démonstration. — L'ensemble des quotients de solutions indépendantes est commun à toutes les équations projectivement équivalentes à E_x . Soit w un tel quotient et soit E équivalente à E_x . On sait que l'unique équation réduite équivalente à E est donnée par la dérivée schwarzienne de w dans la coordonnée de E (corollaire VIII.3.6). La relation cherchée n'est donc rien d'autre que la formule (IV.6) de transformation des dérivées schwarziennes par changement de coordonnées (voir l'encadré IV.1). \square

VIII.3.3. Équations globalisables

Soit S une surface de Riemann. Nous avons considéré jusqu'ici des équations différentielles définies sur un ouvert U de S . Cet ouvert U ne peut pas, sauf exception, être égal à la surface S tout entière, puisqu'il n'existe pas, en général, de coordonnée holomorphe x définie sur S tout entière. Souvenons-nous cependant que notre but est d'utiliser les équations différentielles pour traiter un problème global : l'uniformisation de S . Nous devons donc considérer des équations différentielles linéaires d'ordre 2 telles que le quotient w de deux solutions « se prolonge » en une fonction multivaluée définie globalement sur la surface S (autrement dit en une fonction définie sur \tilde{S}). Il est équivalent de considérer des équations différentielles linéaires d'ordre 2 qui « s'étendent à la surface S en entier à équivalence projective près ». Plus formellement :

Définition VIII.3.9. — Soit U_0 un ouvert d'une surface de Riemann S et soit E_0 une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur U_0 . On dira que l'équation E_0 est *globalisable* s'il existe

- des ouverts U_1, \dots, U_n de S tels que $S = U_0 \cup \dots \cup U_n$,
- des équations différentielles E_1, \dots, E_n linéaires d'ordre 2 sur les ouverts U_1, \dots, U_n , telles que, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, les équations E_i et E_j sont projectivement équivalentes en restriction à $U_i \cap U_j$.

Les lecteurs géomètres avertis auront sûrement compris que la notion d'équation différentielle linéaire d'ordre 2 globalisable est très étroitement liée à la notion plus classique (de nos jours) de *structure projective*. Rappelons qu'une *structure projective* – ici compatible avec la structure complexe – sur une surface de Riemann S est la donnée d'un atlas holomorphe dont les cartes sont à valeurs dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et dont les changements de cartes sont localement projectifs (restrictions d'homographies). À chaque structure projective sur S est associé un biholomorphisme local $w : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ appelé *développante de la structure* et obtenu par prolongement analytique d'un germe de carte fixé. Cette application dépend évidemment de la carte initiale : deux développantes diffèrent par une homographie – agissant au but. Deux structures projectives dont les développantes diffèrent par une homographie sont dites *équivalentes*.

Soit U_0 un ouvert de S , muni d'une coordonnée. Alors toute équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur U_0 qui est globalisable définit une structure projective sur S et inversement. On passe de l'équation à la structure projective en considérant des quotients de solutions sur des petits ouverts (voir proposition VIII.3.2) et on passe de la structure projective à l'équation en utilisant une développante (voir proposition VIII.3.5). De plus, deux équations différentielles linéaires d'ordre 2 sur U_0 sont projectivement équivalentes si et seulement si elles correspondent à des structures projectives équivalentes.

Proposition VIII.3.10. — Soit S une surface de Riemann dont on note $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ le revêtement universel. Soit E_0 une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur un ouvert connexe U_0 de S et soit $w_0 : \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ le quotient de deux solutions indépendantes de E_0 . Alors l'équation E_0 est globalisable si et seulement si

- (i) w_0 s'étend⁽⁷⁾ en un biholomorphisme local $w : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$,
- (ii) pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$ (vu comme automorphisme du revêtement \tilde{S}) il existe $\rho(\gamma) \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ tel que $w \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ w$.

Démonstration. — Si E_0 est globalisable, alors on construit w en recollant de proche en proche sur \tilde{S} des quotients w_i de solutions des équations E_i ; la compatibilité des équations E_i nous assure de pouvoir trouver des w_i qui se recollent. Réciproquement, soit w_0 satisfaisant (i) et (ii). On peut recouvrir S par un nombre fini d'ouverts U_i munis de coordonnées x_i et les équations E_i globalisant E_0 s'obtiennent alors *via* la dérivée schwarzienne $\{w, x_i\}$ de w sur les ouverts U_i (voir proposition VIII.3.5). □

Remarque VIII.3.11. — Puisque (ii) est automatiquement satisfaite pour tout $\gamma \in \pi_1(U_0)$, cette condition devient superflue dès lors que $\pi_1(U_0)$ se surjecte sur $\pi_1(S)$. C'est le cas lorsque $S \setminus U_0$ est fini, par exemple lorsque E_0 est méromorphe sur S et que U_0 est le complémentaire des pôles de E_0 .

Le fait, pour une équation différentielle, d'être globalisable est évidemment invariant par équivalence projective. La proposition VIII.3.4 nous autorise donc à nous restreindre aux équations qui sont réduites dans une coordonnée donnée.

Proposition VIII.3.12. — Soit U_0 un ouvert connexe d'une surface de Riemann S , soit x_0 une coordonnée sur U_0 et soit $h_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 réduite

$$\frac{d^2 v}{dx_0^2} + h_0 v = 0$$

est globalisable si et seulement si il existe

- des ouverts U_1, \dots, U_n de S tels que $S = U_0 \cup \dots \cup U_n$,
- des coordonnées holomorphes x_1, \dots, x_n et des fonctions holomorphes h_1, \dots, h_n sur les ouverts U_1, \dots, U_n , telles que sur $U_i \cap U_j$ on a

$$h_i = \left(\frac{dx_j}{dx_i} \right)^2 h_j + \frac{1}{2} \{x_j, x_i\}$$

7. On se méfiera ici du verbe « s'étend ». En effet, \tilde{U}_0 ne se plonge pas en général dans \tilde{S} . Pour pouvoir « étendre » w_0 en une fonction sur \tilde{S} , une condition préalable est donc que w_0 passe au quotient en une fonction définie sur $\pi^{-1}(U_0) \subset \tilde{S}$.

pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

Démonstration. — Il suffit d'écrire les équations E_i dans la définition VIII.3.9 sous la forme $\frac{d^2v}{dx_i^2} + h_i v = 0$ et d'utiliser la proposition VIII.3.8. \square

VIII.3.4. Équations normales sur les courbes algébriques

Dans l'article [Poin1884b], Poincaré ne considère jamais des surfaces de Riemann abstraites ; il se restreint aux surfaces de Riemann explicitement définies comme courbes algébriques dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et nous ferons de même à partir de maintenant. Notons que Poincaré est parfaitement conscient que, pour l'uniformisation, seule compte la structure de surface de Riemann abstraite. Simplement, il a besoin d'avoir des surfaces définies par une équation polynomiale pour « calculer » un certain nombre d'objets sur ces surfaces. De nos jours, on peut bien sûr refaire toute la théorie intrinsèquement : on voit les équations différentielle linéaires d'ordre 2 comme des connexions et les quotients de solutions de ces équations comme des sections d'un certain fibré vectoriel ; montrer l'existence d'équations globalisables revient alors à montrer la trivialité d'un certain groupe de cohomologie de Čech, cette trivialité étant équivalente à la condition obtenue à la proposition VIII.3.12 (voir par exemple [Gun1967, p. 75]). Le but de ce chapitre est d'essayer de restituer le point de vue de Poincaré, plus concret que l'approche moderne, mais qui le contient en germe.

Rappelons que, du point de vue des structures de surfaces de Riemann abstraites, se restreindre aux courbes algébriques dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ équivaut à se restreindre aux surfaces de Riemann compactes ; en effet, toute surface de Riemann compacte admet une immersion dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ dont l'image est une courbe algébrique (voir théorème II.1.3).

Le plan projectif $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ s'obtient à partir du plan affine \mathbb{C}^2 de coordonnées (x, y) par adjonction d'une droite à l'infini. Ainsi nous considérons des courbes algébriques projectives X , supposées réduites et *irréductibles* (mais éventuellement singulières), données sous la forme

$$X := \overline{\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x, y) = 0\}}$$

où $F(x, y)$ est un polynôme en les variables x et y , l'adhérence étant prise dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. La surface de Riemann associée à X sera notée S .

Définition VIII.3.13. — Soit $X \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ une courbe algébrique irréductible et soit U_x l'ouvert de X sur lequel la première projection $x : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est une coordonnée holomorphe⁽⁸⁾. Une *équation normale* sur X est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur un ouvert $U \subset U_x$, réduite dans la coordonnée x et globalisable.

Notation VIII.3.14. — Nous noterons $\mathcal{E}(X)$ l'espace des équations normales sur une courbe algébrique $X \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ muni de la topologie suivante : les équations $\frac{d^2v}{dx^2} + h_1v = 0$ et $\frac{d^2v}{dx^2} + h_2v = 0$ sont proches si les applications rationnelles h_1 et h_2 le sont.

VIII.3.5. Équations uniformisantes

Le fait suivant est la principale motivation à l'étude des équations normales en vue de l'uniformisation des surfaces :

Proposition VIII.3.15. — *Supposons que la surface de Riemann S associée à X soit uniformisable par le demi-plan et considérons un biholomorphisme global $w : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{H}$. Alors w est le quotient de deux solutions d'une équation normale sur X .*

Démonstration. — D'après le corollaire VIII.3.7, la restriction de w à U_x est le quotient de deux solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur U_x réduite dans la coordonnée x . La proposition VIII.3.10 montre que cette équation est globalisable. C'est donc une équation normale. □

On est alors naturellement amené à la définition suivante :

Définition VIII.3.16. — Une équation normale sur X sera dite *uniformisante*⁽⁹⁾ s'il existe deux solutions v_1, v_2 de E telles que le quotient $w := v_1/v_2$ s'étend en un biholomorphisme global entre \tilde{S} et \mathbb{H} .

Notons qu'une équation uniformisante est automatiquement globalisable. Poincaré accorde une grande importance au fait suivant :

Proposition VIII.3.17. — *Il existe au plus une équation normale uniformisante sur S .*

8. Autrement dit, U_x est la surface X privée de $x^{-1}(\infty)$ et des points de ramification du revêtement $x : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

9. En fait, ce sont ces équations-ci que Poincaré baptise *équations fuchsienes*.

Démonstration. — Soient E et E' deux équations normales uniformisantes. Il existe des solutions v_1, v_2 de E et v'_1, v'_2 de E' telles que les quotients $w := v_1/v_2$ et $w' := v'_1/v'_2$ s'étendent en des biholomorphismes globaux de \tilde{S} sur \mathbb{H} . On a alors $w' = h \circ w$ où h est un automorphisme de \mathbb{H} , en particulier une homographie. Les équations E et E' sont donc projectivement équivalentes et l'unicité de la proposition VIII.3.4 implique que $E = E'$. \square

Nous pouvons maintenant formuler, comme Poincaré, le problème de l'uniformisation de la surface S en termes d'équations différentielles linéaires :

Montrer que, parmi toutes les équations normales sur X , il y en a une qui est uniformisante. Si possible, trouver cette équation.

VIII.4. L'ensemble des équations normales sur une courbe fixée

VIII.4.1. Existence sur une courbe donnée

Dans cette partie, notre but est de comprendre la structure de l'ensemble des équations normales sur une courbe algébrique plane de genre $g \geq 2$.

De manière étonnante (pour nous), Poincaré semble considérer comme une évidence que sur toute courbe algébrique il existe au moins une équation normale. La preuve « moderne » de ce fait consiste à voir que l'obstruction trouvée à la proposition VIII.3.12 vit dans un groupe de cohomologie qui s'annule *via* la dualité de Serre (voir [Gun1967, p. 75]). Nous proposons une démonstration qui aurait pu être présentée par Poincaré même si le lecteur aura peut-être deviné les groupes de cohomologie qui se cachent entre les lignes !

Soit X une courbe algébrique plane réduite et irréductible, d'équation affine $F(x, y) = 0$. Cherchons une équation normale sur X sous la forme

$$\frac{d^2v}{dx^2} + h(x, y)v = 0. \quad (E_0)$$

On peut toujours supposer, à transformation birationnelle près du plan projectif, que X est une courbe *nodale* (c'est-à-dire que ses seules singularités sont des points doubles ordinaires), que $1/x$ est une coordonnée locale en tout point à l'infini (en particulier X est transverse à la droite à l'infini) et que les singularités de la projection sur l'axe des x sont quadratiques.

La proposition VIII.3.12 donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation soit normale. La surface S (associée à X) hérite d'un recouvrement par des ouverts U_0, U_1, U_2 munis d'une coordonnée holomorphe (au sens de VIII.3.1), à savoir respectivement $x, 1/x$ et y . Notons R le diviseur de S défini par les points critiques de la projection sur l'axe des x . Il s'agit de trouver des fonctions holomorphes h_i sur les U_i de telle sorte que

$$h_i = \left(\frac{dx_j}{dx_i} \right)^2 h_j + \frac{1}{2} \{x_j, x_i\}$$

où x_i vaut $x, 1/x$ ou y suivant les cas.

La compatibilité entre U_0 et U_1 signifie que $h_0 dx^2$ s'étend en une différentielle quadratique holomorphe au voisinage des points à l'infini de X . La compatibilité entre U_0 et U_2 s'écrit

$$h_0 dx^2 = h_2 dy^2 + \frac{1}{2} \{y, x\} dx^2.$$

Cela implique qu'en chaque point de R la différentielle $h_0 dx^2$ doit être méromorphe en y (qui est une coordonnée locale) et que sa partie polaire doit coïncider avec celle de $\frac{1}{2} \{y, x\} dx^2$, d'ordre 2 en y . Inversement, si une différentielle quadratique méromorphe sur S remplit ces conditions, alors son expression locale $h_1 d(1/x)^2$ sur U_1 satisfait aussi la relation de recollement sur $U_1 \cap U_2$ grâce à la formule (IV.6) de transformation des coordonnées (voir l'encadré IV.1).

En résumé : *une équation normale équivaut à la donnée d'une différentielle quadratique méromorphe dont les pôles et les parties polaires – d'ordre 2 – sont prescrits (par le choix initial du modèle projectif).*

Soit K le diviseur canonique de S et soit m un entier naturel. La dimension $l(2K + mR)$ de l'espace $\mathcal{L}(2K + mR)$ des différentielles quadratiques méromorphes dont les pôles sont situés sur R et d'ordre au plus m est donnée par le théorème de Riemann-Roch (voir encadré II.5)

$$\begin{aligned} l(2K + mR) &= l(K - 2K - mR) + \deg(2K + mR) + 1 - g \\ &= 3g - 3 + m \deg(R) \end{aligned}$$

puisque $l(-K - mR) = 0$ (grâce à $\deg(K + mR) > 0$). En particulier, la dimension $l(2K)$ de l'espace des différentielles quadratiques holomorphes sur S vaut $3(g - 1)$. De plus, on a $l(2K + 2R) - l(2K) = 2 \deg(R)$, d'où l'on voit que les parties polaires d'un élément de $\mathcal{L}(2K + 2R)$ peuvent être imposées de manière arbitraire. Ceci achève la preuve de l'existence d'une équation normale sur toute courbe algébrique.

La proposition VIII.3.12 montre que *les équations normales forment naturellement un espace affine associé à l'espace vectoriel (de dimension $3g - 3$) des différentielles quadratiques holomorphes sur la surface*. Pour une courbe algébrique, ce fait s'exprime concrètement sous la forme suivante.

Proposition VIII.4.1. — *Soit X une courbe nodale de \mathbb{CP}^2 , réduite et irréductible, de degré d et d'équation affine $F(x, y) = 0$. On suppose de plus que X est transverse à la droite à l'infini et que les branches de ses points doubles sont transverses aux fibres de la coordonnée x .*

Soit E_0 une équation normale sur X :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + h_0v = 0. \quad (E_0)$$

Alors les équations normales sur X sont exactement les équations de la forme

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(h_0 + \frac{P}{F_y'^2} \right) v = 0$$

où $P(x, y)$ est un polynôme de degré inférieur à $2d - 6$ qui s'annule ainsi que ses dérivées partielles premières aux points doubles de X (et avec $F_y' = \frac{\partial F}{\partial y}$). De plus, ces polynômes P sont à considérer modulo F .

Démonstration. — Il s'agit de montrer que toute différentielle quadratique holomorphe sur X s'écrit dans la coordonnée x sous la forme

$$Q = \frac{P}{F_y'^2} dx^2, \quad (\text{VIII.2})$$

où P est un polynôme vérifiant les conditions de l'énoncé. On pourra aussi consulter la preuve de la proposition II.2.8 qui développe des arguments analogues.

Soit Q une différentielle quadratique méromorphe sur X . Nous pouvons l'écrire sous la forme (VIII.2) où P est une fraction rationnelle. Noter que la forme $\omega = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} dx = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^{-1} dy$ est holomorphe aux points de ramification de x puisqu'ils sont lisses. Pour que Q soit holomorphe sur la partie affine Y de X , il faut et il suffit que P soit régulière sur Y (c'est-à-dire que P soit un polynôme) et s'annule suffisamment aux points doubles de X . En ces points la fonction $\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2$ s'annule à l'ordre 2; la condition souhaitée est donc que P ainsi que ses dérivées premières s'annulent aux points doubles de X . Enfin, puisque la forme ω

s'annule à l'ordre $d - 3$ sur la droite à l'infini et puisque X est transverse à cette droite, la forme Q sera holomorphe à l'infini (sachant qu'elle l'est déjà sur Y) si et seulement si le degré de P est majoré par $2d - 6$. \square

VIII.4.2. Espace des équations normales sur les courbes

Soient $g \geq 0$ et $d \geq 1$ deux entiers. Posons $N = d(d + 3)/2$ et considérons l'ensemble $\mathcal{S}_{g,d} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ des courbes nodales réduites et irréductibles de degré d et de genre g . Alors $\mathcal{S}_{g,d}$ est une variété lisse de dimension $3d + g - 1 = N - \delta$ où δ est le nombre de points doubles d'une courbe de $\mathcal{S}_{g,d}$, donné par $g + \delta = (d - 1)(d - 2)/2$ (voir encadré VIII.1). Dans la suite, nous ne considérons que des courbes de genre $g \geq 2$.

Nous dirons qu'une courbe $X \in \mathcal{S}_{g,d}$ est *en position générale* avec un système de coordonnées affines (x, y) si X est transverse à la droite à l'infini et si les singularités de la coordonnée x sont de type quadratique, distinctes des points doubles. Ces conditions définissent clairement un ouvert de la variété $\mathcal{S}_{g,d}$. L'espace des polynômes en (x, y) correspondant sera noté $\mathcal{P}_{g,d}$. Toute courbe $X \in \mathcal{S}_{g,d}$ admet un tel système de coordonnées affines. Pour l'étude des questions locales sur $\mathcal{S}_{g,d}$, on pourra donc se contenter des courbes X_F définies par des polynômes $F \in \mathcal{P}_{g,d}$.

Rappelons (théorème II.1.3) que toute surface de Riemann compacte S admet une immersion holomorphe dans le plan projectif dont l'image est une courbe nodale, que l'on peut choisir en position générale par rapport à un système donné de coordonnées affines ; autrement dit S admet toujours un modèle algébrique de la forme X_F avec $F \in \mathcal{P}_{g,d}$. Conformément à l'esprit de ce chapitre, nous abordons l'uniformisation des surfaces de Riemann compactes *via* les courbes algébriques, plus particulièrement dans le cadre (cher à Poincaré) de l'étude des équations différentielles sur ces courbes.

Notation VIII.4.2. — Étant donnés deux entiers $g \geq 2$ et $d \geq 4$, nous noterons $\mathcal{E}_{g,d}$ l'espace des couples (X, E) avec $X \in \mathcal{S}_{g,d}$ et $E \in \mathcal{E}(X)$ (voir notation VIII.3.14).

On a bien sûr une projection naturelle de $\mathcal{E}_{g,d}$ sur $\mathcal{S}_{g,d}$. D'après la proposition VIII.4.1, les fibres de cette projection sont des espaces affines complexes de dimension $3g - 3$. En fait, on a la proposition suivante :

Proposition VIII.4.3. — Soient $g \geq 2$ et $d \geq 4$. Alors l'espace $\mathcal{E}_{g,d}$ est un fibré en espaces affines au dessus de $\mathcal{S}_{g,d}$. En particulier $\mathcal{E}_{g,d}$ est une variété lisse (au sens différentiel).

Démonstration. — Considérons les courbes X_F avec $F \in \mathcal{P}_{g,d}$. Le diviseur R_F de ramification de la coordonnée x est l'intersection (transverse) de X_F avec $F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, de degré $d(d - 1)$. Les différentielles quadratiques méromorphes sur X_F qui présentent des pôles d'ordre au plus 2 aux points de R_F sont de la forme

$$Q = \frac{P}{F'_y} dx^2$$

où P appartient à l'espace \mathcal{P}_F des polynômes de degré au plus $4d - 8$ s'annulant au quatrième ordre aux points doubles de X_F (il suffit d'adapter la démonstration de la proposition VIII.4.1). Ces polynômes P doivent être considérés modulo F . Choisissons (localement) un supplémentaire \mathcal{Q}_F de $\mathbb{C}[x, y]F \cap \mathcal{P}_F$ dans \mathcal{P}_F ; nous savons (voir VIII.4.1) que la dimension de cet espace vaut $3g - 3 + 2d(d - 1)$ indépendamment de F . Nous obtenons donc un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de $\mathcal{P}_{g,d}$.

Les contraintes sur les parties polaires aux points de R_F qui caractérisent les équations normales sont affines. Elles dépendent holomorphiquement de F (on peut expliciter $\{y, x\}$ comme une fraction rationnelle des dérivées partielles de F) et définissent un sous-espace affine de \mathcal{Q}_F de dimension $3g - 3$ indépendante de F (voir VIII.4.1). Ceci établit la proposition. □

Encadré VIII.1 : La variété des courbes nodales

Soit $d \geq 1$ un entier et soit $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ le projectif de l'espace des polynômes homogènes de degré d (donc $N = d(d + 3)/2$). Toute courbe de degré d du plan projectif $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ s'identifie à un point de $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ (l'équation de la courbe dans les coordonnées homogènes usuelles). De plus, les changements projectifs de coordonnées de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ correspondent à des transformations projectives de $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$.

Proposition VIII.4.4 (Severi). — Soient $g \geq 0$ et $d \geq 1$ deux entiers et soit $\mathcal{S}_{g,d} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ l'ensemble des courbes nodales réduites et irréductibles de degré d et de genre g , supposé non vide (ce qui équivaut

à $(d - 1)(d - 2) \leq 2g$, voir par exemple [Loe1988, cor. 2.2]). Alors $\mathcal{S}_{g,d}$ est une variété différentielle lisse (« variété de Severi ») de dimension

$$3d + g - 1 = N - \delta$$

où δ est le nombre de points doubles d'une courbe de $\mathcal{S}_{g,d}$ (donné par la formule de Clebsch $g + \delta = (d - 1)(d - 2)/2$).

Démonstration (voir [HaMo1998] p. 30). — Posons

$$\Sigma = \{(X, p); X \in \mathbb{C}\mathbb{P}^N, p \in X_{sing}\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^N \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2,$$

où X_{sing} désigne le lieu singulier de X . Nous allons montrer que Σ est lisse en (X_0, p_0) dès que p_0 est un point double ordinaire de X_0 . Choisissons des coordonnées affines (x, y) de sorte que $p_0 = (0, 0)$. Notons alors $F_0(x, y) = 0$ une équation affine de X_0 . La condition pour qu'un point $p = (a, b)$ appartienne au lieu singulier d'une courbe X de degré d et d'équation affine $F(x, y) = 0$ s'écrit

$$\Phi(F, a, b) := (F(a, b), F'_x(a, b), F'_y(a, b)) = 0 \in \mathbb{C}^3.$$

La matrice jacobienne de Φ au point $(F_0, 0, 0)$ par rapport aux variables $(F(0, 0), a, b)$ vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & HF_0(0, 0) \end{pmatrix},$$

où HF_0 est la matrice hessienne de F_0 , inversible en $(0, 0)$ puisque p_0 est un point double ordinaire de X_0 . D'où il résulte que Σ est une sous-variété lisse de codimension 3 au voisinage de (X_0, p_0) . De plus, en ce point, la projection $\mathbb{C}\mathbb{P}^N \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ induit une immersion locale de Σ sur un germe d'hypersurface lisse $\mathcal{H}(p_0)$ dont l'hyperplan tangent correspond à l'espace des polynômes s'annulant en p_0 .

Revenons à l'ensemble $\mathcal{S}_{g,d}$. Pour $\delta = 0$, la proposition est claire puisque les courbes lisses forment un ouvert de $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$. Supposons que $\delta \geq 1$. Soit $X \in \mathcal{S}_{g,d}$ et soient p_1, \dots, p_δ les points doubles de X . D'après ce qui précède, toute courbe de $\mathcal{S}_{g,d}$ voisine de X appartient à l'intersection des $\mathcal{H}(p_k)$ ($k = 1, \dots, \delta$). Inversement, toute courbe $X' \in \bigcap_{k=1}^{\delta} \mathcal{H}(p_k)$ suffisamment proche de X doit appartenir à $\mathcal{S}_{g,d}$ (en particulier les seules singularités de X' sont ses δ

points doubles proches des p_k). Au voisinage de X , l'ensemble $\mathcal{S}_{g,d}$ coïncide donc avec l'intersection des hypersurfaces $\mathcal{H}(p_k)$. Pour conclure il reste à prouver que celles-ci sont en position générale, c'est-à-dire que l'espace des polynômes qui s'annulent aux points p_1, \dots, p_δ est de codimension δ .

Soit $X \in \mathcal{S}_{g,d}$ comme ci-dessus et soit (x, y) un système de coordonnées affines en position générale par rapport à X . Notons P_m l'espace des polynômes en (x, y) de degré $\leq m$. De la formule de Clebsch $g + \delta = (d - 1)(d - 2)/2$ (déduite par exemple de Riemann-Hurwitz pour une projection générique sur $\mathbb{C}P^1$) et de la description des différentielles holomorphes sur X par les polynômes de degré $\leq d - 3$ (voir la preuve de la proposition II.2.8), il résulte que les conditions $P(p_k) = 0$ ($k = 1, \dots, \delta$) sont indépendantes sur P_{d-3} . Autrement dit, si l'on pose $\varphi_m(P) = (P(p_1), \dots, P(p_\delta)) \in \mathbb{C}^\delta$ pour $P \in P_m$, l'application φ_{d-3} est surjective. Par suite φ_m est surjective pour tout $m \geq d - 3$, en particulier pour $m = d$, puisque sa restriction à P_{d-3} l'est déjà. Ceci achève la démonstration. \square

VIII.5. Monodromie des équations normales et uniformisation des courbes algébriques

Dans cette partie, nous allons expliquer pourquoi l'ensemble des courbes algébriques qui portent une équation normale uniformisante est ouvert (d'où il découlera que l'ensemble des courbes algébriques uniformisables est ouvert).

VIII.5.1. Représentation de monodromie

Notre outil principal pour détecter les équations uniformisantes sera la notion de *monodromie*. À chaque équation normale E sur une courbe algébrique $X \in \mathcal{S}_{g,d}$, nous allons associer une classe de conjugaison de représentations du groupe fondamental de la surface de Riemann S associée à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Pour toute surface de Riemann S , nous noterons $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S)$ l'espace des classes de conjugaison de représentations du groupe fondamental $\pi_1(S)$

dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ ⁽¹⁰⁾. Nous noterons $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S)$ le sous-ensemble de $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S)$ formé des classes de conjugaison qui contiennent une représentation à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Nous avons vu (théorème VII.2.3) que $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S)$ est une variété analytique complexe de dimension complexe $6g - 6$; les mêmes arguments montrent que $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S)$ est une sous-variété analytique réelle de $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S)$, de dimension réelle $6g - 6$ (voir corollaire VII.2.4).

Soit X une courbe algébrique dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, soit S la surface de Riemann associée et soit E une équation normale sur X . Considérons tout d'abord deux solutions indépendantes de E et notons w le quotient de ces solutions. Comme l'équation E est globalisable, la fonction w (définie *a priori* sur le revêtement universel d'un ouvert de S) se prolonge en une fonction définie sur le revêtement universel de S (proposition VIII.3.10). D'après la proposition VIII.3.1, pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$, il existe alors une homographie $\rho(\gamma) \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ telle que $w(\gamma.z) = \rho(\gamma) \circ w(z)$. Ceci définit une représentation

$$\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}),$$

la *représentation de monodromie*. Considérons maintenant deux autres solutions indépendantes de E , notons w' le quotient de ces solutions et ρ' la représentation de monodromie de w' . D'après la proposition VIII.3.1, il existe une homographie $m \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ telle que $w' = m \circ w$. On a donc $\rho' = m \circ \rho \circ m^{-1}$; en particulier, les représentations de monodromie de w et w' sont conjuguées. Ceci légitime la définition suivante : nous appellerons *monodromie de l'équation E* et nous noterons

$$\mathrm{Mon}_X(E) \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S)$$

la classe de conjugaison commune des représentations de monodromie des quotients de solutions indépendantes de l'équation E .

Remarque VIII.5.1 (fondamentale). — *Si une équation E uniformise S par le demi-plan \mathbb{H} , alors sa monodromie est réelle.* En effet, il existe deux solutions de E dont le quotient définit un biholomorphisme global de \tilde{S} dans \mathbb{H} . La représentation de monodromie associée est alors à valeurs dans le groupe des automorphismes de \mathbb{H} , c'est-à-dire dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et la monodromie $\mathrm{Mon}_X(E)$ appartient à la sous-variété $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S)$.

10. Attention, nous reprenons les notations utilisées dans le chapitre VII pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$; mais il s'agit maintenant de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Nous verrons que la réciproque est « presque vraie » : si X est proche d'une courbe uniformisable et s'il existe une équation normale E sur X dont la monodromie $\text{Mon}_X(E)$ appartient à la sous-variété $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S)$, alors E est uniformisante ; en particulier X est uniformisable⁽¹¹⁾.

Pour chaque courbe algébrique $X \in \mathcal{S}_{g,d}$, nous disposons maintenant d'une application de monodromie définie sur l'espace des équations normales sur X . Cela n'est pas suffisant ! Nous avons besoin d'une application de monodromie définie sur le fibré $\mathcal{E}_{g,d}$ des équations normales sur toutes les courbes algébriques, ou au moins définie au voisinage d'une fibre donnée.

Fixons deux entiers $g \geq 2$ et $d \geq 4$. Rappelons que $\mathcal{P}_{g,d}$ désigne l'ensemble des polynômes $F \in \mathbb{C}[x, y]$ de degré d tels que la courbe projective X_F définie par F soit nodale et en position générale par rapport aux coordonnées (x, y) (voir VIII.4.2). Soit $F_0 \in \mathcal{P}_{g,d}$. D'après le théorème du voisinage tubulaire (pour des sous-variétés immergées), il existe un voisinage \mathcal{U}_0 de F_0 dans $\mathcal{P}_{g,d}$ et une application lisse $\Phi : \mathcal{U}_0 \times X_{F_0} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ telle que pour tout $F \in \mathcal{U}_0$, l'application $\Phi(F, \cdot)$ soit un difféomorphisme de X_{F_0} dans X_F . L'application Φ n'est bien sûr pas unique, mais la classe d'homotopie des applications $\Phi(F, \cdot)$ est bien définie et, pour F assez proche de F_0 , fournit une identification du groupe fondamental de la surface associée S_F avec celui de la surface S_{F_0} .

Pour $F \in \mathcal{U}_0$ et $E \in \mathcal{E}(X_F)$ (voir notation VIII.4.2), on peut donc voir la monodromie $\text{Mon}_{X_F}(E)$ comme un élément de la variété $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S_{F_0})$. Si l'on pose $\mathcal{E}_{\mathcal{U}_0} := \{(F, E) \mid F \in \mathcal{U}_0, E \in \mathcal{E}(X_F)\}$, on a ainsi une application

$$\begin{aligned} \text{Mon} : \quad \mathcal{E}_{\mathcal{U}_0} &\longrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S_{F_0}) & \text{(VIII.3)} \\ (F, E) &\longmapsto \text{Mon}_{X_F}(E). \end{aligned}$$

Rappelons que $\mathcal{E}_{\mathcal{U}_0}$ est un fibré en espaces affines au-dessus de l'ouvert \mathcal{U}_0 (proposition VIII.4.3).

Proposition VIII.5.2. — *L'application $\text{Mon} : \mathcal{E}_{\mathcal{U}_0} \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S_{F_0})$ est holomorphe.*

Démonstration. — C'est une conséquence du théorème de dépendance holomorphe des solutions d'une équation différentielle linéaire par rapport aux coefficients de cette équation. □

11. Par contre, il existe des équations normales, à monodromie dans $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S)$ (et même à monodromie fuchsienne), mais qui ne sont pas uniformisantes ; voir [GolW1987].

VIII.5.2. L'ensemble des surfaces de Riemann uniformisables est ouvert

Le but du long mémoire [Poin1884b] que Poincaré publie en 1884 est de montrer, en utilisant la méthode de continuité qu'il a imaginée, simultanément avec Klein, que les courbes algébriques sont uniformisables.

***Théorème VIII.5.3.** — Toute surface de Riemann compacte de genre g supérieur ou égal à 2 est uniformisée par le demi-plan supérieur.*

Fixons un entier $g \geq 2$ et rappelons que \mathcal{M}_g désigne l'espace des modules des surfaces de Riemann compactes de genre g (voir proposition II.3.1). Rappelons que la méthode de continuité consiste à :

- remarquer que \mathcal{M}_g est connexe et qu'il existe au moins un point de \mathcal{M}_g correspondant à une surface de Riemann uniformisable ;
- montrer que l'ensemble des points de \mathcal{M}_g correspondant à des surfaces de Riemann uniformisables est ouvert et fermé dans \mathcal{M}_g .

Ceci suffit bien sûr à montrer que toute surface de Riemann compacte de genre g est uniformisable.

Poincaré semble considérer comme évident le fait que l'espace des modules \mathcal{M}_g est connexe par arcs ; sur ce point on pourra consulter le chapitre II, proposition II.3.1. L'existence d'au moins une surface de Riemann de genre g qui soit uniformisable résulte facilement des travaux de Poincaré sur les groupes fuchsien, comme cela a été expliqué au paragraphe VI.2.3.

Nous ne discuterons pas ici des arguments donnés par Poincaré pour démontrer la fermeture. Disons simplement qu'il nous semble que Poincaré avait compris les difficultés qui se présentaient et que, d'une certaine manière, on peut considérer la preuve que nous avons présentée au chapitre VII comme une « mise au net » de cette tentative de preuve. Le cas particulier de la sphère privée de quatre points est particulièrement instructif ; Poincaré s'y attarde et dans ce cas sa démonstration est parfaitement rigoureuse. Nous le détaillons dans le chapitre suivant. Quoi qu'il en soit, nous pensons que les outils nécessaires pour démontrer correctement la fermeture en général étaient encore loin d'être à la disposition des chercheurs de cette époque, même de la classe de Poincaré.

Dans ce chapitre, nous nous contentons donc de discuter l'ouverture (dans le cadre des courbes algébriques), en suivant de près la méthode de Poincaré, qui ne doit être précisée qu'en certains points mineurs.

Proposition VIII.5.4. — *Soit $\mathcal{S}_{g,d}$ la variété des courbes nodales de genre $g \geq 2$ et de degré $d \geq 4$. Alors l'ensemble des courbes $X \in \mathcal{S}_{g,d}$ uniformisables par le demi-plan supérieur est ouvert dans $\mathcal{S}_{g,d}$.*

Démonstration. — Soit $F_0 \in \mathcal{P}_{g,d}$ tel que la surface de Riemann S_{F_0} est uniformisable par le demi-plan supérieur. Il s'agit de trouver un voisinage \mathcal{U} de F_0 dans $\mathcal{P}_{g,d}$ tel que la surface de Riemann S_F soit uniformisable pour tout $F \in \mathcal{U}$. En VIII.5.1, nous avons défini un voisinage \mathcal{U}_0 de F_0 dans $\mathcal{P}_{g,d}$. Nous avons vu que l'espace

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}_0} = \{(F, E) \mid F \in \mathcal{U}_0, E \in \mathcal{E}(X_F)\}$$

est un fibré en espaces affines au-dessus de l'ouvert \mathcal{U}_0 et que l'application « monodromie » (voir (VIII.3)) de $\mathcal{E}_{\mathcal{U}_0}$ dans $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S_{F_0})$ est holomorphe.

Notons maintenant E_0 l'équation uniformisante de la surface S_{F_0} , choisissons deux solutions de E_0 dont le quotient w_0 définit un biholomorphisme de \tilde{S}_{F_0} dans \mathbb{H} et notons $\rho_0 : \pi_1(S_{F_0}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ la représentation de monodromie de w_0 . On a alors $\text{Mon}_{X_{F_0}}(E_0) = [\rho_0] \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S_{F_0})$ (voir la remarque VIII.5.1).

Rappelons que $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S_{F_0})$ est une variété complexe lisse de dimension complexe $6g - 6$, ou réelle $12g - 12$, au voisinage de ρ_0 et que $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S_{F_0})$ est une sous-variété réelle lisse de dimension réelle $6g - 6$. Le point qui suit est essentiel⁽¹²⁾.

Lemme VIII.5.5. — *L'application $\text{Mon}_{X_{F_0}} : \mathcal{E}(X_{F_0}) \rightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S_{F_0})$ est transverse en E_0 à la sous-variété $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S_{F_0})$.*

Admettons ce résultat pour l'instant et terminons la preuve de la proposition VIII.5.4. D'après le lemme, l'image inverse de $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S_{F_0})$ par l'application Mon définit un germe de sous-variété réelle lisse Σ passant par E_0 et de codimension (réelle) $6g - 6$. Cette sous-variété Σ est transverse à la fibre $\mathcal{E}(X_{F_0})$ puisque sa codimension coïncide avec la dimension de $\mathcal{E}(X_{F_0})$. Par suite, pour F proche de F_0 , il existe sur la courbe X_F une équation normale E_F (qui dépend de façon lisse de

12. Il faut noter que Klein et Poincaré affirment qu'un « déterminant fonctionnel » est non nul, ce qui signifie bien la transversalité, mais ils n'en donnent aucune preuve.

F) avec monodromie dans $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S_{F_0})$. Montrons maintenant que E_F est uniformisante.

Soit ξ_F un germe de carte projective à valeurs dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et défini sur un ouvert de X_F par un quotient de solutions de E_F (voir VIII.3.3). On peut choisir ξ_{F_0} correspondant à w_0 et supposer que ξ_F dépend de façon lisse de F (dépendance des solutions par rapport aux paramètres). Dans la suite, le polynôme F est supposé assez proche de F_0 . Le prolongement analytique multivalué de ξ_F est donc C^0 -proche de ξ_{F_0} sur les compacts. En version univaluée, ξ_F définit un biholomorphisme local $w_F : \tilde{S}_F \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et on peut trouver un domaine fondamental compact D_F du revêtement universel $\tilde{S}_F \rightarrow S_F$ tel que $w_F(D_F)$ soit Hausdorff proche de $w_0(D_{F_0})$. Comme $w_0(D_{F_0})$ est un compact contenu dans le demi-plan \mathbb{H} , on a encore $w_F(D_F)$ inclus dans \mathbb{H} . Grâce à l'équivariance de w_F (proposition VIII.3.1) et grâce au fait que la monodromie de E_F est réelle, cela entraîne que $w_F(\tilde{S}_F)$ est inclus dans \mathbb{H} .

Notons maintenant h la métrique hyperbolique usuelle du demi-plan \mathbb{H} . Comme w_F est à valeurs dans \mathbb{H} , on récupère une métrique $\tilde{g} = w_F^* h$ sur \tilde{S}_F , laquelle descend par construction en une métrique (hyperbolique) g sur S_F . Soient M et N des variétés riemanniennes, N étant complète ; rappelons qu'alors une isométrie locale de M dans N est un revêtement si et seulement si M est aussi complète. Ici g est complète car S_F est compacte. D'où il résulte que \tilde{g} est complète, puis que w_F est un revêtement. Par suite w_F est un biholomorphisme de \tilde{S}_F sur \mathbb{H} et E_F est uniformisante. \square

Pour compléter la démonstration de la proposition VIII.5.4, il nous reste à prouver le lemme de transversalité.

Commentaire. — Un point crucial de cette démonstration est la coïncidence entre la codimension (réelle) de $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(g)$ dans $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(g)$ et la dimension de l'espace des différentielles quadratiques. Le fait que la dimension de $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(g)$ soit le double de celle de $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(g)$ n'est pas surprenant puisque le premier espace n'est que la complexification du second. Il s'agit donc de comprendre pourquoi l'espace des différentielles quadratiques et l'espace $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(g)$ ont la même dimension. La première dimension est calculée par le théorème de Riemann-Roch et la seconde en comptant les générateurs et les relations, deux calculs qui mènent indépendamment à $6g - 6$ dimensions réelles sans que l'on comprenne vraiment pourquoi. Autrement dit l'espace des modules de courbes de genres g est de même

dimension que l'espace des différentielles quadratiques sur une courbe donnée. Poincaré ne semble pas s'étonner de cette coïncidence. Une manière moderne de la rendre « claire » est la suivante. Une différentielle holomorphe quadratique est une section du double du diviseur canonique K . Suivant un principe général, une déformation infinitésimale de la structure complexe sur une courbe S est paramétrée par un élément du premier groupe de cohomologie de S à valeurs dans le faisceau des champs de vecteurs holomorphes, c'est-à-dire $-K$. Ces deux espaces sont duaux par la dualité de Serre.

VIII.5.3. Preuve du lemme de transversalité VIII.5.5

Poincaré ne démontre pas ce lemme (et d'ailleurs le concept même de transversalité n'était bien sûr pas encore dégagé)! Il démontre par contre en détail le lemme que nous avons déjà rencontré selon lequel une courbe algébrique donnée possède au plus une équation uniformisante. En particulier, l'image de l'application $\text{Mon}_{X_{F_0}} : \mathcal{E}(X_{F_0}) \rightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S_{F_0})$, au voisinage de l'équation uniformisante E_0 , rencontre une seule fois la sous-variété $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S_{F_0})$. Bien sûr, cela n'entraîne pas la transversalité en ce point d'intersection mais Poincaré semble franchir ce pas sans hésitation⁽¹³⁾. Nous nous proposons ici de donner une preuve de la transversalité en utilisant des méthodes que Poincaré aurait pu employer (nous semble-t-il).

Commençons par un calcul préliminaire. Soit w un biholomorphisme entre deux ouverts du demi-plan supérieur et soit 2φ le logarithme du jacobien de w pour la métrique hyperbolique. Montrons d'abord la relation

$$\Delta_{\mathbb{H}}(\varphi) = \exp(2\varphi) - 1, \quad (\text{VIII.4})$$

où $\Delta_{\mathbb{H}}$ désigne le laplacien hyperbolique dans \mathbb{H} . Notons s et t les parties réelles et imaginaires d'un point z de \mathbb{H} si bien que le laplacien pour la métrique hyperbolique $(ds^2 + dt^2)/t^2$ est donné par $\Delta_{\mathbb{H}} = t^2\Delta$, où Δ est le laplacien euclidien. Posons $v = \text{Im}(w)$, de sorte que le jacobien de w pour la métrique hyperbolique vaut $|w'(z)|^2 t^2/v^2$. Son logarithme 2φ est

13. « Est-ce parce que le déterminant fonctionnel des coordonnées μ par rapport à celles de δ s'annuleraient ? Mais cela n'arrivera jamais puisque le lemme du paragraphe VII montre qu'à tout point μ ne peut correspondre qu'un seul point δ » [Poin1884b] page 370.

donc donné par

$$\varphi = \log |w'(z)| + \log t - \log v.$$

Le premier terme est harmonique (comme partie réelle d'une fonction holomorphe). De plus

$$\Delta(\log v) = \frac{1}{v} \Delta(v) - \frac{1}{v^2} |\text{grad } v|^2 = -\frac{1}{v^2} |\text{grad } v|^2 = \frac{1}{v^2} |w'(z)|^2$$

puisque v est aussi harmonique. Finalement on obtient bien la relation (VIII.4) : $\Delta_{\mathbb{H}}(\varphi) = t^2(|w'(z)|^2/v^2 - 1/t^2) = \exp(2\varphi) - 1$.

Remarque VIII.5.6. — Pour motiver ce qui va suivre, voici quelques commentaires sur les aspects riemanniens. La relation (VIII.4) est un cas particulier de la formule reliant les courbures K_1 et K_2 de deux métriques conformes g_1 et g_2 sur une surface, à savoir si $g_2 = \exp(2\varphi)g_1$, alors

$$K_2 = \exp(-2\varphi)(K_1 - \Delta_{g_1}(\varphi)),$$

où Δ_{g_1} est le laplacien de la métrique g_1 . Pour avoir (VIII.4), on prend la métrique hyperbolique usuelle et son image inverse par w , toutes deux à courbure -1 . Même si cette façon de penser n'est pas clairement présente chez Poincaré, nous verrons au chapitre X qu'il connaît bien ce genre de formules, au moins lorsque g_1 et g_2 sont à courbure constante.

La question de l'unicité d'une équation uniformisante sur une courbe algébrique X peut être reformulée en termes de métriques riemanniennes sur la surface S associé à X . En effet, deux équations uniformisantes produisent des biholomorphismes w_i de \tilde{S} sur \mathbb{H} et des métriques hyperboliques g_i sur S , $i = 1, 2$ (à partir de la métrique hyperbolique de \mathbb{H} comme plus haut). Les métriques g_1 et g_2 définissent la structure complexe de S , donc sont dans la même classe conforme. L'équivalence projective des équations uniformisantes se traduit⁽¹⁴⁾ par $g_1 = g_2$. Du point de vue des métriques sur S , l'unicité équivaut donc au fait qu'il existe au plus une métrique à courbure -1 dans une classe conforme donnée, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction φ non nulle sur une surface compacte qui soit solution de l'équation précédente. Vérifions directement ce dernier point. Une telle fonction φ changerait de signe puisque l'intégrale d'un laplacien est nulle ; en un point où φ atteint son maximum, le laplacien est négatif ou nul alors que le second membre est positif, ce qui est absurde.

14. en utilisant l'identité $\text{Isom}^+(\mathbb{H}) = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, déduite de $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{Aut}(\mathbb{H})$ qui évidemment résout déjà la question d'unicité!

Nous pouvons maintenant conclure la preuve du lemme de transversalité.

Considérons donc l'équation normale uniformisante de la courbe X_{F_0} :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + h_0v = 0 \tag{E_0}$$

et un vecteur tangent à $\mathcal{E}(X_{F_0})$ au point E_0 , c'est-à-dire la tangente en $\varepsilon = 0$ à une certaine courbe dans l'espace des équations différentielles normales de la forme

$$\frac{d^2v}{dx^2} + (h_0 + \varepsilon q)v = 0 \tag{E_\varepsilon}$$

où $q(x, y)dx^2$ définit une différentielle quadratique holomorphe sur S_{F_0} . Par l'application de monodromie, on obtient une courbe dans $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S_{F_0})$ paramétrée par ε . Il s'agit de montrer que, si cette courbe est tangente en $\varepsilon = 0$ à la sous-variété réelle $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S_{F_0})$, alors q est identiquement nulle.

Puisque E_0 est uniformisante, on a une identification entre \tilde{S} et le demi-plan supérieur \mathbb{H} et entre le groupe fondamental de S et un groupe discret Γ d'isométries de \mathbb{H} . On notera z la coordonnée usuelle sur \mathbb{C} , pour laquelle \mathbb{H} est défini par $\text{Im}(z) > 0$. Comme toujours, le quotient de deux solutions de l'équation différentielle E_ε produit un biholomorphisme local w_ε de $\tilde{S} = \mathbb{H}$ vers $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, bien défini à transformation projective près au but. On peut supposer que w_0 est l'identité.

La différentielle quadratique $\{w_\varepsilon, z\}dz^2$ est égale à $\varepsilon q dx^2$. En effet, d'après la proposition VIII.3.5, la dérivée schwarzienne de w par rapport à la coordonnée x est égale à $h_0 + \varepsilon q$. Mais, d'après la même proposition, la dérivée schwarzienne $\{z, x\}$ est égale à h_0 puisque l'identité $w_0(z) = z$ est le quotient de deux solutions de l'équation E_0 . L'égalité $\{w_\varepsilon, z\}dz^2 = \varepsilon q dx^2$ résulte de la formule (IV.6) page 150. Par conséquent, pour démontrer que q est identiquement nulle, il suffira de montrer que la dérivée de $\{w_\varepsilon, z\}$ par rapport au paramètre ε est nulle en $\varepsilon = 0$.

Par définition de la représentation de monodromie, pour chaque élément $\gamma \in \Gamma$ du groupe fondamental de S , on dispose d'une homographie qui dépend de ε et vérifie une relation de la forme :

$$w_\varepsilon(\gamma(z)) = \frac{a(\gamma, \varepsilon)w_\varepsilon(z) + b(\gamma, \varepsilon)}{c(\gamma, \varepsilon)w_\varepsilon(z) + d(\gamma, \varepsilon)}.$$

Pour $\varepsilon = 0$, les nombres $a(\gamma, \varepsilon), b(\gamma, \varepsilon), c(\gamma, \varepsilon), d(\gamma, \varepsilon)$ sont réels. Notre hypothèse signifie que l'on peut choisir les w_ε de telle sorte que la

dérivée de ces nombres en $\varepsilon = 0$ est également réelle. Il faut en effet se souvenir que w_ε est défini à une homographie près au but et que la représentation de monodromie est définie à conjugaison près.

Bien sûr w_ε ne préserve pas forcément \mathbb{H} , mais pour tout compact K du demi-plan, le compact $w_\varepsilon(K)$ est contenu dans \mathbb{H} pour ε assez petit. On peut donc considérer les fonctions $2\varphi_\varepsilon$, logarithmes des jacobiens hyperboliques de w_ε , qui sont définies au voisinage d'un point donné pour ε assez petit. D'après la relation (VIII.4) on a $\Delta_{\mathbb{H}}(\varphi_\varepsilon) = \exp(2\varphi_\varepsilon) - 1$. En posant $\psi = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \varphi_\varepsilon : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ et en dérivant la relation précédente, on voit que

$$\Delta_{\mathbb{H}}(\psi) = 2\psi.$$

Nous affirmons que ψ est invariante par l'action de Γ . En effet, les nombres $a(\gamma, \varepsilon), b(\gamma, \varepsilon), c(\gamma, \varepsilon), d(\gamma, \varepsilon)$ étant réels au premier ordre, le jacobien hyperbolique de l'homographie correspondante est égal à 1 au premier ordre. Il en résulte que

$$\varphi_\varepsilon(\gamma(z)) = \varphi_\varepsilon(z) + O(\varepsilon^2)$$

pour tout γ et uniformément sur tout compact de \mathbb{H} . Dérivant par rapport à ε en 0, on obtient bien que ψ est Γ -invariant. Par suite ψ induit une fonction ψ sur la surface compacte S et bien entendu, comme plus haut (fin de la remarque VIII.5.6), en examinant le signe du laplacien aux extrema de ψ on voit que ψ est identiquement nulle. En d'autres termes, nous avons établi que w_ε préserve la métrique hyperbolique à $O(\varepsilon^2)$ près, uniformément sur tout compact.

Il nous reste à montrer que *la dérivée schwarziennne de w_ε est également $O(\varepsilon^2)$ uniformément sur tout compact.* Pour cela, il est commode de passer dans le modèle du disque unité $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Fixons un point $z_0 \in \mathbb{H}$, un voisinage compact K de z_0 tel que $w_\varepsilon(K) \subset \mathbb{H}$ (ε assez petit) et des homographies $f, g_\varepsilon : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ telle que $f(0) = z_0, g_\varepsilon(0) = w_\varepsilon(z_0)$ et g_ε fonction lisse de ε . On prendra $K = f(\mathbb{D}_{1/2})$ où $\mathbb{D}_{1/2} = \{|z| \leq 1/2\}$. On remplace w_ε par la fonction $g_\varepsilon^{-1} \circ w_\varepsilon \circ f$ que l'on note toujours w_ε . Cette (nouvelle) fonction w_ε fixe 0 et la différentielle quadratique $\{w_\varepsilon, x\} dx^2$ est inchangée (changements projectifs de coordonnées). De plus f et g_ε sont des isométries pour les métriques hyperboliques de \mathbb{H} et de \mathbb{D} , donc w_ε préserve la métrique hyperbolique à $O(\varepsilon^2)$ près, uniformément sur les compacts, en particulier sur le disque $\mathbb{D}_{1/2}$.

Nous affirmons que *cela entraîne, toujours sur le disque $\mathbb{D}_{1/2}$, que la distance entre w_ε et une certaine rotation de centre 0 (dépendant de ε) est*

un $O(\varepsilon^2)$. Pour s'en convaincre, on constate d'abord que l'image par w_ε d'un rayon joignant l'origine à un point du cercle $C_{1/2} = \partial\mathbb{D}_{1/2}$ est une courbe dont la longueur hyperbolique est égale à celle du rayon à $O(\varepsilon^2)$ près. Il en résulte que l'image par $w_\varepsilon(\mathbb{D}_{1/2})$ est contenue dans un disque de rayon $1/2 + O(\varepsilon^2)$. En observant que pour ε petit la restriction de w_ε à $\mathbb{D}_{1/2}$ est un difféomorphisme sur son image et en raisonnant comme nous venons de le faire avec l'inverse de w_ε , nous obtenons que $w_\varepsilon(\mathbb{D}_{1/2})$ est compris entre deux disques de rayons $1/2 - O(\varepsilon^2)$ et $1/2 + O(\varepsilon^2)$. Le lemme de Schwarz classique montre alors que $w'_\varepsilon(0)$ a un module qui est égal à $1 + O(\varepsilon^2)$.

Considérons maintenant la restriction de w_ε au cercle $C_{1/2}$. Son image est une courbe contenue dans un anneau d'épaisseur $O(\varepsilon^2)$ autour de $C_{1/2}$. La projection radiale sur le cercle $C_{1/2}$ fournit alors, pour ε assez petit, un difféomorphisme du cercle dont la dérivée est majorée par $1 + O(\varepsilon^2)$. Ce difféomorphisme diffère donc d'une rotation par $O(\varepsilon^2)$. Nous avons bien montré que w_ε diffère d'une rotation de $O(\varepsilon^2)$ sur le bord du disque $\mathbb{D}_{1/2}$ et donc sur tout ce disque par principe du maximum. La formule de Cauchy montre alors que les dérivées secondes et troisièmes de w_ε à l'origine sont des $O(\varepsilon^2)$. La dérivée schwarzienne de $\{w_\varepsilon, z\}$ à l'origine est donc également un $O(\varepsilon^2)$.

Revenant au demi-plan supérieur, on voit que la dérivée par rapport à ε , en $\varepsilon = 0$, de la dérivée schwarzienne $\{w_\varepsilon, z\}$ est nulle en tout point z_0 du demi-plan. Nous avons vu que ceci est équivalent au fait que *la différentielle quadratique holomorphe q est identiquement nulle*, ce qu'il fallait démontrer. \square

Exemples et développements

Dans ce chapitre, nous commençons par décrire en détail le travail de Schwarz [Schw1873] sur l'équation hypergéométrique qui le conduira à la fameuse liste des paramètres pour lesquels toutes les solutions sont algébriques. Dans ce travail précurseur, on trouve en germe de nombreuses idées qui seront développées plus tard par Klein et Poincaré. Ensuite, nous explicitons les équations normales sur certaines courbes algébriques ; nous retrouvons ainsi des familles classiques d'équations différentielles. Elles dépendent de « paramètres accessoires » que l'on ne sait déterminer de manière à obtenir une équation uniformisante que dans certains cas exceptionnels. Comme Schwarz l'a lui-même réalisé à la lumière des travaux de Klein et Poincaré, nous montrons au passage que la solution générale de l'équation hypergéométrique permet d'uniformiser de nombreuses courbes algébriques. Ensuite, en suivant Poincaré, nous faisons fonctionner de manière explicite et élémentaire la méthode de continuité dans le cas de la sphère privée de quatre points. Nous concluons en évoquant quelques descendances de la méthode de continuité. Pour des informations complémentaires, le lecteur pourra bien sûr consulter [Gra1986].

IX.1. Théorie de Fuchs locale

Comme nous l'avons observé à plusieurs reprises, quand bien même on ne s'intéresserait qu'à l'uniformisation des courbes lisses et compactes, on est obligé, ne serait-ce que pour les besoins du calcul, de considérer des équations différentielles avec pôles, correspondant à des structures

projectives singulières. C'est par exemple le cas lorsque l'on veut exprimer l'équation uniformisante d'une courbe d'équation $F(x, y) = 0$ dans la variable x . Par ailleurs, on se doit d'évoquer le résultat suivant de Fuchs qui inspira Poincaré jusqu'à justifier à ses yeux l'appellation de « fonctions fuchsienues » et « groupes fuchsienus ». Ce résultat fut redémontré un peu plus tard par Schwarz.

On dira qu'une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2v}{dx^2} + f \frac{dv}{dx} + gv = 0 \quad (E)$$

à coefficients méromorphes est *fuchsienne* en un point $x = x_0$ lorsque f et g ne présentent au plus en ce point que des pôles d'ordre 1 et 2 respectivement. Ceci équivaut à dire que l'équation réduite associée

$$\frac{d^2v}{dx^2} + hv = 0, \quad (E')$$

définie par $h = g - \frac{1}{2} \frac{df}{dx} - \frac{1}{4} f^2$, ne présente au plus qu'un pôle double en x_0 . On dira alors que la structure projective induite autour de x_0 possède une singularité fuchsienne en x_0 . Notons que l'équivalence projective entre (E) et (E') n'est valide, telle que nous l'avons définie dans la section VIII.3.2, que sur un voisinage épointé puisqu'en x_0 , ni (E) ni (E') ne possède de solution. Un résultat bien connu de Fuchs affirme que les équations à singularités fuchsienues sont caractérisées parmi les équations méromorphes du second ordre par le fait que leurs solutions sont à croissance modérée au voisinage des points singuliers (sur des secteurs). Mais c'est à un autre résultat de Fuchs que nous nous intéressons ici.

Nous voulons décrire le type de singularités que présentent les cartes w de la structure projectives induite autour de x_0 , ainsi que leur monodromie autour de x_0 . Comme dans la proposition VIII.3.5, une telle carte est donnée par le quotient $w = v_1/v_2$ de deux solutions indépendantes de (E) autour de x_0 , ou encore comme solution de l'équation schwarzienne $\{w, x\} = 2h$, où h est le coefficient de l'équation réduite associée (E') . Autrement dit, nous cherchons à résoudre l'équation schwarzienne $\{w, x\} = 2h$ au voisinage d'un pôle double x_0 de h .

Si $y(x)$ est une autre coordonnée envoyant le point x_0 sur le point $y_0 = y(x_0)$, alors la nouvelle équation schwarzienne $\{w, y\} = 2H$ donnée par la formule de changement de coordonnées (voir l'encadré IV.1) présentera encore un pôle double en y_0 . De plus, le coefficient dominant λ

défini par

$$\{w, x\} = \frac{\lambda}{(x - x_0)^2} + \frac{\mu}{x - x_0} + O(1)$$

restera inchangé :

$$\{w, y\} = \frac{\lambda}{(y - y_0)^2} + \frac{\tilde{\mu}}{y - y_0} + O(1).$$

C'est le résidu de la structure projective au point singulier. On le calcule à partir de l'équation différentielle

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{\lambda_1}{x - x_0} + O(1) \right) \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{(x - x_0)^2} + \frac{\mu}{x - x_0} + O(1) \right) v = 0 \quad (E)$$

par la formule

$$\lambda = \lambda_2 + \frac{1 - (\lambda_1 - 1)^2}{2}.$$

On définit alors l'indice θ au signe près par

$$\lambda = \frac{1 - \theta^2}{2}.$$

Notons au passage que lorsque le coefficient g de l'équation (E) n'a qu'un pôle simple, l'indice $\theta = \lambda_1 - 1$ est directement donné par le résidu usuel de f . Le résultat de Fuchs-Schwarz s'énonce alors :

Théorème IX.1.1. — *L'équation schwarziennne*

$$\{w, x\} = \frac{1 - \theta^2}{2(x - x_0)^2} + \frac{\mu}{x - x_0} + O(1)$$

admet comme solution particulière autour de x_0

- ou bien $w(x) = y^\theta$,
- ou bien $w(x) = \frac{1}{y^n} + \log y$ et dans ce cas $\theta = \pm n$ ($n \in \mathbb{N}$),

où $y(x)$ est une coordonnée locale en x_0 , $y(x_0) = 0$.

Lorsque θ n'est pas un entier, on est dans le premier cas et toute autre solution de l'équation schwarziennne est évidemment de la forme $w(x) = \frac{ay^\theta + b}{cy^\theta + d}$, $ad - bc \neq 0$ (voir encadré IV.1). Notamment, $w(x) = y^{-\theta}$ est aussi solution ce qui est cohérent avec le fait que θ n'est défini qu'au signe près par l'équation. La monodromie autour de x_0 est donnée par la multiplication par $e^{2i\pi\theta}$. Une base de solutions de l'équation réduite (E') est donnée par $v(x) = y^{\frac{1 \pm \theta}{2}}$.

Par contre, lorsque θ est entier, disons $\theta = n \in \mathbb{N}$, alors il existe une coordonnée locale $y(x)$ en x_0 telle que la structure projective est définie

- ou bien par la carte $w = y^n$ (ou encore $w = \frac{1}{y^n}$) et la monodromie est triviale,
- ou bien par la carte $w(x) = \frac{1}{y^n} + \log y$ et la monodromie est une translation non triviale $w(e^{2i\pi}y) = w(y) + 2i\pi$.

Le premier cas, exceptionnel, est caractérisé par la proposition suivante :

Proposition IX.1.2. — *Sous les hypothèses du théorème IX.1.1 avec $\theta = n$ entier, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *il existe une coordonnée locale y pour laquelle $w = y^n$ est solution de l'équation schwarzienne,*
- *toute solution $w(x)$ de l'équation schwarzienne est définie uniforme sur un voisinage épointé de x_0 , autrement dit, la monodromie est triviale,*
- *il existe une coordonnée locale y pour laquelle l'équation (E) est projectivement équivalente à*

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{1-n^2}{4y^2}v = 0,$$

- *il existe une coordonnée locale y pour laquelle*

$$\frac{dy}{dx}\{w, x\} + \frac{1}{2}\{y, x\} = \frac{1-n^2}{2x^2},$$

- *il existe une coordonnée locale y pour laquelle*

$$\frac{dy}{dx}\{w, x\} + \frac{1}{2}\{y, x\} = \frac{1-n^2}{2x^2} + O(x^{n-1}).$$

On dira que la singularité est apparente dans ce cas, et logarithmique sinon.

En utilisant la dernière caractérisation, un calcul formel immédiat nous dit que la singularité de l'équation schwarzienne

$$\{w, x\} = \frac{1-n^2}{2(x-x_0)^2} + \frac{\mu}{x-x_0} + \mu_0 + \mu_1(x-x_0) + \mu_2(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^3)$$

est :

- toujours logarithmique lorsque $n = 0$,
- apparente si et seulement si $\mu = 0$ dans le cas $n = 1$ (c'est-à-dire si et seulement si elle est holomorphe puisque $\lambda = 0$ dans ce cas),
- apparente si et seulement si $\mu^2 + 2\mu_0 = 0$ dans le cas $n = 2$,
- apparente si et seulement si $\mu^3 + 8\mu\mu_0 + 16\mu_1 = 0$ dans le cas $n = 3$,
- apparente si et seulement si $\mu^4 + 20\mu^2\mu_0 + 36\mu_0^2 + 96\mu\mu_1 + 288\mu_2 = 0$ dans le cas $n = 4$.

La preuve du théorème IX.1.1 et de la proposition IX.1.2 consistent à trouver tout d'abord un changement de coordonnée formel $y(x)$ conduisant à l'une des solutions proposées par l'énoncé, puis à montrer sa convergence par la méthode des séries majorantes. On peut aussi se ramener au théorème de Briot-Bouquet plus ancien qui se démontre de la même manière. Nous proposons ici de tricher en utilisant la croissance modérée des solutions de (E) (aussi due à Fuchs) qui est aujourd'hui bien classique et que nous ne démontrons pas (voir par exemple [Hil1976]).

Idée de preuve. — Puisque l'équation (E) est fuchsienne, ses solutions v (multivaluées) autour de x_0 sont à croissance modérée en x_0 , *i. e.* satisfont

$$|v(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^M$$

pour des constantes $C, M > 0$ pour autant que l'on ne considère qu'un nombre fini de déterminations, par exemple en se restreignant à un secteur $\{-\alpha < \arg(x - x_0) < \alpha\}$. Il en sera de même de toute carte projective $w = v_1/v_2$. Sa monodromie autour de x_0 est donnée par une transformation de Möbius. Quitte à changer pour une autre carte projective, on peut supposer la monodromie de la forme

$$w(e^{2i\pi}x) = aw(x) \quad \text{ou} \quad w(x) + b$$

(on suppose $x_0 = 0$ pour simplifier).

Premier cas : $w(e^{2i\pi}x) = aw(x)$. La forme différentielle $\frac{dw}{w}$, elle aussi à croissance modérée en 0, est bien définie (univaluée) et donc s'étend méromorphiquement en 0. En fait, elle est à pôle simple, sinon w serait à croissance exponentielle en 0. On peut donc écrire

$$\frac{dw}{w} = \theta \frac{dx}{x} + df$$

où θ est le résidu de $\frac{dw}{w}$ et $f(x)$ holomorphe en 0. En intégrant, il vient $w = x^\theta \exp f = y^\theta$ avec $y = x \exp \frac{f}{\theta}$. Finalement, $\{w, y\} = \frac{1-\theta^2}{2y^2}$. Bien sûr, le cas $\theta = 0$ est à traiter séparément.

Second cas : $w(e^{2i\pi}x) = w(x) + b$. La forme différentielle dw est méromorphe en 0 et on peut écrire

$$dw = f \frac{dx}{x^{n+1}}$$

avec f holomorphe en 0. On observe ici un point important : un logarithme va apparaître en intégrant si et seulement si le coefficient

d'ordre n de f est non nul; ceci conduira à une monodromie non triviale. Un calcul simple montre que cette condition se lit sur les n premiers coefficients de $\{w, x\}$. On trouvera alors $w = \frac{u}{x^n} + \beta \log(x)$, u holomorphe non nulle, ce que l'on peut réécrire $\tilde{w} = \frac{w}{\beta} = \frac{1}{y^n} + \log y$ (en substituant $y = xv(x)$, on trouve $v(x)$ holomorphe non nulle à l'aide du théorème des fonctions implicites). \square

IX.2. Équation hypergométrique de Gauss et liste de Schwarz

L'équation hypergométrique de Gauss

$$x(x-1)\frac{d^2v}{dx^2} + ((\alpha + \beta + 1)x - \gamma)\frac{dv}{dx} + \alpha\beta v = 0 \quad (\text{IX.1})$$

est une famille d'équations fuchsienues sur \mathbb{CP}^1 à trois paramètres α, β, γ (réels ou complexes) dont les pôles sont situés en $0, 1$ et ∞ . Par fuchsienne à l'infini, on entend qu'elle se prolonge, dans la variable $\tilde{x} = \frac{1}{x}$, méromorphiquement en $\tilde{x} = 0$ avec singularité fuchsienne. Les indices $\pm\theta_i$ aux points $i = 0, 1, \infty$ sont donnés par

$$\theta_0 = \gamma - 1, \quad \theta_1 = \alpha + \beta - \gamma \quad \text{et} \quad \theta_\infty = \alpha - \beta. \quad (\text{IX.2})$$

Toute équation fuchsienne sur \mathbb{CP}^1 avec pôles sur $0, 1$ et ∞ est projectivement équivalente à une équation de la famille précédente. En effet, on vérifie que l'équation réduite associée ne peut être que de la forme

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{\lambda_0}{x^2} + \frac{\lambda_1}{(x-1)^2} + \frac{\lambda_\infty - \lambda_0 - \lambda_1}{x(x-1)} \right) v = 0 \quad (\text{IX.3})$$

où $\lambda_i = \frac{1-\theta_i^2}{4}$ est le résidu⁽¹⁾ au point $i = 0, 1, \infty$. Autrement dit, une structure projective fuchsienne avec 3 singularités sur \mathbb{CP}^1 est complètement déterminée par la position de ses points singuliers et leur résidu (ou indice).

Dans [Schw1873], Schwarz va revenir sur ses travaux antérieurs [Schw1869] sur la représentation conforme (voir section IV.2.2) pour répondre à la question suivante de Gauss : *pour quels paramètres* (α, β, γ)

1. On prendra garde qu'il s'agit ici des résidus du coefficient de l'équation réduite qui diffère d'un facteur 2 du second membre de l'équation schwarzienne associée que nous avons préalablement considéré dans la section IX.1.

la série hypergéométrique⁽²⁾ $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est-elle une fonction algébrique de son argument ?

Dans [Schw1873], il présente une solution complète à cette question, en déterminant les triplets (α, β, γ) pour lesquels (IX.1) admet au moins une intégrale algébrique. La réponse exhaustive comporte beaucoup de ramifications techniques et la partie la plus intéressante (du moins géométriquement) du travail de Schwarz répond à une question plus simple : déterminer quand *toutes* les solutions de l'équation hypergéométrique sont des fonctions algébriques de leur argument. En prenant beaucoup de liberté avec l'article de Schwarz, qui est pour le moins elliptique, nous allons expliquer comment on arrive à la fameuse liste de Schwarz. En cours de route, Schwarz décrit la monodromie projective de l'équation hypergéométrique pour tout paramètre (α, β, γ) réel.

IX.2.1. Algébricité des solutions et monodromie de l'équation

Observons d'abord, comme le fait Schwarz, que l'algébricité des solutions de l'équation hypergéométrique est directement liée à la finitude du groupe de monodromie.

Proposition IX.2.1. — *Considérons une équation fuchsienne*

$$\frac{d^2v}{dx^2} + f \frac{dv}{dx} + gv = 0 \quad (E)$$

telle que $g(x)$ ne présente que des pôles simples. Alors sont équivalents :

1. toutes les solutions de (E) sont algébriques,
2. le quotient $w = v_1/v_2$ de deux solutions indépendantes de (E) est algébrique,
3. la monodromie projective de (E) est à valeurs dans un sous-groupe fini de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Dans ce cas, tous les points singuliers ont des indices θ rationnels et sont non logarithmiques lorsque l'indice est entier.

2. Pour $\gamma \notin \mathbb{Z}^-$, l'équation hypergéométrique (IX.1) admet pour solution particulière la série hypergéométrique introduite par Gauss :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} x^n.$$

Par convention, $(x)_0 = 1$ et $(x)_n := x(x+1)\dots(x+n-1)$. Lorsque α ou β est un entier négatif ou nul, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est un polynôme en x . Sinon, la série définissant $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ a un rayon de convergence égal à 1.

Cette proposition s'applique directement à l'équation hypergéométrique (IX.1). Notons que les indices sont rationnels si et seulement si les paramètres α , β et γ sont rationnels. Comme nous le verrons dans la prochaine section, dès qu'un des indices est entier, la singularité correspondante de l'équation (IX.1) est de type logarithmique et la monodromie est alors infinie.

Démonstration. — Soient v_1 et v_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (IX.1). Si v_1 et v_2 sont algébriques, alors il est clair que $w = \frac{v_1}{v_2}$ l'est aussi. Du coup, w n'a qu'un nombre fini de déterminations pour le prolongement analytique. Mais la monodromie projective de l'équation n'est autre que la monodromie de w : elle est donc finie.

Réciproquement, supposons l'équation (E) à monodromie projective finie. En particulier, la monodromie projective locale est finie autour de chaque singularité de l'équation ce qui, au vu de la section IX.1, est équivalent au fait que

- l'indice θ de chaque singularité est rationnel,
- lorsque θ est entier, la singularité n'est pas de type logarithmique.

Par ailleurs, le quotient $w = v_1/v_2$ de deux solutions aura un nombre fini de déterminations et admettra un prolongement algébroïde (*i. e.* de la forme $w = \varphi^\theta$, $\theta \in \mathbb{Q}$) en chaque point singulier (voir section IX.1). D'après les travaux de Riemann, il s'en suit que $w(x)$ est une fonction algébrique de x .

Enfin, si w est algébrique, il en ira de même pour

$$\frac{dw}{dx} = \frac{v_2 \frac{dv_1}{dx} - v_1 \frac{dv_2}{dx}}{v_2^2}.$$

Mais le wronskien de deux solutions v_1 et v_2 satisfait :

$$v_2 \frac{dv_1}{dx} - v_1 \frac{dv_2}{dx} = C e^{-\int f dx}.$$

On en déduit donc que

$$v_2^2 = C \left(\frac{dw}{dx} \right)^{-1} e^{-\int f dx}.$$

Puisque l'équation (E) est fuchsienne (y compris à l'infini), f est de la forme

$$f(x) = \sum_i \frac{\lambda_i}{x - x_i};$$

comme par ailleurs g est à pôles simples, le résidu de f au point x_i est le rationnel $\lambda_i = 1 + \theta_i$ pour chaque singularité x_i (voir section IX.1). Par conséquent, $e^{-\int f dx}$ est algébrique et par suite, v_2^2 aussi ; il en va de même pour v_2 et $v_1 = w v_2$. \square

IX.2.2. Retour sur l'article [Schw1873]

Si l'on revient sur le travail précurseur de Schwarz sur la représentation conforme (voir section IV.2), on peut paraphraser le théorème IV.2.5 comme suit :

Théorème IX.2.2. — *Si $0 \leq \theta_0, \theta_1, \theta_\infty \leq 2$ sont tels qu'il existe un triangle dont les côtés sont des arcs de cercles et les angles sont $\pi\theta_i$, alors le quotient $w = v_1/v_2$ de deux solutions particulières de l'équation hypergéométrique (IX.1) associée envoie conformément le demi-plan \mathbb{H} sur le triangle (envoyant $0, 1$ et ∞ sur les sommets).*

Dans cette situation, la monodromie projective de l'équation hypergéométrique (IX.1) coïncide avec la monodromie de la coordonnée projective w . Rappelons (voir section IV.2) que le groupe engendré est le sous-groupe d'indice 2 du groupe de transformations (anti-)conformes engendré par les réflexions par rapport aux côtés du triangle.

Rappelons que le théorème IX.2.2 est obtenu par une méthode directe lorsque $0 \leq \theta_i < 1$ et par une méthode indirecte comme corollaire du théorème de représentation conforme de Riemann lorsque $0 \leq \theta_i \leq 2$. Pour ramener le cas général des paramètres θ_i réels à l'énoncé précédent, nous allons utiliser un groupe de symétries qui est aujourd'hui classique depuis les travaux ultérieurs de Schlesinger.

IX.2.3. Symétries

On observe d'ores et déjà que plusieurs équations hypergéométriques vont donner lieu à une même équation réduite et par suite définir la même structure projective. Précisément, les coefficients α , β et γ de l'équation hypergéométrique sont en bijection *via* la formule (IX.2) avec les indices θ_i qui, quant à eux, ne sont définis qu'au signe près par la structure projective. Par exemple, l'équation de paramètres

$$(\alpha', \beta', \gamma') = (1 + \alpha - \gamma, 1 + \beta - \gamma, 2 - \gamma)$$

est projectivement équivalente à l'équation de paramètres (α, β, γ) ; elle correspond *via* (IX.2) au changement d'indices

$$(\theta'_0, \theta'_1, \theta'_\infty) = (-\theta_0, \theta_1, \theta_\infty).$$

Nous travaillerons dans la suite plus avantageusement avec les paramètres θ_i plutôt qu'avec les paramètres classiques (α, β, γ) . Nous voyons ainsi une action naturelle du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur l'espace des paramètres $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty) \in \mathbb{C}^3$, c'est à dire sur l'espace des équations hypergéométriques, dont le quotient est l'espace des structures projectives.

Le groupe des permutations \mathfrak{S}_3 agit lui aussi *via* les changements de coordonnées engendrés par

$$x' = 1 - x \quad \text{et} \quad x' = \frac{1}{x}$$

sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, induisant respectivement les changements de paramètres

$$(\theta'_0, \theta'_1, \theta'_\infty) = (\theta_1, \theta_0, \theta_\infty) \quad \text{et} \quad (\theta_\infty, \theta_1, \theta_0).$$

On obtient, en les combinant, l'action linéaire d'un groupe d'ordre 24 sur \mathbb{C}^3 .

Enfin, rappelons qu'en posant $dy = \frac{dv}{v}$, on obtient une équation de Riccati (voir début du chapitre VIII) dont la monodromie coïncide avec la monodromie projective de l'équation (IX.1). En appliquant la transformation birationnelle $y' = -\frac{\alpha\beta}{x(x-1)y}$, on obtient une nouvelle équation de Riccati avec la même monodromie : le changement d'inconnue est régulier en dehors des trois pôles de l'équation. Un calcul immédiat montre que nous récupérons, en posant $dy' = \frac{dv'}{v'}$, l'équation hypergéométrique de paramètres

$$(\alpha', \beta', \gamma') = (-\alpha, -\beta, 1 - \gamma)$$

dont la monodromie projective doit être la même que pour les paramètres (α, β, γ) . Elle correspond à la transformation

$$(\theta'_0, \theta'_1, \theta'_\infty) = (-\theta_0 - 1, -\theta_1 - 1, -\theta_\infty).$$

Attention, la structure projective a changé. En combinant cette transformation avec les précédentes, on voit facilement que l'on engendre un groupe infini de transformations affine Γ sur l'espace des paramètres, dont un sous-groupe normal, d'indice 6 dans Γ , est donné par

$$\Gamma' = \{(\pm\theta_0 + n_0, \pm\theta_1 + n_1, \pm\theta_\infty + n_\infty); (n_0, n_1, n_\infty) \in \mathbb{Z}^3, n_0 + n_1 + n_\infty \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Le quotient Γ/Γ' est le groupe des permutations \mathfrak{S}_3 .

Proposition IX.2.3. — *Deux équations hypergéométriques ont même représentation de monodromie projective si et seulement si elles se correspondent sous l'action du groupe de symétries Γ' .*

Démonstration. — Il nous suffit de vérifier que deux équations hypergéométriques ayant même monodromie projective se correspondent nécessairement par un élément de Γ' . La monodromie projective de l'équation (IX.1) est donnée, pour le système de générateurs standard pour $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, par un triplet $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_\infty) \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ satisfaisant $\varphi_0\varphi_1\varphi_\infty = \text{identité}$. La transformation φ_i est la monodromie locale de la structure projective autour du pôle $i = 0, 1, \infty$ et est conjuguée dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ à une transformation affine de la forme $w \mapsto e^{2i\pi\theta_i}w + b$, $b \in \mathbb{C}$. Chaque transformation φ_i admet deux relevés $\pm M_i \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$; choisissons M_0 telle que $\text{tr}M_i = 2\cos(\pi\theta_i)$. Nous affirmons que la relation $\varphi_0\varphi_1\varphi_\infty = \text{identité}$ se relève en $M_0M_1M_\infty = -I$.

En effet, on doit avoir $M_0M_1M_\infty = \pm I$ et le signe du second membre doit dépendre continûment des paramètres θ_i de l'équation; il est donc constant sur l'espace \mathbb{C}^3 des paramètres et il suffit de le déterminer sur un exemple. En appliquant le théorème IX.2.2 par exemple à $w = z$, représentation conforme de \mathbb{H} vu comme triangle d'angles π , on observe que $\theta_i = 1$ et $M_i = -I$ pour $i = 0, 1, \infty$.

Si une autre équation hypergéométrique, de paramètres θ'_i , a même monodromie projective, alors on aura à conjugaison près $M'_i = \pm M_i$ avec $M'_0M'_1M'_\infty = -I$. En particulier, $\text{tr}(M'_i) = \pm \text{tr}(M_i)$, c'est-à-dire l'égalité $\cos(\pi\theta'_i) = \pm \cos(\pi\theta_i)$, ce qui est équivalent à $\theta'_i = \pm\theta_i + n_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$; la condition $M'_0M'_1M'_\infty = -I$ impose alors que $n_0 + n_1 + n_\infty$ soit pair. \square

D'après la proposition IX.1.2, lorsque θ_0 est entier, disons $\theta_0 = n \in \mathbb{N}$, il nous faut, pour décider si la singularité est logarithmique, considérer les n premiers termes du développement de Laurent du coefficient de l'équation réduite (IX.3). Une application remarquable du groupe de symétries est qu'il n'en est rien :

Proposition IX.2.4. — *Si, pour un des points singuliers $i = 0, 1, \infty$, l'indice $\theta_i \in \mathbb{Z}$ est entier, alors la singularité de l'équation hypergéométrique est de type logarithmique.*

Démonstration. — D'après la proposition IX.1.2, la nature de la singularité se lit sur la monodromie : elle est donc invariante sous le groupe Γ et on peut en particulier supposer $i = 0$ et $\theta_0 = 0$. Mais dans ce cas, l'équation réduite (IX.3) présente bien un pôle double en 0 ($\lambda_0 = \frac{1}{4}$) : la singularité est logarithmique, toujours d'après la proposition IX.1.2. \square

IX.2.4. Triangles et géométries

Afin de comprendre la nature du groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle, Schwarz est naturellement amené sans employer ces termes, à considérer les trois géométries. Rappelons que la sphère de Riemann $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ s'identifie, *via* la projection stéréographique, à la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. On appelle cercle sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ la trace d'un plan intersectant \mathbb{S}^2 lorsqu'elle ne pas dégénère pas sur le vide ou sur un point : ce sont les cercles et les droites de \mathbb{C} pour la métrique euclidienne. Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ opère transitivement sur les cercles de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Géométrie sphérique. La métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 induit une métrique à courbure constante $+1$ sur la sphère \mathbb{S}^2 . Le groupe d'isométries est engendré par l'involution antipodale $\sigma(z) = -\frac{1}{\bar{z}}$ et le groupe des rotations

$$\mathrm{PSU}(2, \mathbb{C}) = \{\varphi \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) ; \varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi\}.$$

Les géodésiques sont les grands cercles (intersections de \mathbb{S}^2 avec un plan $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ passant par l'origine). Ce sont les cercles qui intersectent, disons l'équateur $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$, en deux points antipodaux.

Géométrie euclidienne. La métrique euclidienne de $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ a pour géodésiques les droites de \mathbb{C} , c'est à dire les cercles de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ passant par l'infini.

Géométrie hyperbolique. La métrique de Poincaré à courbure constante -1 sur \mathbb{H} a pour géodésiques les (arcs de) cercles orthogonaux à l'équateur.

Dans la suite, par triangle, on entendra un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ dont le bord est composé de 3 arcs de cercles formant une courbe de Jordan dont les 3 sommets sont deux-à-deux distincts. Notons w_0 , w_1 et w_∞ les sommets, A_i l'arc de cercle opposé au sommet w_i et C_i le cercle complet dont A_i est l'arc. Schwarz observe la trichotomie suivante.

Proposition IX.2.5. — Soient C_0, C_1 et C_∞ trois cercles de la sphère de Riemann \mathbb{CP}^1 s'intersectant deux-à-deux en un ou deux points. On est dans l'une des trois situations suivantes.

- ou bien C_∞ intersecte $C_0 \cap C_1$,
- ou bien C_∞ sépare $C_0 \cap C_1$ (i. e. $C_0 \cap C_1$ intersecte les deux composantes connexes de $\mathbb{CP}^1 \setminus C_\infty$ mais pas C_∞),
- ou bien C_∞ isole $C_0 \cap C_1$ (i. e. $C_0 \cap C_1$ est contenu dans une composante connexe de $\mathbb{CP}^1 \setminus C_\infty$).

Alors il existe un élément de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ envoyant simultanément les 3 cercles C_i sur des géodésiques pour la géométrie euclidienne, sphérique ou hyperbolique respectivement.

Démonstration. — Dans le premier cas, il suffit d'envoyer n'importe quel point de $C_0 \cap C_1 \cap C_\infty$ sur le point ∞ (on n'exclut pas que les 3 cercles soient confondus). Dans le second cas, on envoie tout d'abord les deux points $C_0 \cap C_1$ sur 0 et ∞ , puis en jouant avec les homothéties $\varphi(z) = az$, on ramène C_∞ sur un grand cercle. Dans le troisième cas, supposons que deux des trois cercles, disons C_0 et C_1 , s'intersectent en deux points distincts. Alors, de nouveau, on envoie ces deux points sur 0 et ∞ puis on joue sur les homothéties $\varphi(z) = az$ pour rendre le troisième cercle C_∞ orthogonal lui aussi à l'équateur : ce sont les géodésiques pour la métrique hyperbolique du disque unité. Lorsqu'enfin les trois cercles sont deux-à-deux tangents, le cercle C passant par ces trois points de tangence leur est orthogonal ; en envoyant C sur \mathbb{RP}^1 , les cercles C_i deviennent géodésiques pour la métrique hyperbolique sur \mathbb{H} . \square

Dans la suite, on appelle :

- **triangle sphérique** tout triangle de la sphère de Riemann \mathbb{CP}^1 bordé par des géodésiques pour la métrique sphérique,
- **triangle euclidien** tout triangle⁽³⁾ de \mathbb{C} bordé par des droites, géodésiques pour la métrique euclidienne,
- **triangle hyperbolique** tout triangle du demi-plan \mathbb{H} bordé par des géodésiques pour la métrique hyperbolique.

Si la proposition IX.2.5 nous dit que tout triangle est équivalent, modulo l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, à un triangle à bords géodésiques pour l'une des

3. On inclut ici la possibilité qu'un sommet soit à l'infini avec la restriction que les deux côtés adjacents soient parallèles. Autrement dit, on autorise les triangles euclidiens non bornés d'angles $(0, \pi\theta, \pi(1 - \theta))$, $0 \leq \theta \leq 1$, le cas $(0, 0, 1)$ dégénérant sur la bande.

trois géométries, on prendra garde que le triangle n'est pas pour autant d'un des trois types précédents. Par exemple, dans le cas hyperbolique, plusieurs triangles sont bordés par les mêmes cercles C_0 , C_1 et C_∞ , un seul est contenu dans \mathbb{H} . Le même phénomène se produit dans le cas euclidien. Mais le groupe de transformations engendré par les symétries par rapport aux côtés ne dépendent que des trois cercles et non du triangle choisi. Alors Schwarz démontre que le triangle minimisant la somme des angles $\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty$ est hyperbolique, euclidien ou sphérique. Notons que Schwarz ne pose même pas la question de savoir pour quels $0 \leq \theta_i \leq 2$ il existe un triangle d'angles $\pi\theta_i$. Nous allons contourner les arguments de Schwarz et les difficultés techniques pour les justifier en nous ramenant à l'aide du groupe de symétries à la :

Proposition IX.2.6. — Soient $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_\infty \leq 2$. Il existe un triangle (dont les côtés sont des arcs de cercles) d'angles $\pi\theta_i$ si et seulement si :

$$2\theta_\infty - 1 < \theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty < 2\theta_0 + 3 \quad (\text{IX.4})$$

et dans ce cas, le triangle est unique modulo l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$. De plus, lorsque $\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty < 2\theta_0 + 1$, ces conditions sont satisfaites et le triangle est équivalent, modulo l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, à un triangle

- hyperbolique si $\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty < 1$,
- euclidien si $\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty = 1$,
- sphérique si $\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty > 1$.

Démonstration. — Considérons un triangle d'angles $\pi\theta_i$ avec

$$0 \leq \theta_0, \theta_1, \theta_\infty \leq 2. \quad (\text{IX.5})$$

Modulo l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, on peut supposer que ses sommets sont 0, 1 et ∞ . Notons A_{ij} l'arc de cercle bordant le triangle et joignant les sommets i et j . Une orientation est choisie de sorte que le côté orienté A_{01} , allant de 0 à 1, laisse le triangle sur sa gauche ; A_{01} est un arc de cercle (qui peut dégénérer sur l'intervalle $[0, 1]$) alors que les deux autres côtés $A_{1\infty}$ et $A_{\infty 0}$ sont des droites (des cercles passant par l'infini). Introduisons les paramètres

$$-1 < \delta_0, \delta_1, \delta_\infty < 1 \quad (\text{IX.6})$$

comme suit : pour $(i, j, k) = (0, 1, \infty), (1, \infty, 0), (\infty, 0, 1)$, $\pi\delta_i$ est l'angle au point j que fait l'arc A_{jk} avec l'intervalle réel I_{jk} ; le signe est choisi de sorte que $\delta_i > 0$ quand l'arc A_{jk} est intérieur à \mathbb{H} . On a exclu $\delta_i = 1$ puisque sinon, l'arc A_{jk} va intersecter le sommet i , ce qui force le bord

du domaine à ne plus être une courbe de Jordan. Les angles du triangle sont alors donnés par

$$\begin{cases} \theta_0 = 1 - \delta_1 - \delta_\infty \\ \theta_1 = 1 - \delta_\infty - \delta_0 \\ \theta_\infty = 1 - \delta_0 - \delta_1. \end{cases} \quad (\text{IX.7})$$

Puisque $0 \leq \pi\theta_i \leq 2\pi$, les paramètres δ_i sont assujettis aux contraintes

$$-1 \leq \delta_0 + \delta_1, \delta_1 + \delta_\infty, \delta_0 + \delta_\infty \leq 1. \quad (\text{IX.8})$$

Réciproquement, tout triplet de nombres réels $(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)$ satisfaisant aux conditions (IX.6) et (IX.8) permet de reconstruire un triangle dont les angles sont donnés par (IX.7). En inversant le système (IX.7), il vient

$$\begin{cases} \delta_0 = 1 + \theta_0 - \theta_1 - \theta_\infty/2 \\ \delta_1 = 1 + \theta_1 - \theta_0 - \theta_\infty/2 \\ \delta_\infty = 1 + \theta_\infty - \theta_0 - \theta_1/2 \end{cases} \quad (\text{IX.9})$$

de sorte que le triangle est bien déterminé, modulo l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, par ses angles. Il nous reste à exprimer les contraintes (IX.6) sur les angles du triangle :

$$2\theta_0 - 1, 2\theta_1 - 1, 2\theta_\infty - 1 \leq \theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty \leq 2\theta_0 + 3, 2\theta_1 + 3, 2\theta_\infty + 3. \quad (\text{IX.10})$$

Lorsque $\theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_\infty$, ces contraintes se réduisent à (IX.4).

Venons-en à la deuxième partie de l'énoncé. L'ensemble des paramètres $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty)$ définis par les inégalités (IX.5) et (IX.10) est un convexe T de \mathbb{R}^3 , l'espace des triangles. La proposition IX.2.5 permet de partitionner T selon la configuration des 3 cercles bordant le triangle correspondant. L'ensemble E des configurations euclidiennes, caractérisées par le fait que les trois cercles s'intersectent en un même point, est fermé et sépare les composantes (ouvertes) de type hyperbolique et sphérique. Donnons des équations pour E . Si le lieu d'intersection des trois cercles intersecte le bord du triangle, alors il intersecte un des sommets ; ceci arrive précisément lorsque un des δ_i s'annule, c'est-à-dire

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty = 2\theta_0 + 1, \quad 2\theta_1 + 1 \quad \text{ou} \quad 2\theta_\infty + 1.$$

Sinon, les 3 cercles ne s'intersectent qu'en un point, ou bien à l'intérieur, ou bien à l'extérieur du triangle. Dans le second cas, il s'agit d'un triangle euclidien et on a $\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty = 1$; dans le premier cas, le complémentaire du triangle (d'angles $2\pi - \pi\theta_i$) est euclidien et on a donc $\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty = 5$. C'est un fait classique (et facile que nous ne détaillerons

pas) que la condition $\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty = 1$ caractérise les triangles euclidiens. La composante ouverte $\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty < 1$ correspond quant à elle aux triangles hyperboliques. En effet, si un triangle est hyperbolique, alors son aire hyperbolique est donnée par $\pi(1 - \theta_0 - \theta_1 - \theta_\infty) > 0$; par continuité, tout autre triangle satisfaisant cette inégalité est hyperbolique. Si l'on se restreint maintenant à la partie T^+ des paramètres satisfaisant $\theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_\infty$, alors l'autre composante bordant le plan $\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty = 1$ est définie par

$$1 < \theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty < 2\theta_0 + 1.$$

Dans ce cas, il s'agit de triangles sphériques. \square

IX.2.5. Monodromie

Le lemme crucial qui suit va nous permettre de ramener n'importe quelle équation hypergénométrique à une équation uniformisant un triangle hyperbolique, euclidien ou sphérique.

Lemme IX.2.7. — Soit $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty) \in \mathbb{R}^3$ un triplet réel. Alors son orbite sous le groupe des symétries Γ contient un unique triplet $(\theta'_0, \theta'_1, \theta'_\infty)$ positif et ordonné :

$$0 \leq \theta'_0 \leq \theta'_1 \leq \theta'_\infty$$

minimisant la somme

$$\theta'_0 + \theta'_1 + \theta'_\infty$$

que l'on appellera **triplet réduit**. Il satisfait en outre

$$\theta'_0 + \theta'_1 + \theta'_\infty \leq 1 + 2\theta'_0$$

avec égalité seulement si $\theta'_0 = 0$.

Démonstration. — En jouant tout d'abord sur les changements de signes et les translations paires $(n_0, n_1, n_\infty) \in (2\mathbb{Z})^3$, on se ramène à un unique triplet $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty)$ avec $0 \leq \theta_i < 1$. On peut encore jouer sur les transformations

$$(1 - \theta_0, 1 - \theta_1, \theta_\infty), (1 - \theta_0, \theta_1, 1 - \theta_\infty) \text{ et } (\theta_0, 1 - \theta_1, 1 - \theta_\infty)$$

pour minimiser la somme $\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty$. Notons que si l'un de ces triplets, disons le premier, a même somme que $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty)$, alors $\theta_0 + \theta_1 = 1$ de sorte que ces deux triplets sont les mêmes à permutation près. On

ordonne enfin $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_\infty$ par l'action du groupe symétrique S_3 ; le triplet obtenu est unique. Supposons que l'on ait

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty \geq 1 + 2\theta_0.$$

Alors le triplet $(\theta'_0, \theta'_1, \theta'_\infty) = (\theta_0, 1 - \theta_1, 1 - \theta_\infty)$ satisfait

$$\theta'_0 + \theta'_1 + \theta'_\infty \leq 1$$

de sorte que, par minimalité de la somme, les deux précédentes inégalités sont des égalités et $\theta_0 = 0$. \square

Corollaire IX.2.8. — *La monodromie projective d'une équation hypergéométrique à coefficients réels est engendrée par le groupe de réflexions d'un triangle hyperbolique, parabolique ou elliptique.*

Plus précisément, si G désigne le groupe de transformations engendré par les trois réflexions, alors l'image de la représentation de monodromie projective est le sous-groupe d'indice 2 des transformations de G qui préservent l'orientation.

Démonstration. — Considérons une équation hypergéométrique (IX.1) à coefficients α , β et γ réels ; alors les indices θ_i définis par (IX.2) sont réels. D'après la proposition IX.2.3, toute autre équation hypergéométrique obtenue sous l'action du groupe Γ' a même monodromie ; la proposition précédente nous dit que l'on peut par exemple se ramener à des indices satisfaisant $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_\infty \leq 1 + \theta_0 - \theta_1$. En particulier, le théorème IX.2.2 nous dit que la monodromie est engendrée par les réflexions d'un triangle d'angles $\pi\theta_i$ et la proposition IX.2.6 que le triangle est hyperbolique, euclidien ou sphérique. \square

IX.2.6. Cas hyperbolique

Lorsque les indices de l'équation hypergéométrique (IX.1) satisfont

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty < 1,$$

la monodromie est engendrée, modulo conjugaison par $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle hyperbolique. Dans ce cas, le groupe de monodromie est infini. C'est par exemple le cas lorsqu'un des sommets du triangle se trouve sur le bord de \mathbb{H} puisqu'en composant les réflexions par rapport aux deux côtés correspondants on obtient un élément parabolique (d'ordre infini) de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (voir section VI.1.6). Par ailleurs, lorsque le triangle est compact dans \mathbb{H} , les répliques symétriques

du triangle par rapport à ses côtés peuvent se rapprocher arbitrairement du bord de \mathbb{H} , sans toutefois pouvoir jamais l'atteindre. Par un nombre fini de répliques symétriques, les sommets restent toujours à distance non nulle du bord de \mathbb{H} et le processus de symétries ne prend jamais fin. *La coordonnée projective w est fonction transcendante, puisque infiniment multivaluée de x .*

On trouve dans [Schw1873] le dessin, repris dans la figure IX.1, du cas $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ où l'on obtient un pavage du disque par des triangles.

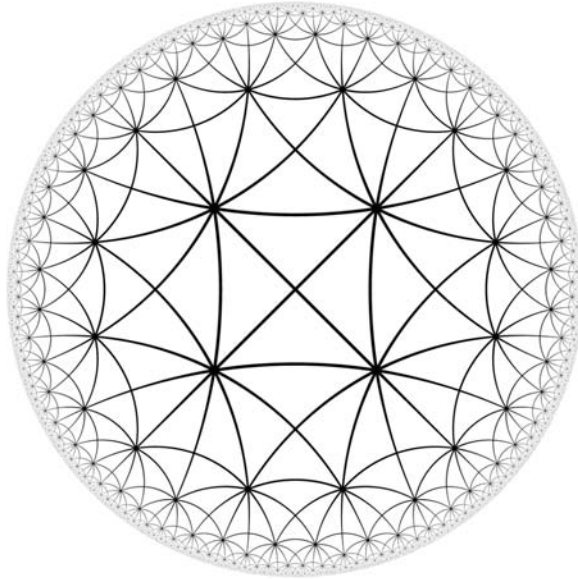


FIGURE IX.1. Pavage par des triangles $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

Si l'on revient à l'exemple de la section VI.2.1, l'équation hypergéométrique (IX.1) dont les paramètres sont (*via* la formule (IX.2)) de la forme

$$\theta_i = \frac{1}{k_i}, \quad k_i \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_\infty} < 1$$

ne peut être que l'équation uniformisante pour la sphère avec 3 points coniques d'angles $\frac{2\pi}{k_i}$. Dans ce cas, la variable x est une fonction univaluée de w . Schwarz remarque que c'est le seul cas où ce phénomène se produit sans en donner aucune preuve. Rappelons (voir section VI.2.1)

que c'est un cas particulier du théorème VI.1.10 de Poincaré. Ceci vaudra plus tard cette remarque de Poincaré dans une lettre à Mittag-Leffler :

M. Schwarz a donc dans ce mémoire énoncé un résultat de la plus haute importance, et c'est celui que j'ai cité. Il n'en donne aucune démonstration. Il y a dans la démonstration de ce résultat un point très délicat, une difficulté d'une nature spéciale ; j'ignore comment M. Schwarz l'avait surmontée.

Mais malheureusement, Schwarz ne s'attarde pas plus sur le cas hyperbolique. Il y reviendra plus tard, après les travaux de Klein et ceux de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes. Dans le second tome des œuvres complètes de Schwarz, on trouve un ajout à [Schw1873] dans lequel il reformule les différents cas étudiés en termes de géométrie hyperbolique, euclidienne et sphérique, puis il évoque, sur quelques exemples, le fait majeur qui lui avait échappé dans [Schw1873], à savoir la propriété qu'ont les fonctions « transcendentes » $w(x)$ associées aux paramètres $\theta_i = \frac{1}{k_i}$ d'uniformiser de nombreuses courbes algébriques (voir section IX.3). Notons au passage que l'équation hypergéométrique

$$x(x-1)\frac{d^2v}{dx^2} + (2x-1)\frac{dv}{dx} + 4v = 0 \quad (\text{IX.11})$$

uniformise $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.

IX.2.7. Cas euclidien

Lorsque les indices de l'équation hypergéométrique (IX.1) satisfont

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty = 1,$$

la monodromie est engendrée, modulo conjugaison par $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle euclidien, incluant le cas $\theta_\infty = 0$ pour lequel le sommet correspondant est à l'infini et les deux côtés adjacents sont deux demi-droites parallèles. Tout comme Schwarz, nous ne nous attarderons pas sur ce cas. La monodromie est encore infinie, par des arguments similaires au cas hyperbolique. Remarquons que, de nouveau, la fonction $x(w)$ est univaluée si et seulement si le triangle pave le plan, ce qui se produit précisément pour les indices

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \text{ et } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

IX.2.8. Le cas sphérique

Lorsque les indices de l'équation hypergéométrique (IX.1) satisfont

$$0 < \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_\infty \leq 1$$

avec

$$1 < \theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty < 2\theta_0 + 1,$$

la monodromie est engendrée, modulo conjugaison par $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle sphérique d'angles $\pi\theta_i$. Dans ce cas, le groupe de monodromie projective de l'équation est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(3)$, le groupe des rotations de la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Rappelons quels en sont les sous-groupes finis.

Les groupes finis cycliques. — La rotation $w \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}} w$ engendre un groupe cyclique d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ dont le quotient $x(w) = w^n$ est, vu comme espace métrique, une sphère avec deux points coniques d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Les groupes diédraux. — Le groupe D_n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) engendré par l'involution $w \mapsto \frac{1}{w}$ et la rotation $w \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}} w$, est d'ordre $2n$, isomorphe comme groupe abstrait au produit semi-direct $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est sous-groupe d'indice 2 du groupe engendré par les réflexions d'un triangle sphérique d'angles $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n})$. Le quotient, donné par $x(w) = \frac{(1-w^n)^2}{4w^n}$, est une sphère avec 3 points coniques d'angles $(\pi, \pi, \frac{2\pi}{n})$. La fonction inverse $w(x)$ est quotient de deux solutions de l'équation hypergéométrique d'indices $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n})$.

Le groupe tétraédral. — Lorsqu'on pave la sphère avec 4 triangles d'angles tous égaux à $\frac{2\pi}{3}$, on obtient un tétraèdre sphérique. Le groupe de rotations qui préserve ce pavage est d'ordre 12, isomorphe en tant que groupe abstrait au groupe alterné A_4 . Si l'on ajoute les réflexions, on obtient un groupe d'ordre 24 dont un domaine fondamental est le triangle d'angles $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ qui définit un sous-pavage du précédent. Le groupe A_4 peut donc être vu comme sous-groupe d'indice 2 du groupe de réflexions engendré par ce dernier triangle. Le passage au quotient par A_4 est par exemple⁽⁴⁾ donné par

$$x(w) = -12i\sqrt{3} \frac{w^2(w^4 - 1)^2}{(w^4 - 2i\sqrt{3}w^2 + 1)^3}.$$

4. Les formules données par Klein pour ce quotient par ce groupe et les deux suivants correspondent à $\tilde{x} = 1 - x(w)$.

La fonction inverse $w(x)$ est quotient de deux solutions de l'équation hypergéométrique d'indices

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Le groupe octaédral. — C'est le groupe de rotations d'ordre 24, isomorphe au groupe symétrique S_4 , qui laisse invariant le pavage octaédral de la sphère par 8 triangles d'angles $\frac{\pi}{2}$. On peut aussi le voir comme groupe laissant invariant le pavage cubique par 6 quadrilatères d'angles $\frac{2\pi}{3}$. Il est d'indice 2 dans le groupe de réflexions du triangle d'angles $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$. Le pavage engendré par ce dernier contient comme sous-pavages les pavages octaédral et cubique, en position de dualité⁽⁵⁾. Le passage au quotient est donné par

$$x(w) = -\frac{1}{108} \frac{(w^{12} - 33w^8 - 33w^4 + 1)^2}{w^4(w^4 - 1)^4}.$$

La fonction inverse $w(x)$ est quotient de deux solutions de l'équation hypergéométrique d'indices

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right).$$

Le groupe icosaédral. — C'est le groupe de rotations d'ordre 60, isomorphe au groupe alterné A_5 , qui laisse invariant le pavage icosaédral de la sphère par 20 triangles d'angles $\frac{2\pi}{5}$. C'est aussi le groupe qui laisse invariant le pavage dodécaédral de la sphère par 12 pentagones d'angles $\frac{2\pi}{3}$. Il est d'indice 2 dans le groupe de réflexions du triangle d'angles $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5})$. Le passage au quotient est donné par

$$x(w) = \frac{1}{1728} \frac{(w^{30} + 522w^{25} - 10005w^{20} - 10005w^{10} - 522w^5 + 1)^2}{w^5(w^{10} + 11w^5 - 1)^5}.$$

La fonction inverse $w(x)$ est quotient de deux solutions de l'équation hypergéométrique d'indices

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right).$$

5. Un sommet du premier au milieu de chaque face du second et *vice versa*.

IX.2.9. La liste de Schwarz

Le résultat principal qu’obtient Schwarz dans [Schw1873] est le :

***Théorème IX.2.9.** — Une équation hypergéométrique a toutes ses solutions algébriques si et seulement si ses paramètres sont équivalents, via le groupe de symétries Γ , à l’un des triplets du tableau suivant.*

Groupe	Triplets réduits $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty)$
D_n diédral	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{k}{n})$, avec $k = 1, \dots, n - 1$
A_4 tétraédral	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ou $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
S_4 octaédral	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ ou $(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
A_5 icosaédral	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$, $(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, $(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, $(\frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$, $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, $(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$, $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$, $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3})$ ou $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3})$.

Idée de preuve. — La méthode que propose Schwarz (sans la détailler) est la suivante. Supposons que la monodromie d’une équation hypergéométrique soit finie et que son triplet d’indices $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty)$ soit réduit (voir lemme IX.2.7). Le groupe de monodromie G de l’équation est alors d’indice 2 dans le groupe G^\pm engendré par les réflexions par rapport aux côtés du triangle sphérique d’angles $\pi\theta_i$ (comme nous l’avons vu, le triangle ne peut être hyperbolique ou euclidien). Le groupe G s’identifie donc à l’un des groupes finis de rotation de la sphère \mathbb{S}^2 décrits dans la section précédente.

Prenons le cas du groupe tétraédral A_4 comme exemple et notons A_4^\pm le groupe de réflexions du triangle T_0 d’angles $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Alors $G^\pm = A_4^\pm$.

En effet, G^\pm est engendré par G et la réflexion σ par rapport à l’un quelconque des côtés du triangle T d’angles $\pi\theta_i$. Puisque $G = A_4$ est un sous-groupe normal, σ passe au quotient pour définir une transformation anti-holomorphe $\bar{\sigma}$ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1/A_4$; de plus, σ étant une isométrie, $\bar{\sigma}$ va préserver la structure métrique du quotient et donc fixer les 3 points coniques. Par suite, $\bar{\sigma}$ est la réflexion par rapport au cercle passant par ces 3 points : c’est le générateur de l’action de A_4^\pm sur le quotient $\mathbb{C}\mathbb{P}^1/A_4$.

Ici, on utilise que les quotients ont 3 points coniques, ce qui est vrai pour tous les groupes finis excepté les groupes cycliques qui doivent être éliminés par un autre argument.

Par conséquent, les côtés du triangle T qui engendre G^\pm doivent être contenus dans les géodésiques du pavage de A_4^\pm et donc T est pavé par un nombre fini de répliques de T_0 . Les angles de T sont de la forme $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (ils sont $< \pi$ et proviennent des angles de T_0 par réflexions successives). Ces contraintes nous donnent 3 triplets réduits, à savoir

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Le dernier est euclidien ; les deux premiers, d'aires respectives $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, conviennent : le premier est formé de deux copies de T_0 , le second est T_0 lui-même.

Dans le cas de A_5 , on trouve 15 triplets réduits d'indices $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ ou $\frac{4}{5}$ correspondant à des triangles sphériques. Le triplet $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$ correspond au triangle d'aire minimale $\frac{\pi}{30}$: c'est le domaine fondamental pour l'action de A_5^\pm . Après une vérification pénible au cas par cas, on teste lesquels des 15 triangles correspondants sont effectivement pavés par le triangle de A_5^\pm ; seuls 10 triplets conviennent. Par exemple, pour éliminer le triplet $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, correspondant au triangle d'aire maximale $\frac{12\pi}{30}$, il suffit de remarquer que l'équation hypergéométrique correspondante s'obtient en relevant par le revêtement ramifié $x \mapsto (2x - 1)^2$ l'équation hypergéométrique de triplet réduit $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{15}\right)$. Le groupe de monodromie de la première est au plus d'indice 2 dans celui de la seconde ; ce dernier ne peut être fini puisqu'il contient un élément d'ordre 15. \square

Dans son ouvrage [Kle1884], Klein reprend les travaux de Schwarz, auxquels il apporte l'éclairage de la théorie de Galois. Il retrouve ainsi la liste de Schwarz en donnant une nouvelle approche des équations fuchsienues à monodromie finie :

Théorème IX.2.10. — *Considérons une équation fuchsienne sur $\mathbb{C}P^1$*

$$\frac{d^2v}{dx^2} + f \frac{dv}{dx} + gv = 0 \tag{E}$$

et supposons que le groupe de monodromie projective de l'équation (E) soit fini non abélien. Alors (E) est projectivement équivalente au relevé par une application rationnelle $\varphi(x)$ d'une équation hypergéométrique d'indices :

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right).$$

La démonstration est d'une simplicité remarquable.

Démonstration. — On considère le quotient $w = v_1/v_2$ de deux solutions indépendantes de l'équation (E) : c'est un biholomorphisme local multivalué

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \text{Sing}(E) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$$

dont la monodromie coïncide avec un des groupes finis D_n , A_4 , S_4 ou A_5 décrits plus haut. Ici, $\text{Sing}(E)$ désigne le lieu singulier de l'équation (E). En composant cette application w par l'application $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1/G$ de passage au quotient par le groupe G correspondant, on obtient un biholomorphisme local

$$\varphi : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \text{Sing}(E) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1/G$$

univalué qui, d'après l'étude locale aux singularités faite dans la section IX.1, s'étend par continuité sur $\text{Sing}(E)$: on obtient une application rationnelle $\varphi : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1/G \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. La structure projective induite sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \text{Sing}(E)$ par l'équation (E) est le relevé par $w(x)$ de la structure projective standard sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et par suite, le relevé par $\varphi(x)$ de la structure projective orbifold sur le quotient $\mathbb{C}\mathbb{P}^1/G$; pour chacun des groupes finis ci-dessus, la structure quotient a précisément 3 points coniques et est définie par une équation hypergéométrique dont les indices ont été décrits dans la section IX.2.8. \square

Cet énoncé reste évidemment vrai (avec la même démonstration) si (E) est une équation fuchsienne globalisable sur une courbe quelconque. Il permet par ailleurs de donner une toute autre démonstration du théorème de Schwarz en utilisant la combinatoire des revêtements ramifiés.

IX.3. Exemples de familles d'équations normales

Dans les paragraphes qui suivent nous donnons d'autres exemples d'équations normales, notamment dans le cas lisse (non orbifold). À chaque fois que les symétries de la courbe permettent de déterminer les paramètres accessoires, on observe que l'équation se ramène en fait à une équation hypergéométrique.

IX.3.1. Équation de Heun et sphère privée de 4 points

Comme pour l'hypergéométrique, on vérifie sans peine, en passant par la forme réduite, que toute équation fuchsienne sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ avec pôles en 0,

1, λ et ∞ est projectivement équivalente à l'équation de Heun

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-\lambda} \right) \frac{dv}{dx} + \frac{\delta x + c}{x(x-1)(x-\lambda)} v = 0$$

dont les indices aux points singuliers sont respectivement

$$\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1 \text{ et } \sqrt{(\alpha + \beta + \gamma - 1)^2 - 4\delta}.$$

L'équation normale associée à l'uniformisation de $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \lambda, \infty\}$ est donc projectivement équivalente à une équation de la forme

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-\lambda} \right) \frac{dv}{dx} + \frac{x+c}{x(x-1)(x-\lambda)} v = 0.$$

Ici, c est ce qu'on appelle le « paramètre accessoire » de l'équation. L'uniformisante $w(x)$ est donnée par le quotient de deux solutions indépendantes $w = v_1/v_2$ de l'équation pour une unique valeur de c . En effet, comme dans le cas lisse (voir proposition VIII.3.17) deux uniformisations $x : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \lambda, \infty\}$ vont induire la même structure projective sur $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \lambda, \infty\}$ et donc la même équation réduite

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left\{ \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-\lambda)^2} + \frac{2c + \lambda + 1 - x}{2x(x-1)(x-\lambda)} \right\} v = 0, \quad (\text{IX.12})$$

deux valeurs distinctes de c conduisent à deux équations réduites distinctes. On ne sait déterminer c de manière à obtenir l'équation uniformisante que dans des cas exceptionnels. Par exemple, lorsque $\lambda = -1$, la transformation de Möbius $\varphi(x) = -x$ permute les 4 points singuliers; l'équation uniformisante doit être invariante, ce qui nous donne $c = 0$: l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left\{ \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{x}{2x(x-1)(x+1)} \right\} v = 0$$

uniformise $\mathbb{CP}^1 \setminus \{-1, 0, 1, \infty\}$. Cette équation correspond bien sûr à l'équation hypergéométrique (IX.11) *via* le revêtement double (non ramifié)

$$x \in \mathbb{CP}^1 \setminus \{-1, 0, 1, \infty\} \mapsto x^2 \in \mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

De la même manière, lorsqu'une transformation affine φ d'ordre 3 permute les 3 points singuliers 0, 1 et λ , alors $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ et $c = -\frac{\lambda+1}{3}$. De nouveau, l'équation uniformisante passe au quotient sous l'action de $\varphi(x) = 1 - \frac{x}{\lambda}$ et on retrouve l'équation hypergéométrique uniformisant la sphère orbifold de indices $(\frac{1}{3}, 0, 0)$. Ce sont les deux seuls cas où l'on peut déterminer c par symétries. Par exemple, la transformation de

Möbius $\varphi(x) = \frac{\lambda}{x}$ permute elle aussi les 4 points singuliers, quelle que soit la valeur de λ ; on constate cependant que toute équation (IX.12) est laissée invariante par φ ce qui ne permet pas de déterminer c .

IX.3.2. Sphère privée de $r + 1$ points

Fixons plus généralement $r + 1$ points distincts sur \mathbb{CP}^1 . Supposons que l'un de ces points soit égal à l'infini et notons les autres a_1, \dots, a_r . Un calcul analogue à l'exemple précédent nous montre que l'équation uniformisante pour $\mathbb{CP}^1 \setminus \{a_1, \dots, a_r, \infty\}$ est de la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r \frac{1}{(x - a_j)^2} - \frac{Q(x)}{\prod_{j=1}^r (x - a_j)} \right\} v = 0, \quad (\text{IX.13})$$

où Q est un polynôme de degré $r - 2$ de terme dominant $\frac{r-1}{4}x^{r-2}$. Tous les autres coefficients de Q sont des « paramètres accessoires ».

Lorsque les points a_1, \dots, a_r sont permutés par une rotation affine φ d'ordre r , disons $\varphi(x) = \mu x$ et $a_i = \mu^i$ avec μ racine $r^{\text{ième}}$ de l'unité, alors l'invariance de l'équation uniformisante sous φ nous donne $Q(x) = \frac{(r-1)x^{r-2}}{4}$. Elle s'obtient aussi en relevant l'équation hypergéométrique d'indices $(\frac{1}{r}, 0, 0)$ par le revêtement ramifié $x \mapsto x^r$.

IX.3.3. Équation de Lamé et tore privé d'un point

Dans le cas d'une courbe X de genre 1, disons sous la forme de Legendre

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \quad (\text{IX.14})$$

l'équation uniformisante d'une structure projective avec une unique singularité orbifold au point $x = \infty$ est projectivement équivalente à l'équation de Lamé

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-\lambda} \right) \frac{dv}{dx} + \frac{c - \frac{n(n+1)}{4}x}{x(x-1)(x-\lambda)} v = 0.$$

L'indice de l'équation au point singulier (sur la courbe X) est $2n + 1$. C'est un cas particulier de l'équation de Heun, excepté qu'elle n'est pas considérée ici sur \mathbb{CP}^1 , mais sur son revêtement double elliptique X . Autrement dit, toute structure projective sur X avec singularité fuchsienne d'indice $2n + 1$ au point à l'infini provient, *via* le revêtement double

$$X \rightarrow \mathbb{CP}^1; (x, y) \mapsto x$$

d'une structure projective sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ singulière en $0, 1, \lambda$ et ∞ avec indices respectifs

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \text{ et } n + \frac{1}{2}.$$

L'équation devient non singulière à l'infini précisément lorsque $n = 0$ (ou $n = -1$, par symétrie de l'équation $n \mapsto -n - 1$). Pour $n = -\frac{1}{2}$, on obtient l'équation uniformisante pour la courbe affine $X \setminus \{\infty\}$ (c'est-à-dire pour la courbe projective X privée du point à l'infini). On parvient à déterminer le paramètre accessoire c dans les deux mêmes cas que ceux décrits dans la section IX.3.1 pour $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ privé de 4 points.

Lorsque $\lambda = -1$, la transformation de Möbius $\varphi(x) = -x$ nous fournit une symétrie de la courbe et donc de l'équation uniformisante : on trouve $c = 0$. L'application $(x, y) \mapsto x^2$ induit un revêtement ramifié $X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de degré 4 et notre équation de Lamé n'est autre que le relevé de l'équation hypergéométrique d'indices $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$.

De même, lorsque $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, la transformation $\varphi(x, y) = (1 - \frac{x}{\lambda}, y)$ définit un automorphisme d'ordre 3 de la courbe X qui nous permet de déterminer $c = \frac{\lambda+1}{48}$. En passant au quotient par le groupe d'ordre 6 engendré par φ et l'involution elliptique, on obtient l'équation hypergéométrique d'indices $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0)$.

IX.3.4. Courbes hyperelliptiques

Une équation normale sans point singulier sur la courbe hyperelliptique de genre g

$$y^2 = P(x), \quad P(x) = \prod_{j=1}^{2g+1} (x - a_j)$$

est projectivement équivalente à une unique équation de la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{P'(x)}{P(x)} \frac{dv}{dx} + \frac{A(x)y + B(x)}{P(x)} v = 0 \quad (\text{IX.15})$$

où A et B sont deux polynômes de degrés respectifs $\deg(A) \leq g - 3$ et $\deg(B) = 2g - 1$, le terme dominant de B étant $\frac{g(g-1)}{4} x^{2g-1}$. L'absence de terme de la forme $\frac{y}{(x-a_j)^2}$ dans le coefficient de v est la condition nécessaire et suffisante pour assurer l'absence de singularité logarithmique sur la courbe aux points de ramification. On vérifie ainsi que l'ensemble de ces équations normales est de dimension $3g - 3$ (et qu'elles ne dépendent que de la variable x pour $g \leq 2$).

Pour les deux courbes très symétriques

$$y^2 = x^{2g+1} - x \quad \text{et} \quad y^2 = x^{2g+1} - 1,$$

l'équation uniformisante est donnée par

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{g-1}{8(2g+1)} \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{j=1}^{2g+1} (x - a_j) \right).$$

C'est là encore un avatar de l'équation hypergéométrique.

Dans le cas

$$y^2 = x^{2g+1} - 1,$$

la projection $p : x \mapsto x^{2g+1}$ induit un revêtement ramifié (de degré $4g+2$) de la courbe hyperelliptique de genre g vers la sphère avec trois points coniques en $0, 1$ et ∞ , d'angles respectifs $\frac{2\pi}{2g+1}, \pi$ et $\frac{\pi}{2g+1}$. La figure IX.2 représente le cas du genre 2. L'unique équation uniformisante de type (IX.15) sur la courbe

$$y^2 = x^{2g+1} - 1$$

s'obtient en relevant l'équation hypergéométrique correspondante.

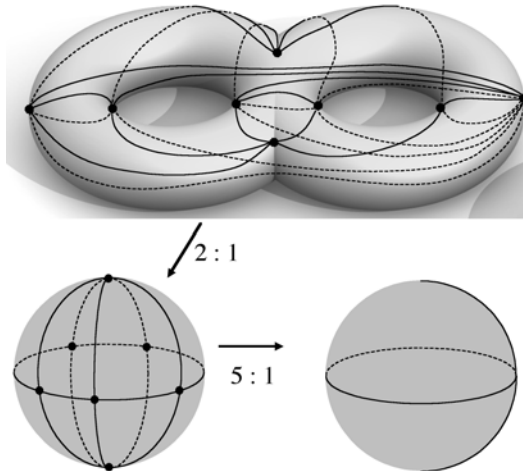


FIGURE IX.2. Revêtement ramifié de degré 10

Dans le cas

$$y^2 = x^{2g+1} - x,$$

la projection $p : x \mapsto x^{2g}$ induit un revêtement ramifié (de degré $4g$) de la courbe hyperelliptique de genre g vers la sphère avec trois points coniques en $0, 1$ et ∞ d'angles respectifs $\frac{\pi}{2g}, \frac{\pi}{g}$ et $\frac{\pi}{2g}$. L'unique équation uniformisante de type (IX.15) sur la courbe

$$y^2 = x^{2g+1} - x$$

s'obtient en relevant l'équation hypergéométrique correspondante.

IX.3.5. Courbes en tout genre

Dans le second tome des œuvres complètes de Schwarz, on trouve un ajout à [Schw1873], dans lequel il revient sur quelques points de l'article. Ces ajouts viennent après les travaux de Klein et ceux de Poincaré sur les fonctions fuchsienues. Schwarz commence par reformuler les différents cas étudiés en termes de géométrie hyperbolique et sphérique. Puis il évoque, sur quelques exemples, le fait majeur qui lui avait échappé dans [Schw1873], à savoir la propriété qu'ont les équations hypergéométriques de paramètres $\theta_i = \frac{1}{k_i}$ d'uniformiser de nombreuses courbes algébriques. En effet, dès qu'une courbe admet un revêtement $\pi : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ ramifiant précisément au-dessus de $0, 1$ et ∞ dont les fibres sont totalement ramifiées à l'ordre k_0, k_1 et k_∞ respectivement, alors l'équation uniformisante de la courbe X s'obtient en relevant par π l'équation hypergéométrique correspondante. Schwarz donne comme exemple la famille de courbes suivante, dont les exemples précédents sont tous des cas particuliers.

On considère la courbe X d'équation

$$y^m = x^n(1 - x^p)^q \tag{IX.16}$$

où $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$. La courbe X est irréductible si et seulement si $(m, n, q) = 1$ (m, n et q sont premiers entre eux).

En effet, la projection $(x, y) \mapsto x$ induit un revêtement ramifié⁽⁶⁾ $\pi : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ de degré m ; la monodromie autour de $x = 0$ et $x = 1$, respectivement donnée par $y \mapsto e^{2i\pi \frac{n}{m}}$ et $y \mapsto e^{2i\pi \frac{q}{m}}$, agit transitivement

6. Par abus de notation, X désigne ici la réunion disjointe des surfaces de Riemann associées aux composantes irréductibles de la courbe singulière.

sur la fibre dès lors que (n, q) est premier avec m . La partie lisse de la courbe X est alors connexe et, par suite, X est irréductible.

En composant π avec $\pi' : x \mapsto x^p$, on obtient un revêtement ramifié $\Pi : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de degré mp ramifiant précisément au-dessus des points $0, 1$ et ∞ . Au-dessus de $x = 0$, la courbe X possède exactement (m, n) branches dont un paramétrage local est donné par

$$t \mapsto \left(t^{\frac{m}{(m,n)}}, t^{\frac{n}{(m,n)}} u(t) \right)$$

où $u(0)$ est une racine (m, n) -ième de l'unité (qui dépend de la branche choisie). Sur chacune de ces branches, Π est donnée par $\Pi : t \mapsto t^{\frac{mp}{(m,n)}}$. Ainsi, la fibre de Π au-dessus de 0 est totalement ramifiée à l'ordre $\frac{mp}{(m,n)}$. Au dessus de $x = 1$, la courbe possède (m, q) branches paramétrées par $t \mapsto \left(1 + t^{\frac{m}{(m,q)}}, t^{\frac{q}{(m,q)}} u(t) \right)$ sur lesquelles $\Pi(t) = \left(1 + t^{\frac{m}{(m,q)}} \right)^p$ ramifie à l'ordre $\frac{m}{(m,q)}$. Le calcul est le même lorsque x parcourt les autres racines p ièmes de l'unité et la fibre de Π au-dessus de 1 est totalement ramifiée à l'ordre $\frac{m}{(m,q)}$. Un calcul similaire montre que la fibre au-dessus de ∞ est totalement ramifiée à l'ordre $\frac{mp}{(m,n+pq)}$ et l'équation uniformisante de la courbe X est le relevé par Π de l'équation hypergéométrique d'indices

$$(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty) = \left(\frac{(m, n)}{pm}, \frac{(m, q)}{m}, \frac{(m, n + pq)}{pm} \right).$$

La formule de Riemann-Hurwitz nous donne le genre de la courbe X :

$$g(X) = 1 + \frac{pm - (m, n) - p(m, q) - (m, n + pq)}{2}$$

ce qui, pour $m = 2k + 1$ et $n = p = q = 1$, nous donne $g(X) = k$. Nous obtenons ainsi des uniformisations explicites de courbes de genres arbitraires.

IX.3.6. Retour sur la quartique de Klein

Revenons sur la quartique de Klein (voir chapitre V) d'équation

$$X^3 Y + Y^3 Z + Z^3 X = 0$$

dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. La projection

$$(X : Y : Z) \mapsto (X^3 Y : Y^3 Z : Z^3 X)$$

induit alors un revêtement cyclique d'ordre 7 de la courbe sur

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \{(a : b : c) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 : a + b + c = 0\}.$$

On a $(Y/Z)^7 = ab^2/c^3$ et un point $(X : Y : Z)$ est complètement déterminé par le point $(a : b : c)$ et le choix d'une racine 7-ième Y/Z de ab^2/c^3 . En posant $y = Y/Z$ et $x = -b/c = -Y^3/Z^2X$, on obtient que la quartique de Klein est birationnellement équivalente à la courbe d'équation

$$F(x, y) = y^7 - x^2(x - 1) = 0.$$

C'est un cas particulier de la famille de courbes considérée dans la section précédente. L'équation uniformisante de cette courbe est projectivement équivalente à l'équation :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{12x^2 - x + 1}{49x^2(x-1)^2}v = 0.$$

De manière générale et malgré un siècle d'efforts, la plupart des cas connus d'uniformisation explicite se réduisent à l'équation hypergéométrique. Une exception notable est évoquée à la fin de ce chapitre. La difficulté du problème tient sans doute à la nature analytique réelle de la section uniformisante $S \rightarrow E_0(S)$ (voir section IX.5.1).

IX.4. Uniformisation des sphères privées de 4 points

La quartique de Klein est le premier exemple de surface de Riemann de genre au moins 2 pour laquelle le théorème d'uniformisation a été démontré. On a expliqué au chapitre VI que la théorie des groupes fuchsien permet d'uniformiser tout un ouvert de l'espace des modules des courbes (avec singularités orbifoldes) d'un genre g donné. Le premier exemple d'espace des modules pour lequel on sait démontrer que toute courbe est uniformisable est celui des sphères privées de 4 points. Dans ce cas Poincaré peut mettre en œuvre la méthode de continuité en toute rigueur. Dans cette section, nous suivons Poincaré pour démontrer ce cas particulier du théorème d'uniformisation en restant à un niveau élémentaire.

IX.4.1. Un espace de polygones

Reprenons le polygone donné dans l'exemple VI.2.2 avec $n = 3$: il y a 4 cycles

$$\{0\}, \{1\}, \{\infty\} \text{ et } \{x, y, z\}$$

(voir figure IX.3). Les générateurs du groupe Γ sont donnés par

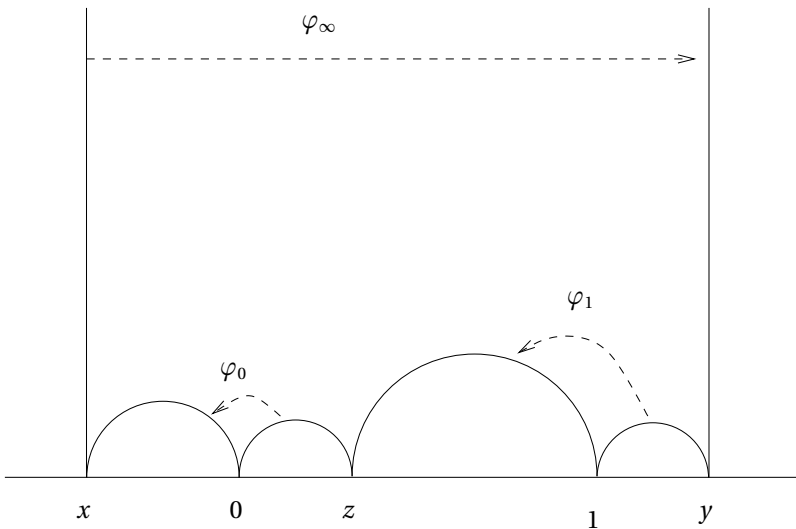


FIGURE IX.3. Polygone générateur

$$\varphi_0(w) = \frac{w}{1+rw}, \quad \varphi_1(w) = \frac{(1+s)w-s}{sw+(1-s)} \quad \text{et} \quad \varphi_\infty(w) = w-t$$

avec respectivement

$$r = \frac{1}{x} - \frac{1}{z}, \quad s = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{y-1} \quad \text{et} \quad t = x-y.$$

Le groupe Γ est donc déterminé, dans ce cas, par le polygone. Le sous-groupe d'isotropie du point x est engendré par $\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \varphi_\infty$; cette transformation est parabolique si et seulement si

$$x(1-z) = z(1-y). \tag{IX.17}$$

Les paramètres x, y et z sont réels, astreints aux conditions

$$x < 0 < z < 1 < y.$$

En fait, pour tout point (x, y) appartenant à l'espace des paramètres

$$T := \{(x, y); x < 0 \text{ et } 1 < y\},$$

le point $z = \frac{x}{1+x-y}$ (défini par la condition (IX.17)) satisfait automatiquement $0 < z < 1$: le quart de plan T est précisément l'espace des polygones de la forme précédente (où l'on a fixé $0, 1$ et ∞).

Le quotient de \mathbb{H} par le groupe Γ est la sphère de Riemann privée de 4 points, images respectives des cycles précédents, disons $0, 1, \infty$ et λ .

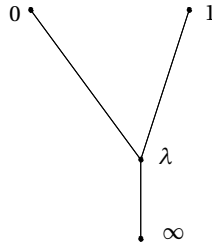


FIGURE IX.4. Le quotient (et ses coupures)

L'espace des paramètres pour le quotient est donc

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \ni \lambda.$$

Nous voulons montrer le théorème suivant de manière élémentaire en suivant Poincaré.

Théorème IX.4.1 (Uniformisation des sphères privées de 4 points)

L'application

$$\Pi : T \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}; (x, y) \mapsto \lambda$$

est surjective.

Nous savons déjà que l'application Π est continue (voir section VI.3.3). Il nous suffit de démontrer qu'elle est ouverte et fermée.

IX.4.2. Ouverture

Nous l'avons démontrée dans la section VIII.5.2 dans le cas d'une courbe lisse et complète de genre $g > 1$. Plutôt que de l'adapter au cas non compact qui nous intéresse ici, nous allons reprendre l'argument de Poincaré.

Le prix à payer est l'utilisation du théorème d'invariance du domaine qui sera démontré par Brouwer⁽⁷⁾ bien après les travaux de Poincaré,

7. Citons d'ailleurs le texte de Freudhental publié dans le livre du centenaire de Poincaré :

Le principe de continuité et la notion de variété topologique ont attiré l'attention de Brouwer, qui a su alors créer par sa démonstration de l'invariance du domaine les méthodes indispensables et fondamentales dont la Topologie s'est servie depuis lors jusqu'aujourd'hui.

mais qui était vraisemblablement admis comme une évidence par Poincaré lui-même : *si Π est une application continue entre deux variétés de même dimension et si elle est localement injective, alors elle est aussi localement surjective et donc ouverte.*

Maintenant, l'injectivité locale se démontre par le même argument que celui utilisé dans la preuve de la proposition VIII.3.17. Si deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de T ont même image λ , ceci signifie que les polygones P_1 et P_2 correspondants sont les domaines fondamentaux de deux uniformisations fuchiennes $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \lambda, \infty\}$. On a alors $\pi_2 = \pi_1 \circ \varphi$ pour un automorphisme φ de \mathbb{H} et les deux groupes sont conjugués. Autrement dit, P_1 et P_2 sont, à conjugaison près par φ , deux domaines fondamentaux du même groupe fuchsien. Maintenant, si P_1 et P_2 sont proches, φ va être proche de l'identité et $P_1 = P_2$.

IX.4.3. Fermeture

Pour terminer la démonstration du théorème IX.4.1, il nous reste à démontrer la fermeture de l'application Π . Considérons pour cela une suite de points λ_n dans l'image convergeant vers $\lambda_\infty \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ et démontrons que ce dernier est encore dans l'image de l'application. Par hypothèse, il existe une suite de polygones $P_n \in T$ tels que $\Pi(P_n) = \lambda_n$. Si la suite P_n possède une valeur d'adhérence P_∞ intérieure à T , alors on en déduira immédiatement, par continuité de Π , qu'une sous-suite de la suite λ_n convergera vers $\Pi(P_\infty)$; dans ce cas, $\lambda_\infty = \Pi(P_\infty)$ est dans l'image. Nous devons donc nous concentrer sur le cas où la suite P_n tend vers le bord de T .

Supposons par exemple que la coordonnée x correspondante tende vers 0; alors z tendra lui aussi vers 0 ou encore y tendra vers 1 (les deux cas n'étant pas exclusifs). Examinons en détail le premier cas. Supposons en outre, pour le moment, que y ait une valeur d'adhérence $1 < \hat{y} < \infty$. Alors le polygone P va tendre vers un polygone \hat{P} plus simple, n'ayant plus que pour sommets 0, 1, \hat{y} et ∞ . Les transformations φ_1 et φ_∞ vont tendre vers les transformations

$$\hat{\varphi}_1(w) = \frac{(1 + \hat{s})w - \hat{s}}{\hat{s}w + (1 - \hat{s})} \quad \text{et} \quad \hat{\varphi}_\infty(w) = w - \hat{t}$$

avec respectivement

$$\hat{s} = \frac{\hat{y}}{\hat{y} - 1} \text{ et } t = -\hat{y}.$$

Par contre, $r = \frac{y}{x} - 1$ va diverger et la transformation φ_0 aussi; oublions-la.

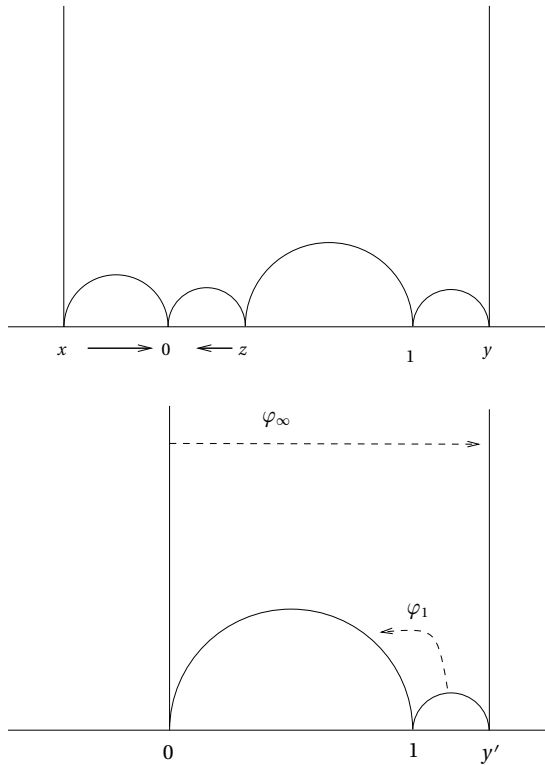


FIGURE IX.5. Polygone limite

Maintenant, pour que le groupe $\hat{\Gamma}$ engendré par $\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_\infty$ soit fuchsien, il faut et il suffit que

$$\hat{\varphi}_1 \circ \hat{\varphi}_\infty(w) = \frac{w}{(\hat{y} - 1)^2 - \hat{y} w}$$

soit parabolique, c'est-à-dire que $\hat{y} = 2$, ou encore

$$\frac{x}{z} \rightarrow -1.$$

Si tel est le cas, nous pouvons conclure de la manière suivante.

Lorsque le polygone P se rapprochera du polygone \hat{P} , le pavage induit par P coïncidera sur une boule $D(z_0, N)$ de plus en plus grande avec le pavage induit par le sous-groupe $\hat{\Gamma}$ engendré par $\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_\infty$. Ainsi, une fonction rationnelle f étant fixée, la différence entre les séries de Poincaré correspondantes

$$\theta(z) = \sum_{\varphi \in \Gamma} f \circ \varphi(z) \cdot (\varphi'(z))^v \quad \text{et} \quad \hat{\theta}(z) = \sum_{\varphi \in \hat{\Gamma}} f \circ \varphi(z) \cdot (\varphi'(z))^v$$

deviendra, d'après le lemme VI.4.2, négligeable de sorte que l'une et l'autre tendront vers la série $\hat{\theta}(z)$ correspondant au groupe limite $\hat{\Gamma}$ engendré par $\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_\infty$. De la continuité des fonctions fuchsiennes, on déduit la continuité de la courbe et de l'équation fuchsienne : lorsque P tendra vers \hat{P} , l'invariant $\lambda = \Pi(P)$ tendra vers 0 ; contradiction.

Dans le cas général, la suite de polygones P_n n'a aucune raison de converger vers le point $(x, y) = (0, 2)$ du bord de T lorsque x tend vers 0, ne serait-ce que par le manque d'unicité de la suite P_n . En effet, on peut facilement construire une telle suite de polygones, par modifications successives d'un polygone P_0 donné : cette suite tendra artificiellement vers le bord de T alors que l'image par Π sera constante. Afin d'éviter ce type d'avatars, Poincaré propose de choisir la suite P_n (relevant les λ_n) comme suit. On se donne une fonction d'exhaustion sur T , par exemple :

$$F(x, y) = -\frac{x(y-1)}{(1-x)y(y-1-x)}.$$

On vérifie sans peine que F est positive sur T , tend vers 0 lorsque l'on tend vers le bord de T et a pour unique maximum le point $(x, y) = (-1, 2)$ en lequel elle vaut $\frac{1}{8}$. Maintenant, on choisit pour chaque λ_n un point $P_n \in \Pi^{-1}(\lambda_n)$ qui maximise F , de sorte que l'on reste le plus loin possible du bord. Nous allons maintenant vérifier que si, malgré cela, la suite P_n tend vers le bord de T , x tendant vers 0, alors la coordonnée y tendra vers 2 et nous pourrons conclure à une contradiction.

Voyons d'abord comment modifier un polygone P sans modifier son image λ . Par exemple, découpons le polygone P le long de la géodésique joignant z à $l'∞$, puis translatons la partie à gauche par φ_∞ . Nous obtenons un nouveau polygone de sommets $z, 1, y, y-x, y-x+z$ et $∞$. Appliquons alors l'homographie $w \mapsto \frac{w-y+x}{w-1}$ pour ramener les nouveaux cycles $\{y-x\}, \{∞\}$ et $\{1\}$ respectivement sur $\{0\}, \{1\}$ et $\{∞\}$. Nous obtenons ainsi un nouveau polygone \hat{P} et nous appelons Φ la transformation

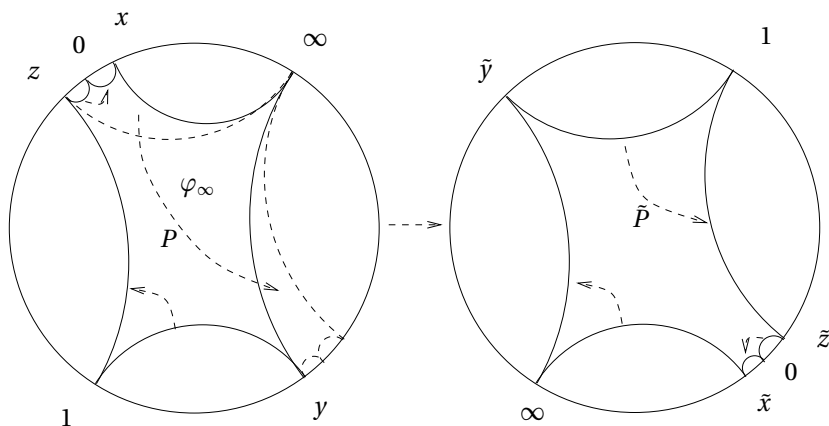


FIGURE IX.6. Modification du polygone

induite sur T par la modification $P \mapsto \tilde{P}$:

$$\Phi: T \rightarrow T; (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{y-1}, \frac{z-y+x}{z-1}, \frac{z}{y-x+z-1} \right).$$

En fait, Π n'est pas Φ -invariante mais Φ^2 -invariante : nous avons permuté les cycles et, si $\Pi(P) = \lambda$, alors $\Pi(\Phi(P)) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$. Mais ceci n'est pas gênant pour le problème qui nous occupe ici puisque si l'on sait uniformiser la courbe pour λ , alors on saura le faire pour $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ aussi.

Proposition IX.4.2. — *La transformation Φ précédemment définie est d'ordre infini et sans orbite périodique. Un domaine fondamental est donné par*

$$D = \{x+2 \leq y \leq -x+2\}.$$

Le long de chaque orbite, F est précisément maximale sur D .

Démonstration. — Considérons la fonction $G(x, y) = \frac{2-y}{x}$ qui nous donne, au signe près, la pente de la droite passant par $(x, y) \in T$ et le point $(0, 2)$ du bord. Alors la différence

$$G \circ \Phi - G = -\frac{x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 4y + 4}{x}$$

est strictement positive, bornée inférieurement par 2 ; cette borne est atteinte précisément le long de la droite $G(x, y) = -1$. On déduit immédiatement que Φ est sans point fixe et traverse une fois et une seule le domaine D défini par $-1 \leq G(x, y) \leq 1$ (excepté les points du bord).

Maintenant, un calcul pénible mais sans difficulté nous montre que $F \circ \Phi - F$ a le même signe sur T que $x + 2 - y$ de sorte que le domaine fondamental D maximise F pour chaque orbite sous Φ . \square

Ainsi, si une suite P_n , relevant λ_n et maximisant F , est telle que sa coordonnée x tende vers 0, alors la suite tendra nécessairement vers le point $(x, y) = (0, 2)$ du bord de T et l'on déduira une contradiction par l'argument vu ci-dessus. Plus généralement, si la suite P_n tend vers le bord de T , alors deux des sommets au moins se rapprochent infiniment et l'on pourra conclure de la même manière après permutation des sommets.

IX.4.4. Action du groupe modulaire

À la fin de son texte, Poincaré revient sur cet exemple pour donner plus de détails et notamment donner une description complète du revêtement T , ce que nous faisons maintenant. Pour préciser cela, introduisons deux autres modifications, à savoir la réflexion de Schwarz par rapport à la géodésique reliant z à ∞ d'une part, puis par rapport à la géodésique reliant y à 0 d'autre part.

On déduit de là deux involutions sur l'espace des polygones

$$\sigma_1 : T \rightarrow T ; (x, y, z) \mapsto (1 - y, 1 - x, 1 - z)$$

et

$$\sigma_2 : T \rightarrow T ; (x, y, z) \mapsto \left(\frac{z}{z-1}, \frac{y}{y-1}, \frac{x}{x-1} \right).$$

Le lieu des points fixes de σ_1 est la demi-droite $x + y = 1$. La réflexion de Schwarz qui conjugue P à $\sigma(P)$ va commuter aux groupes fuchsien correspondants et va descendre pour conjuguer les quotients. Puisqu'elle fixe ∞ et permute 0 et 1, il s'agit de la réflexion

$$\tilde{\sigma}_1 : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} ; \lambda \mapsto 1 - \bar{\lambda}$$

par rapport à la droite $\{\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}\}$. Autrement dit, l'application Π semi-conjugué σ_1 à $\tilde{\sigma}_1$. En particulier, les points fixes de σ_1 sont envoyés sur les points fixes de $\tilde{\sigma}_1$. De la même manière, l'involutions σ_2 fixe la demi-droite $y = 2$ point par point et est semi-conjuguée *via* Π à la réflexion

$$\tilde{\sigma}_2 : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} ; \lambda \mapsto \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1}$$

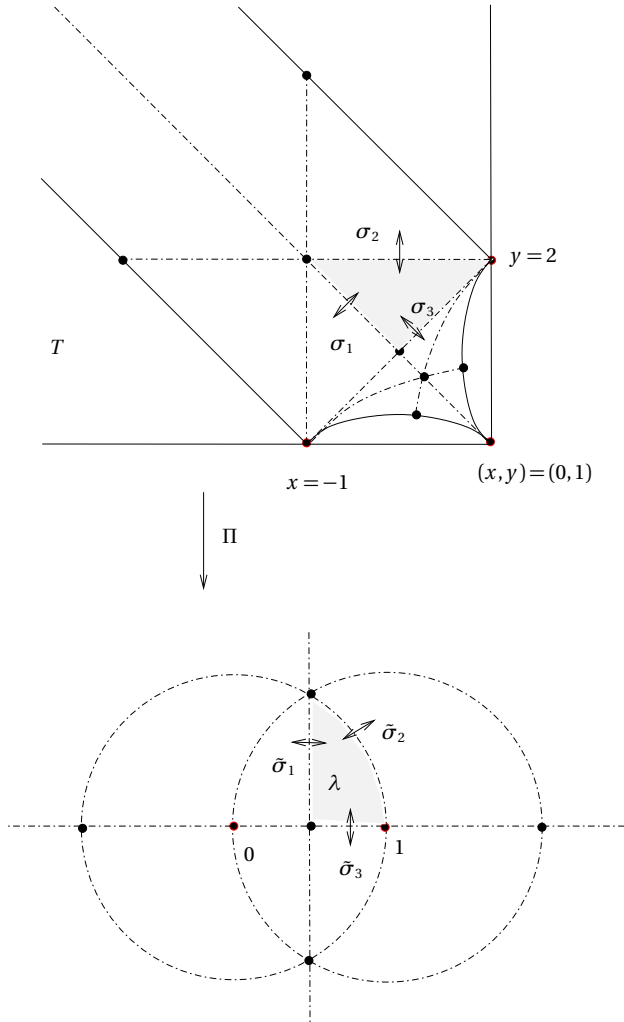


FIGURE IX.7. Action du groupe modulaire

par rapport au cercle $\{|\lambda - 1| = 1\}$. Aussi, Π envoie la demi-droite $y = 2$ dans ce cercle. Enfin,

$$\sigma_3 := \sigma_2 \circ \Phi : T \rightarrow T ; (x, y, z) \mapsto \left(\frac{z}{1+x-y}, \frac{x-y+z}{1+x-y}, \frac{x}{1+x-y} \right)$$

est aussi une involution, fixant le segment $y = x+2$ point par point, semi-conjuguée à la réflexion

$$\tilde{\sigma}_3 : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} ; \lambda \mapsto \bar{\lambda}$$

par rapport à l'axe réel.

L'action du groupe $H := \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$ engendré par les involutions précédentes sur T est en fait conjuguée à l'action du groupe de réflexions du triangle hyperbolique d'angles $0, \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$ sur \mathbb{H} par un homéomorphisme. L'application T semi-conjuge cette action à celle du groupe de réflexions $\tilde{H} := \langle \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3 \rangle$ d'ordre 12 sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Le sous-groupe $H' = \langle \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3, \sigma_1\sigma_3 \rangle$ d'indice 2 dans H qui préserve l'orientation est quant à lui conjugué à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$; on a $(\sigma_1\sigma_2)^2 = (\sigma_1\sigma_3)^3 = \mathrm{Id}$ et $\Phi = \sigma_2\sigma_3$. Le sous-groupe G d'indice 12 dans H qui laisse Π (ou λ) invariant correspond à l'action du groupe modulaire de la sphère avec 4 points marqués $(0, 1, \infty$ et $\lambda)$ sur T . Il est engendré par Φ^2 et Ψ^2 où $\Psi = (\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1\sigma_3)$ et est conjugué au sous-groupe $\Gamma(2) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ d'indice 6 des matrices congrues à I modulo 2. La figure IX.7 nous donne un domaine fondamental pour G ainsi que le sous-pavage induit par H .

Les sommets du pavage sont des polygones possédant des symétries; ils sont envoyés vers des positions tout aussi symétriques de λ . Ainsi on déduit les uniformisations explicites suivantes (qui se ramènent chacune à des groupes de triangles par revêtement fini)

$$T : \begin{cases} \left(-1, 2, \frac{1}{2}\right) & \mapsto \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) & \mapsto \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En fait, le pavé hachuré en haut dont les points précédents sont deux sommets (voir figure IX.7) est envoyé sur le pavé hachuré en bas. En effet, les points fixes de σ_i sont envoyés sur des points fixes de $\tilde{\sigma}_i$, $i = 1, 2, 3$; il suffit donc de vérifier que lorsqu'on tend vers le troisième sommet $(0, 2, 0) \in \partial T$ dans le pavé du haut, alors l'image par Π tend vers 1 en bas. Mais c'est précisément l'argument que nous avons développé ci-dessus. Nous en déduisons que l'application $\Pi : T \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ est un revêtement galoisien de groupe G .

IX.5. Postérité

IX.5.1. Uniformisation des variétés algébriques complexes

En reprenant la vision de Poincaré du théorème d'uniformisation mais en considérant cette fois des familles analytiques de courbes algébriques et leurs familles d'équations normales associées, Griffiths [Gri1971] a pu

démontrer le beau théorème suivant, généralisation méconnue⁽⁸⁾ d'une version faible du théorème d'uniformisation à des variétés algébriques complexes de dimension quelconque.

Théorème IX.5.1. — *Soit V une variété algébrique complexe, quasi-projective, lisse et irréductible de dimension n . Étant donné un point $x \in V$, il existe un voisinage U de x ouvert pour la topologie de Zariski tel que le revêtement universel \tilde{U} de U soit homéomorphe à une boule et biholomorphe à un domaine borné de \mathbb{C}^n .*

Citons Griffiths :

all known complete proofs of [the uniformisation theorem] seem to be potential-theoretic and offer very little insight in just how to explicitly locate the Fuchsian D.E.,

et Griffiths de proposer alors de considérer une famille analytique $\pi : U \rightarrow B$ de courbes algébriques (de telle manière que chaque pré-image $\pi^{-1}(b)$ soit une courbe algébrique C_b). Au-dessus de B on peut former le fibré affine holomorphe

$$\mathbf{E} \rightarrow B$$

dont la fibre \mathbf{E}_b est l'espace $E(C_b)$ des équations normales sur la courbe C_b . L'équation fuchsienne donne une section

$$f : B \rightarrow \mathbf{E}$$

de ce fibré. Cette section est localement définie comme la préimage de la sous-variété analytique réelle $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(S)$ de la variété complexe $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S)$ l'espace des classes de conjugaisons de représentation du groupe fondamental $\pi_1(S)$ de la surface topologique sous-jacente à C_b par l'application holomorphe $\text{Mon}_S : E \rightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S)$ de monodromie (voir section VIII.5). Par suite, l'application f est analytique réelle et Griffiths pose le problème de caractériser f comme solution d'une équation différentielle explicite. Une solution satisfaisante semble apportée par Hitchin dans [Hit1987].

Pour des raisons analogues le point de vue de Poincaré sur l'uniformisation a plus généralement éveillé de l'intérêt en géométrie algébrique abstraite, notamment depuis les années 70 et les premiers travaux d'Ihara [Iha1974] sur l'uniformisation p -adique jusqu'au travaux récents

8. Merci à J.-B. Bost de nous avoir signalé cette référence.

de Mochizuki [Moc1999]. Pour conclure nous revenons sur l'approche de Poincaré en nous plaçant sur un corps quelconque.

IX.5.2. Uniformisation algébrique

Soient k un corps de caractéristique zéro et X une courbe algébrique irréductible sur k . Notons $k(X)$ le corps des fonctions de X et fixons x une fonction non constante dans $k(X)$. Soit $R = k(X)[d/dx]$ l'anneau des opérateurs différentiels sur X ; nous noterons $D = d/dx$ et $v' = dv/dx$. Une *équation différentielle* sur X est une équation de la forme $Lv = 0$ avec $L \in R$; pour simplifier nous parlerons alors de l'équation L .

Une formulation équivalente consiste à penser une équation différentielle comme un module à gauche M sur R engendré par un élément v : on pose $M = R/RL$ et $v = 1 + RL \in M$. On peut alors parler du produit tensoriel $(M \otimes_{k(X)} N, v \otimes w)$ de deux équations différentielles (M, v) , (N, w) . L'action de $D = d/dx$ sur $(M \otimes_{k(X)} N, v \otimes w)$ est donnée par $D(p \otimes q) = (Dp) \otimes q + p \otimes (Dq)$.

À l'aide de ces définitions on peut reformuler le point de vue de Poincaré sur l'uniformisation, au-dessus du corps de base k . Une équation différentielle $D^n + f_1 D^{n-1} + \dots + f_n$ est dite *fuchsienne* si elle vérifie les deux points suivants.

1. En un point $p \in X$ qui n'est ni un pôle ni un point critique de x , la fonction f_i a au plus un pôle d'ordre i .
2. En un autre point p , la même propriété est vraie lorsque l'on remplace x par une fonction qui n'a ni pôle, ni point critique en p .

La définition ci-dessus ne dépend pas du choix de x .

Il découle de la démonstration du théorème de Fuchs que la classe des équations fuchiennes est stable par produit tensoriel. Enfin deux équations différentielles (M, v) et (N, w) sont dites *projectivement équivalentes* s'il existe une équation différentielle du premier ordre (A, a) telle que

$$(M, v) \cong (N, w) \otimes (A, a).$$

Soit $L = D^2 + fD + g$ une équation différentielle du second ordre. Pour tout $a \in k(X)$, il existe une unique équation différentielle de la forme $D^2 + aD + b$ projectivement équivalente à L . Pour $a = 0$, on obtient $D^2 + (g - f'/2 - f^2/4)$, voir proposition VIII.3.4. Le théorème d'uniformisation peut alors être reformulé de la manière suivante.

Théorème IX.5.2. — Pour toute courbe X sur \mathbb{C} , il existe une unique fonction $h \in \mathbb{C}(X)$ telle que le quotient de deux solutions de l'équation différentielle

$$v'' + hv = 0 \tag{IX.18}$$

soit l'application développante d'une structure hyperbolique sur X . L'équation (IX.18) est fuchsienne.

On dit alors de l'équation (IX.18) qu'elle est l'équation uniformisante de la courbe X . La question naturelle suivante semble toujours ouverte.

Question : quelles sont les courbes X définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont l'équation uniformisante est également définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$?

La réponse à cette question est connue pour une classe particulière de courbes algébriques déjà uniformisées : les surfaces arithmétiques. Rappelons brièvement la construction de celles d'entre elles qui sont dites *rationnelles*, que Poincaré introduit pour la première fois dans [Poin1887] et dont les groupes fuchsien associés sont historiquement les premiers groupes fuchsien construits.

Soit A une algèbre de quaternions sur \mathbb{Q} . Supposons $A \otimes \mathbb{R} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'algèbre des matrices réelles 2×2 . Soit \mathcal{O} un ordre dans A et \mathcal{O}^1 les éléments de norme (réduite) 1. Alors \mathcal{O}^1 est un groupe fuchsien dans $SL(2, \mathbb{R})$ et tout groupe fuchsien arithmétique rationnel dans $SL(2, \mathbb{R})$ est commensurable au sens large à un tel groupe. Rappelons que deux sous-groupes d'un même groupe sont dits *commensurables* si leur intersection est d'indice fini dans chacun d'entre eux et qu'ils sont *commensurables au sens large* si l'un est commensurable à un conjugué de l'autre. Deux réseaux arithmétiques rationnels dans $SL(2, \mathbb{R})$ associés à des algèbres de quaternions A_1 et A_2 sont commensurables au sens large si et seulement si A_1 et A_2 sont isomorphes [MaRe2003].

Le théorème suivant est un corollaire d'un théorème d'Ihara [Iha1974, théorème A].

Théorème IX.5.3. — Soit $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$ un groupe fuchsien arithmétique rationnel. Alors la courbe $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ et son équation uniformisante sont toutes deux définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ un ordre maximal dans l'algèbre de quaternions A associée au groupe Γ . Shimura [Shi1959] a montré que $\mathcal{O}^1 \backslash \mathbb{H}$ est l'espace des modules des surfaces abéliennes à multiplication

par \emptyset ; il est en particulier défini sur \mathbb{Q} . La courbe X est donc définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Il reste à étudier l'équation uniformisante.

Soit g un élément rationnel et de norme 1 dans A . Les groupes Γ et $g\Gamma g^{-1}$ sont commensurables, notons $X_0 = (g\Gamma g^{-1} \cap \Gamma)\backslash\mathbb{H}$, $X_1 = X$, $X_2 = g\Gamma g^{-1}\backslash\mathbb{H}$ et considérons le diagramme de revêtements galoisiens finis :

$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X_1 & & X_2. \end{array} \tag{IX.19}$$

Soit L_i ($i = 0, 1, 2$) l'équation uniformisante de X_i . L'équation L_0 est obtenue en relevant par p_i ($i = 1, 2$) l'équation L_i .

Puisque les éléments rationnels de A sont denses dans A et que le seul sous-groupe de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$ qui contient Γ est $SL(2, \mathbb{R})$ lui-même, on peut choisir g de telle manière que le groupe engendré par Γ et g soit dense dans $SL(2, \mathbb{R})$. On peut alors caractériser l'équation uniformisante L_0 comme étant la seule équation fuchsienne sur X_0 invariante par les groupes des revêtements p_1 et p_2 à équivalence projective près. En effet, une équation fuchsienne sur X_0 invariante par les groupes des revêtements p_1 et p_2 diffère de l'équation uniformisante par une différentielle quadratique holomorphe $q(z)dz^2$ invariante par un sous-groupe dense de $SL(2, \mathbb{R})$, ce qui force immédiatement $q \equiv 0$.

Les revêtements p_1 et p_2 étant évidemment définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on en déduit immédiatement que l'équation uniformisante de X_0 (et donc celle de X) est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. □

Tous les exemples où nous avons pu déterminer explicitement l'équation uniformisante d'une courbe se ramènent au cas de l'équation hypergéométrique et donc à un groupe fuchsien commensurable à un groupe de triangle. Dans le paragraphe suivant nous discutons brièvement un exemple différent. Mais avant cela citons la conjecture suivante, due à Krammer [Kram1996], qui apporterait une réponse à la question ci-dessus.

Conjecture IX.5.4. — *Soit $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ une courbe et soit L son équation uniformisante. Alors, X et L peuvent être toutes les deux définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement si Γ est arithmétique ou commensurable à un groupe de triangle.*

IX.5.3. Un dernier exemple

Pour conclure remarquons que dans [Kram1996], Krammer utilise l'idée de la démonstration du théorème IX.5.3 pour calculer explicitement l'équation uniformisante d'une surface arithmétique particulière. Nous présentons quelques points de sa remarquable construction à titre de comparaison avec les approches de Poincaré et Ihara.

Krammer considère un groupe fuchsien cocompact $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ arithmétique rationnel tel que la courbe $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ soit isomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ avec 4 points coniques d'ordre respectifs 2, 2, 2 et 6. Notons que le revêtement double ramifiant sur ces 4 points est une courbe elliptique orbifold avec un unique point conique d'ordre 3.

Partons donc de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ avec trois points coniques 0, 1 et $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ d'ordre 2 et le point ∞ conique d'ordre e . L'équation uniformisante est projectivement équivalente à l'équation de Lamé (avec $P(x) = x(x-1)(x-a)$) :

$$P(x)v'' + \frac{1}{2}P'(x)v' + \left(C - \frac{n(n+1)}{4}x \right) v = 0, \quad (\text{IX.20})$$

où $n = \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$ et C est le paramètre accessoire à déterminer. Dans notre cas $e = 6$, il faut déterminer le point a à partir du groupe (soit trouver l'équation algébrique de X) et il s'agira de déterminer C pour que l'équation soit l'équation uniformisante.

Dans l'esprit de la démonstration du théorème IX.5.3, Krammer considère un élément g rationnel et de norme 1 dans A et le diagramme (IX.19) correspondant. Il parvient à choisir g de telle manière que :

1. les applications p_1 et p_2 soient de degré 3 ;
2. la courbe X_0 (comme $X_1 = X$ ou X_2) soit de genre 0 ;
3. l'élément g agisse sur X_0 comme une involution ; et
4. il existe des points $x_1, \dots, x_8 \in X_0$, $y_1, \dots, y_4 \in X_1$ tels que p_1 ne ramifie qu'au-dessus des points y_i , g permute les x_i à part x_2 et x_4 selon le tableau suivant, où n_i désigne l'indice de ramification de p_1 en x_i .

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(x_i)$	x_8	?	x_5	?	x_3	x_7	x_6	x_1
n_i	1	2	1	2	1	1	1	3
$p_1(x_i)$	y_1	y_1	y_2	y_2	y_3	y_3	y_3	y_4

(IX.21)

La combinatoire du tableau (IX.21) est suffisante pour déterminer les équations algébriques des applications $p_1 : X_0 \rightarrow X_1$ et $g : X_0 \rightarrow X_0$. On peut prendre $X_0 = X_1 = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et supposer $x_2 = y_1 = 0$, $x_4 = y_2 = 1$ et $x_8 = y_4 = \infty$. Commençons par vérifier que cela détermine p_1 complètement. Puisque p_1 est de degré 3 et fixe 0 avec ramification de degré 2 et fixe $l'\infty$, avec ramification de degré 3, on a $p_1(x) = ax^2 + bx^3$. Enfin puisque $p_1(1) = 1$ et $p_1'(1) = 0$, on obtient les valeurs de a et b , soit

$$p_1(x) = 3x^2 - 2x^3.$$

On a donc $x_1 = 3/2$, $x_3 = -1/2$ et g échange $3/2$ et ∞ , $-1/2$ et x_5 , x_6 et x_7 . Après translation de $3/2$, on obtient une involution de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ qui échange 0 et ∞ , -2 et $x_5 - 3/2$, $x_6 - 3/2$ et $x_7 - 3/2$. Cette involution est nécessairement de la forme $x \mapsto p/x$ et l'on trouve

$$-2 \left(x_5 - \frac{3}{2} \right) = \left(x_6 - \frac{3}{2} \right) \left(x_7 - \frac{3}{2} \right). \tag{IX.22}$$

Par ailleurs, puisque $p_1(x_5) = p_1(x_6) = p_1(x_7)$, les nombres x_6 et x_7 sont les solutions en t , différentes de x_5 , de l'équation $p_1(t) = p_1(x_5)$, soit

$$\begin{aligned} 3t^2 - 2t^3 = 3x_5^2 - 2x_5^3 &\Leftrightarrow (t - x_5)(3(t + x_5) - 2(t^2 + tx_5 + x_5^2)) = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 + (t + x_5) \left(x_5 - \frac{3}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$(t - x_6)(t - x_7) = t^2 + (t + x_5) \left(x_5 - \frac{3}{2} \right)$$

pour tout t . En prenant $t = 3/2$ et en utilisant (IX.22), on trouve

$$-2 \left(x_5 - \frac{3}{2} \right) = \left(\frac{3}{2} - x_6 \right) \left(\frac{3}{2} - x_7 \right) = \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(x_5 + \frac{3}{2} \right) \left(x_5 - \frac{3}{2} \right) = x_5^2$$

soit

$$x_5^2 + 2x_5 - 3 = 0.$$

Puisque $x_5 \neq x_4 = 1$, on trouve $x_5 = -3$, $y_3 = p_1(-3) = 81$, $p = -2(x_5 - 3/2)$ et x_6, x_7 sont racines de $2t^2 - 9t + 27 = 0$. On rassemble ces résultats dans le tableau suivant.

i	1	2	3	4	5	6,7	8
x_i	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	-3	$\frac{3}{4}(3 \pm \sqrt{15})$	∞
$p_1(x_i)$	0	0	1	1	81	81	∞

Retournons maintenant à l'équation (IX.20). On a $e = 6$ et $a = 81$. Il reste à déterminer C . C'est là que la symétrie supplémentaire donnée par

g devient cruciale. On demande que les équations obtenues en relevant l'équation (IX.20) par les applications p_1 et $p_2 = g \circ p_1$ soient projectivement équivalentes. À l'aide d'un ordinateur Krammer a vérifié que cela force $C = -1/2$.

Krammer obtient ainsi le théorème suivant, premier exemple à notre connaissance qui ne soit pas un avatar de l'équation hypergéométrique ; la méthode d'Ihara est employée de manière systématique par Elkies sur plusieurs autres exemples du même type (courbe de Shimura rationnelle avec 4 points coniques) dans [Elk1998]. Ce sont, à notre connaissance, les seuls exemples où l'on sache explicitement déterminer l'équation uniformisante.

Théorème IX.5.5. — *L'équation différentielle fuchsienne*

$$P(x)v'' + \frac{1}{2}P'(x)v' + \frac{x-9}{18}v = 0,$$

où $P(x) = x(x-1)(x-81)$ est l'équation uniformisante de la courbe elliptique $y^2 = P(x)$ orbifoldes avec un point conique d'ordre 3 (à l'infini). Son groupe n'est pas commensurable à un groupe de triangle.

Démonstration. — Il reste à démontrer que le groupe de l'équation que nous avons obtenu n'est pas commensurable à un groupe de triangle. Mais les groupes de triangles arithmétiques sont tous classifiés par Takeuchi [Tak1977] et leurs algèbres de quaternions sont différentes de celle considérée par Krammer. \square

Intermezzo

L'uniformisation des surfaces et l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$

Avant de nous intéresser au théorème d'uniformisation général, nous voulons présenter une approche alternative de l'uniformisation des surfaces de Riemann algébriques, dont la paternité doit vraisemblablement être attribuée à Schwarz. Il semble en effet que ce soit à l'initiative de ce dernier que la société royale de Sciences de Göttingen a décidé d'attirer l'attention des mathématiciens sur les liens entre l'uniformisation des surfaces et la résolution de l'équation $\Delta u = ke^u$. Voici une traduction approximative du sujet du concours proposé par cette société savante en 1890 [Got1890, page IX] :

Le problème de la représentation conforme d'un domaine plan [*i.e.* un domaine du plan complexe ou d'une surface de Riemann étalée au-dessus du plan complexe] sur une portion d'une surface courbe de courbure constante égale à k est relié au problème de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k e^u$$

avec valeurs aux bord et singularités prescrites.

Pour ce dernier problème, on doit s'intéresser en premier lieu aux valeurs au bord et aux singularités spécifiées par Riemann dans sa théorie des fonctions abéliennes.

La Société royale souhaite obtenir une réponse complète à la question suivante : est-il possible d'intégrer l'équation différentielle ci-dessus sur un

domaine donné, avec des valeurs au bord et des singularités d'un certain type prescrites, sous l'hypothèse que la constante k a une valeur négative.

En particulier, la Société royale souhaite voir traité la question ci-dessus dans le cas où le domaine plan considéré est une surface de Riemann fermée à plusieurs feuillettes, et où la fonction u ne doit admettre que des singularités logarithmiques⁽¹⁾.

Expliquons un peu. Si on a un biholomorphisme f entre un domaine S du plan complexe et un domaine du disque unité \mathbb{D} , alors on peut tirer en arrière sur S la métrique de Poincaré de \mathbb{D} ; on obtient ainsi une métrique conformément équivalente à la métrique euclidienne, c'est-à-dire de la forme $g = e^u dz d\bar{z}$. Par ailleurs, g est à courbure constante égale à -1 , ce qui se traduit par le fait que la fonction u vérifie l'équation $\Delta u = 2e^u$. Ceci se généralise au cas où D est une surface de Riemann étalée au-dessus du plan, et où f n'est pas un biholomorphisme global, mais l'inverse multiforme d'une fonction fuchsienne. La seule différence est que la fonction u aura alors des singularités aux points de ramifications de D . Ainsi : si une surface de Riemann D étalée au-dessus du plan est uniformisée par le disque, alors cette surface porte une solution de l'équation $\Delta u = 2e^u$ avec des singularités d'un certain type aux points de ramification de D . La réciproque de cet énoncé est également vraie ; on voit donc tout l'intérêt que peut avoir la résolution de l'équation $\Delta u = 2e^u$ pour l'uniformisation des surfaces.

1. *Die Aufgabe der conformen Abbildung eines ebenen Bereiches auf ein Stück einer krummen Fläche, deren Krümmungsmass überall den constanten Werth k besitzt, hängt zusammen mit der Aufgabe, die partielle Differentialgleichung*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k e^u$$

vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemäss zu integrieren.

Für diese Aufgabe kommen zunächst die von Riemann in seiner Theorie der Abelschen Functionen angegebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen in Betracht.

Die Königliche Gesellschaft wünscht die Frage, ob es möglich ist, die angegebene partielle Differentialgleichung für einen gegebenen Bereich unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen der angegebenen Art zu integrieren, vorausgesetzt, dass der Konstanten k negative Werthe beigelegt werden, vollständig beantwortet zu sehen.

Insbesondere wünscht die Königliche Gesellschaft den Fall der angeführten Aufgabe behandelt zu sehen, in welchen der betrachtete eben Bereich, eine geschlossene mehrfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist, während die Function u keine anderen als logarithmische Unstetigkeiten annehmen soll.

Le problème posé par la Société royale de Göttingen n'attendra guère pour être résolu : Picard en publie une solution dès 1890 dans [Pic1890]. Dans ce mémoire, Picard ne montre cependant l'existence de solutions à l'équation $\Delta u = ke^u$ (avec singularités d'un certain type) que dans le cas d'un domaine borné de $\mathbb{C}^{(2)}$. Il éprouvera par ailleurs le besoin de revenir sur sa preuve à plusieurs reprises pour en éclaircir certains points : en 1893 [Pic1893c, Pic1893b, Pic1893a], en 1898 [Pic1898], et en 1905 [Pic1900]. Il nous semble que ce dernier article contient une preuve complète et rigoureuse de l'existence et l'unicité de solutions à l'équation $\Delta u = ke^u$ avec singularités logarithmiques prescrites sur une surface de Riemann fermée quelconque. On trouve un exposé complet et très clair de cette preuve dans [Pic1931, chapitre 4].

En 1898, Poincaré publie à son tour un mémoire en réponse à la question de la Société royale de Göttingen [Poin1898]⁽³⁾. Le mémoire de Poincaré est intitulé *Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$* ; cependant, contrairement à ce que son titre laisse supposer, ce mémoire ne traite pas vraiment de l'équation $\Delta u = e^u$; et c'est là un de ses principaux intérêts ! En effet, l'équation $\Delta u = ke^u$ n'a de sens que sur un domaine de $\overline{\mathbb{C}}$, ou sur une surface de Riemann S étalée au-dessus de $\overline{\mathbb{C}}$. Pour relier cette équation à l'existence d'une uniformisante sur une surface S , on doit donc choisir une coordonnée méromorphe sur S (qui permet de voir S étalée au-dessus de $\overline{\mathbb{C}}$), et chercher des solutions de l'équation ayant des singularités aux points de ramifications et sur la fibre de l'infini. Dans son mémoire, Poincaré remplace cette équation par une autre qui ne fait intervenir que des objets définis de manière intrinsèque sur S : l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$.

Dans ce chapitre, nous allons suivre pas à pas le mémoire de Poincaré. Ce sera l'occasion de découvrir une nouvelle face de son génie. Précédemment nous avons admiré la puissance créatrice de Poincaré, capable de bâtir *ex nihilo* un nouvel univers mathématique peuplé de groupes fuchsien, de fonctions automorphes et de structures projectives, ainsi que son incroyable faculté à manipuler des concepts extrêmement abstraits. Ce qui ravit le lecteur du mémoire de 1898, c'est au contraire

2. Picard affirme que le cas d'une surface de Riemann fermée ne présente pas de difficulté supplémentaire, mais – comme il le reconnaîtra plus tard – c'est très largement exagéré.

3. Dans son mémoire, Poincaré dit clairement que la question a été résolue par Picard en 1890... puis fait comme si la solution de Picard n'existait pas.

la capacité de Poincaré à résoudre un problème d'analyse difficile en n'utilisant que des arguments parfaitement élémentaires. Recherche de solutions sous forme de séries, majoration des termes, convergence normale, etc., on a parfois l'impression de lire la solution d'un problème du concours d'entrée à une grande école d'ingénieur! Mais à la fin de son mémoire, Poincaré a obtenu un résultat – l'existence de solutions à l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$ et l'existence de métriques à courbure prescrite sur les surfaces compactes – qui reste non trivial un siècle plus tard! Et, si les techniques utilisées par Poincaré sont très classiques, le fait que Poincaré s'attache à remplacer l'équation $\Delta u = 2e^u$ par l'équation intrinsèque $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$ est par contre très moderne.

Remarque X.0.6. — Malgré l'injustice historique que cela constitue, nous avons choisi de ne pas parler des travaux de Picard, pour ne rendre compte que de ceux de Poincaré. Plusieurs raisons nous ont poussé à faire ce choix. Tout d'abord, comme nous l'avons déjà mentionné, Picard a fort bien expliqué sa méthode de résolution de l'équation $\Delta u = ke^u$ dans son livre [Pic1931, chapitre 4]; il aurait été ridicule de recopier ici cet ouvrage classique. Par ailleurs, la preuve de Picard repose sur une utilisation judicieuse du *procédé alterné de Schwarz*; cette technique joue un rôle majeur dans les chapitres IV et XI; nous avons donc préféré « varier les plaisirs » en présentant la preuve de Poincaré qui utilise des arguments un peu différents. Enfin, l'article de Poincaré nous a semblé plus novateur que celui de Picard : d'une part, parce que Poincaré construit une version intrinsèque de l'équation $\Delta u = ke^u$ alors que Picard continue à travailler « dans une coordonnée méromorphe », et d'autre part, parce que la preuve de Poincaré est purement globale contrairement à celle de Picard⁽⁴⁾.

4. Citons l'analyse que Poincaré fera de ses propres travaux à la demande de Mittag-Leffler [Poin1921] :

M. Picard l'a intégrée le premier [Poincaré parle de l'équation $\Delta u = ke^u$]. La méthode que j'ai proposée est entièrement différente [...]. Ce qui caractérise ma méthode et la distingue de celle de M. Picard, c'est qu'elle embrasse tout de suite la totalité de la surface de Riemann, tandis que M. Picard considère d'abord un domaine limité, et étend ensuite ses résultats de proche en proche jusqu'à ce qu'ils soient établis pour la surface entière.

X.1. L'uniformisation des surfaces et l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$

Nous allons commencer par détailler les différents liens entre l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$ et l'uniformisation des surfaces.

X.1.1. De l'existence d'une uniformisante à l'existence d'une solution de l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi_g$

Soit S une surface de Riemann. On suppose que S est uniformisée par le disque; autrement dit, on suppose qu'il existe un biholomorphisme $F : \mathbb{D} \rightarrow \tilde{S}$ (où \tilde{S} est le revêtement universel de S), et on note $f : \mathbb{D} \rightarrow S$ l'application induite par F .

Les automorphismes du revêtement $f : \mathbb{D} \rightarrow S$ sont des biholomorphismes du disque \mathbb{D} , c'est-à-dire des éléments de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Mais les éléments de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ sont non seulement des automorphismes de la structure holomorphe de \mathbb{D} , mais aussi des isométries de la métrique hyperbolique standard sur \mathbb{D} . On peut donc pousser, *via* f , la métrique hyperbolique standard du disque \mathbb{D} , et obtenir ainsi une métrique riemannienne⁽⁵⁾ sur la surface S .

Dans une coordonnée. — Considérons une coordonnée holomorphe locale $z : U_z \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert de S (la coordonnée z n'a pas besoin d'être injective sur U_z , on veut simplement que ce soit une immersion holomorphe; typiquement, on choisit une fonction méromorphe $z : S \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et on se restreint à l'ouvert U_z où z prend une valeur finie et a une dérivée non nulle). Dans cette carte, la métrique hyperbolique de \mathbb{D} poussée par f s'écrit

$$g_{\text{hyp}} = 4 \frac{\left| \frac{df^{-1}}{dz} \right|^2}{(1 - |f^{-1}|^2)^2} dz d\bar{z}$$

(l'inverse f^{-1} de f est bien sûr multiforme, mais l'expression ci-dessus ne dépend pas du choix de la détermination). En particulier, la métrique g_{hyp} est conformément équivalente à la métrique $dz d\bar{z}$. On note alors

5. En fait, cette métrique riemannienne, vue comme un objet intrinsèque sur S , n'apparaît jamais explicitement dans l'article de Poincaré. Par contre, Poincaré choisit des coordonnées holomorphes locales sur S dont les domaines de définition recouvrent S , et considère dans chacune de ces coordonnées, la formule de la métrique obtenue en poussant la métrique hyperbolique par f .

e^{u_z} le facteur conforme qui relie ces deux métriques. Autrement dit, on considère la fonction $u_z : U_z \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$e^{u_z} = 4 \frac{\left| \frac{df^{-1}}{dz} \right|^2}{(1 - |f^{-1}|^2)^2}.$$

On a alors

$$u_z = \log 4 + \log \frac{df^{-1}}{dz} + \log \frac{d\overline{f^{-1}}}{d\overline{z}} - 2 \log \left(1 - f^{-1} \overline{f^{-1}} \right)$$

et donc, en tenant compte du fait que f^{-1} est holomorphe et $\overline{f^{-1}}$ anti-holomorphe,

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{2 \frac{df^{-1}}{dz} \frac{d\overline{f^{-1}}}{d\overline{z}}}{\left(1 - f^{-1} \overline{f^{-1}} \right)^2} = \frac{1}{2} e^{u_z}.$$

Par conséquent, la fonction $u_z : U_z \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de l'équation

$$\Delta_z u = 2e^u \tag{X.1}$$

où $\Delta_z = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$ est l'opérateur de Laplace associé à la coordonnée z .

Un point de vue intrinsèque. — L'apport le plus important de l'article de Poincaré par rapport à ceux de Picard est d'introduire un point de vue intrinsèque. Pour ce faire, on munit la surface S d'une métrique riemannienne g compatible avec sa structure complexe⁽⁶⁾ (voir la sous-partie III.1.1). On va ainsi pouvoir comparer deux objets globaux définis sur S : les métriques riemanniennes g_{hyp} (obtenue en poussant par f la métrique hyperbolique du disque) et g .

Pour toute coordonnée holomorphe locale z définie sur un ouvert U_z de S , on considère la fonction $\sigma_z : U_z \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$dz d\overline{z} = e^{\sigma_z} g$$

(autrement dit e^{σ_z} est le facteur conforme reliant les métriques $dz d\overline{z}$ et g).

6. Poincaré appelle cela une « *métrique isotrope* ». Notons qu'à l'époque, l'existence de telles métriques était loin d'être évidente (la notion de partition de l'unité n'avait pas été inventée !); Poincaré dit que cela découle des travaux de Schwarz et Klein, et que « *la démonstration est assez longue* ». Il pense d'ailleurs pouvoir utiliser des métriques *anisotropes*, mais commet une erreur grossière à cet endroit (son expression de l'opérateur de Laplace-Beltrami dans une coordonnée locale n'est valable que pour une métrique compatible avec la structure complexe).

Si z_1 et z_2 sont deux cartes holomorphes locales, alors, sur l'intersection des domaines de définitions de ces cartes :

$$\Delta_{z_2} = \left| \frac{dz_1}{dz_2} \right|^2 \Delta_{z_1}, \tag{X.2}$$

et donc

$$e^{\sigma_{z_1}} \Delta_{z_1} = e^{\sigma_{z_2}} \Delta_{z_2}.$$

Par conséquent, il existe un opérateur $\Delta_g : C^2(S, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(S, \mathbb{R})$ tel que, sur le domaine de toute carte locale holomorphe z de S , on a :

$$\Delta_g = e^{\sigma_z} \Delta_z.$$

L'opérateur Δ_g est bien sûr l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique riemannienne g .

Par ailleurs, les métriques riemanniennes g_{hyp} et g sont conformément équivalentes. Autrement dit, il existe une fonction $u_g : S \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$g_{\text{hyp}} = e^{u_g} g.$$

Pour toute coordonnée holomorphe locale z , on a les deux relations $g_{\text{hyp}} = e^{u_z} dz d\bar{z} = e^{u_g} g$ et $dz d\bar{z} = e^{\sigma_z} g$. Par conséquent,

$$u_g = u_z + \sigma_z$$

sur le domaine de définition de la coordonnée z .

Pour toute coordonnée holomorphe locale z , il vient alors :

$$\begin{aligned} \Delta_g u_g &= \Delta_g u_z + \Delta_g \sigma_z \\ &= e^{\sigma_z} \Delta_z u_z + \Delta_g \sigma_z \\ &= 2e^{\sigma_z} e^{u_z} + \Delta_g \sigma_z \\ &= 2e^{u_g} + \Delta_g \sigma_z. \end{aligned}$$

Ce calcul montre que la quantité $\Delta_g \sigma_z$ ne dépend pas du choix de la coordonnée holomorphe locale z . Autrement dit, il existe une fonction $\varphi_g : S \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, sur le domaine de toute carte holomorphe locale z de S , on a :

$$\varphi_g = -\frac{1}{2} \Delta_g \sigma_z = -\frac{1}{2} e^{\sigma_z} \Delta_z \sigma_z$$

(la raison du facteur $\frac{1}{2}$ apparaîtra plus tard). Surtout, le calcul ci-dessus montre que la fonction $u_g : S \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de l'équation

$$\Delta_g u = 2e^u - 2\varphi_g. \tag{X.3}$$

En résumé, Poincaré a montré :

Proposition X.1.1. — Soit S une surface de Riemann. On munit S d'une métrique riemannienne g compatible avec sa structure complexe, et on considère la fonction $\varphi_g : S \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute coordonnée holomorphe locale z , on a $dzd\bar{z} = e^{\sigma_z} g$ et $\varphi_g = -\frac{1}{2}\Delta_g \sigma_z$ sur le domaine de définition de z . Si la surface S est uniformisée par le disque, alors l'équation (X.3) admet une solution $u : S \rightarrow \mathbb{R}$.

X.1.2. Comment retrouver une uniformisante à partir d'une solution de l'équation $\Delta_g u = 2e^u - 2\varphi_g$

Considérons à nouveau une surface de Riemann S , munie d'une métrique riemannienne g compatible avec la structure complexe. On suppose que cette surface est uniformisée par le disque, et on note $f : \mathbb{D} \rightarrow S$ une uniformisante (on rappelle que f est unique à composition par un élément de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ près). On suppose par ailleurs que l'équation $\Delta_g u = 2e^u - 2\varphi_g$ admet une unique solution $u_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$. Le but de ce paragraphe est d'expliquer – comme le fait Poincaré – comment on peut retrouver l'uniformisante f à partir de u_0 et de g .

On choisit une fonction méromorphe $z_0 : S \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; on note U_{z_0} le domaine de S où z_0 est finie et est un difféomorphisme local. On note $\sigma_{z_0} : U_{z_0} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $dz_0 d\bar{z}_0 = e^{\sigma_{z_0}} g$. On sait (corollaire VIII.3.7) que l'inverse (multiforme) de la fonction f s'obtient comme quotient

$$f^{-1} = \frac{v_2}{v_1}$$

de deux fonctions multiformes $v_1, v_2 : S \rightarrow \mathbb{C}$ formant une base de solutions d'une équation fuchsienne qui, dans la coordonnée z_0 , s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2 v}{dz_0^2} = \sigma v \tag{X.4}$$

où la fonction $\sigma : S \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est uniquement déterminée (c'est la dérivée schwarzienne de f , mais ceci n'intervient pas ici). La fonction f ne dépend pas (à composition par un élément de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ près) du choix de la base de solutions (v_1, v_2) . Trouver f revient donc à trouver la fonction σ .

Dans chaque coordonnée holomorphe locale z définie sur un ouvert U_z de S , on considère les fonctions u_z, σ_z et u_g définies comme au paragraphe X.1.1. On a montré ci-dessus que la fonction u_g est solution de l'équation (X.3). Puisque, par hypothèse, u_0 est l'unique solution de cette

équation, $u_0 = u_g$. Par suite

$$e^{u_0 - \sigma_{z_0}} = 4 \frac{\left| \frac{df^{-1}}{dz_0} \right|^2}{(1 - |f^{-1}|^2)^2}.$$

En tenant compte de l'égalité $f^{-1} = v_2/v_1$, on en déduit

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}(u_0 - \sigma_{z_0})} &= \frac{1}{2} \left| \frac{df^{-1}}{dz_0} \right|^{-1} (1 - |f^{-1}|^2) \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{\frac{dv_2}{dz_0} v_1 - \frac{dv_1}{dz_0} v_2}{v_1^2} \right|^{-1} \left(1 - \left| \frac{v_2}{v_1} \right|^2 \right) \\ &= \frac{(|v_1|^2 - |v_2|^2)}{2 \left(\frac{dv_2}{dz_0} v_1 - \frac{dv_1}{dz_0} v_2 \right)}. \end{aligned}$$

Le dénominateur de cette expression est le double du wronskien de la base de solutions (v_1, v_2) . Ce wronskien est constant (puisque l'équation (X.4) n'a pas de coefficient en $\frac{dv}{dz_0}$) et, comme on peut choisir arbitrairement la base de solutions (v_1, v_2) , on peut supposer qu'il est égal à $\frac{1}{2}$. On a alors

$$e^{-\frac{1}{2}(u_0 - \sigma_{z_0})} = |v_1|^2 - |v_2|^2 = v_1 \bar{v}_1 - v_2 \bar{v}_2.$$

Comme \bar{v}_1 et \bar{v}_2 sont anti-holomorphes, il vient

$$\frac{d^2 e^{-\frac{1}{2}(u_0 - \sigma_{z_0})}}{dz_0^2} = \frac{d^2 v_1}{dz_0^2} \bar{v}_1 - \frac{d^2 v_2}{dz_0^2} \bar{v}_2$$

et, en utilisant l'équation (X.4),

$$\frac{d^2 e^{-\frac{1}{2}(u_0 - \sigma_{z_0})}}{dz_0^2} = \sigma e^{-\frac{1}{2}(u_0 - \sigma_{z_0})},$$

ou encore

$$\sigma = -\frac{1}{2} \frac{d^2(u_0 - \sigma_{z_0})}{dz_0^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{d(u_0 - \sigma_{z_0})}{dz_0} \right)^2.$$

Ainsi, connaissant l'unique solution u_0 de l'équation (X.3) et le facteur conforme σ_{z_0} entre la métrique g et la métrique $dz_0 d\bar{z}_0$, on peut trouver l'équation fuchsienne qui donne l'uniformisante f .

En conclusion, si on sait résoudre l'équation (X.3) sur la surface S , alors on peut trouver l'unique fonction candidate à être une uniformisante de S (mais on ne sait pas, à ce stade, *prouver* que cette unique fonction candidate uniformise effectivement S).

Bien entendu, le sens précis de l'expression « trouver l'unique fonction candidate à être une uniformisante de S » dépend du sens que l'on donne à l'expression « résoudre l'équation (X.3) ». Notons cependant que, si l'on sait calculer par un moyen quelconque une approximation numérique de l'unique solution de l'équation (X.3), les formules ci-dessus permettent d'en déduire une approximation de l'uniformisante.

X.1.3. Pourquoi l'existence de solution à l'équation $\Delta_g u = 2e^u - 2\varphi_g$ démontre le théorème d'uniformisation

Nous allons maintenant expliquer pourquoi, étant donnée une surface de Riemann compacte S , l'existence d'une solution à l'équation (X.3) pour une certaine métrique g sur S implique que S est uniformisée par le disque. Ce fait n'apparaît pas explicitement dans l'annonce du concours de la Société royale des sciences de Göttingen, ni dans les mémoires de Picard⁽⁷⁾. Poincaré semble en être parfaitement conscient⁽⁸⁾; il ne le justifie cependant à aucun moment. En fait, Poincaré est peut-être moins intéressé par un résultat général abstrait d'existence d'uniformisantes, que par la possibilité de construire des uniformisantes. Ne l'oublions pas : Poincaré considère que Klein et lui-même ont déjà démontré quinze ans plus tôt, par la méthode de continuité, que les surfaces de Riemann algébriques sont uniformisables⁽⁹⁾; par contre, il souligne le fait que la méthode de continuité est « *extrêmement compliquée et a un caractère indirect* », et ne permet aucunement de construire une uniformisante pour une surface donnée.

7. Picard se contente de dire à plusieurs reprises que la résolution $\Delta u = e^u$ est d'une importance capitale pour la théorie des fonctions fuchsienues.

8. Dans l'introduction de son mémoire, il écrit :

L'intégration de cette équation conduirait en effet directement à la solution du problème qui nous occupe. [établir qu'il existe toujours une équation fuchsienne, donc une uniformisante].

9. Extrait de l'introduction de [Poin1898] :

La première démonstration qui ait été donnée est fondée sur ce qu'on appelle la *méthode de continuité*. Nous y avons été conduits, M. Klein et moi, d'une façon indépendante. Dans mon Mémoire sur les *groupes des équations linéaires* [...] j'ai donné [...] un exposé complet de la méthode; je n'ai plus à y revenir. Je crois être arrivé à donner à cette méthode une forme parfaitement rigoureuse.

Commençons par interpréter l'équation (X.3) en termes de courbure. Soit S une surface de Riemann, g une métrique riemannienne sur S compatible avec la structure complexe, et $\varphi_g : S \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie à la fin de la sous-partie X.1.1.

Rappelons tout d'abord que, si D est un domaine ouvert de \mathbb{C} et $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , alors la courbure de Gauss de la métrique riemannienne $e^u dz d\bar{z}$ sur D est égale à

$$-\frac{1}{2}e^{-u}\Delta_z u$$

(ceci découle d'un calcul explicite, voir par exemple [Jos2002]). On en déduit que, si z est une coordonnée holomorphe locale définie sur un ouvert U_z de S , et $u_z : U_z \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , la fonction u_z est solution de l'équation

$$\Delta_z u = 2e^u$$

si et seulement si la courbure de Gauss de la métrique $e^{u_z} dz d\bar{z}$ est constante égale à -1 . Sur l'ouvert U_z , on peut écrire $g = e^{-\sigma_z} dz d\bar{z}$, et on a alors $-\varphi_g = \frac{1}{2}e^{\sigma_z}\Delta_z \sigma_z$ (voir sous-partie X.1.1). La formule ci-dessus montre alors que $-\varphi_g$ n'est autre que la courbure de Gauss de la métrique g .

Soit maintenant $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Pour toute coordonnée holomorphe locale z définie sur un ouvert U_z de S , on note $u_z : U_z \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $u_z = u - \sigma_z$. En remontant les calculs de la sous-partie X.1.1, on vérifie facilement que u est solution de l'équation (X.3) si et seulement si, pour toute carte holomorphe locale z , la fonction u_z est solution de l'équation (X.1). Par ailleurs, pour toute carte holomorphe locale z , on a, sur le domaine de la carte, $e^u g = e^{u_z} dz d\bar{z}$.

La discussion ci-dessus montre :

Proposition X.1.2. — *Soit $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . La fonction u est solution de l'équation (X.3) si et seulement si la courbure de Gauss de la métrique $e^u g$ est constante égale à -1 .*

Cette interprétation en termes de courbure permet de montrer que le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann algébriques découle de l'existence de solutions à l'équation (X.3) :

Proposition X.1.3. — *Soit S une surface de Riemann compacte de caractéristique d'Euler strictement négative. On munit S d'une métrique*

riemannienne g compatible avec sa structure complexe. On suppose que l'équation

$$\Delta_g u = 2e^u - \varphi$$

admet une solution pour toute fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ d'intégrale strictement positive. Alors le revêtement universel de S est biholomorphe au disque.

Démonstration. — Soit $\varphi_g : S \rightarrow \mathbb{R}$ l'opposé de la courbure de Gauss de la métrique g . D'après le théorème de Gauss-Bonnet, comme S est supposée de caractéristique d'Euler strictement négative, l'intégrale de φ_g est strictement positive. L'équation $\Delta_g u = 2e^u - 2\varphi_g$ admet donc une solution $u : S \rightarrow \mathbb{R}$. D'après la proposition X.1.2, la métrique $e^u g$ est alors à courbure de Gauss constante, égale à -1 . D'après le théorème de Hopf-Rinow, cette métrique est complète. Le revêtement universel de S muni du relevé de la métrique riemannienne $e^u g$ est donc une surface simplement connexe munie d'une métrique riemannienne complète de courbure constante -1 . Mais il n'existe à isométrie près qu'une seule telle surface : le disque \mathbb{D} muni de la métrique hyperbolique standard. Par conséquent, le revêtement universel de S muni du relevé de la métrique $e^u g$ est isométrique au disque muni de la métrique hyperbolique. On conclut que le revêtement universel de S est biholomorphe au disque \mathbb{D} (puisque la métrique $e^u g$ est compatible avec la structure complexe de S). \square

X.2. Comment Poincaré résout l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$

Dans la suite, on considère une surface de Riemann algébrique⁽¹⁰⁾ compacte S . Étant donnée une métrique riemannienne g sur S compatible avec la structure complexe, on cherche à intégrer l'équation

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi \tag{X.5}$$

où $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement positive donnée (par exemple, θ constante égale à 2 si on veut uniformiser la surface S) et $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'intégrale strictement positive donnée.

La stratégie de Poincaré pour intégrer l'équation (X.5) peut se résumer comme suit. On part d'une équation que l'on sait intégrer explicitement.

10. Rappelons que toute surface de Riemann compacte est algébrique. L'algébricité de S permet cependant de construire explicitement des 1-formes méromorphes à pôles prescrits sur S , que Poincaré utilise dans sa preuve.

Puis on gagne du terrain : on essaie d'intégrer les équations « voisines » à coups de développements en séries, en essayant de s'approcher peu à peu de (X.5). Voyons un peu plus en détails comment Poincaré procède :

1. On s'intéresse tout d'abord à l'équation $\Delta_g u = -\varphi$.
 - (a) La surface S étant supposée algébrique, on sait trouver (explicitement) des fonctions méromorphes à pôles prescrits sur S . En considérant les parties réelles de ces fonctions, on trouve des fonctions harmoniques à singularités prescrites sur S .
 - (b) On montre alors que l'on peut intégrer l'équation de Poisson $\Delta_g u = -\varphi$ pour toute fonction φ d'intégrale nulle. Pour ce faire, on construit une « fonction de Green » à l'aide des fonctions harmoniques trouvées précédemment ; les solutions de l'équation $\Delta_g u = -\varphi$ sont données sous forme d'une intégrale faisant intervenir φ et cette fonction de Green.
2. Puis on s'intéresse à l'équation $\Delta_g u = \eta u - \varphi$.
 - (a) On montre tout d'abord que l'on peut intégrer l'équation $\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi$ pour toutes fonctions η et φ données, pourvu que le réel λ soit suffisamment petit. Pour ce faire, on développe formellement la solution éventuelle de l'équation sous forme d'une série $u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$, on montre que les u_i sont solutions d'équations de Poisson (que l'on a appris à résoudre au point 1), et que la série converge pour λ suffisamment petit.
 - (b) Puis, on montre (avec un développement en série) que, si on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \lambda_0 \eta u - \varphi$ pour un certain λ_0 , alors on sait aussi intégrer l'équation $\Delta_g u = (\lambda_0 + \lambda) \eta u - \varphi$ pourvu que $\lambda < \lambda_0$.
 - (c) Des deux points précédents, on tire facilement que l'on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi$ pour tout $\lambda > 0$. En particulier, on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \eta u - \varphi$.
3. Enfin, on considère l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$.
 - (a) On commence par remarquer que l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$ admet une solution évidente (constante) si φ est proportionnelle à θ .
 - (b) Puis on montre par un nouveau développement en série, que si l'on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi_0$ pour

une certaine fonction φ_0 , alors on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - (\varphi_0 + \lambda\psi)$ pour toute fonction ψ et pour λ assez petit.

- (c) Des deux points précédents, on déduit que l'on peut intégrer l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$ dès lors que la fonction φ est partout positive.
- (d) Il ne reste plus qu'à appliquer une astuce élémentaire pour passer du cas où la fonction φ est partout positive, au cas où elle est seulement positive en moyenne.

Tout cela peut sembler quelque peu laborieux ; mais il ne faut pas oublier que Poincaré n'avait pas à sa disposition la belle machinerie moderne des distributions, des injections de Sobolev, de la compacité faible, de la régularité elliptique, etc. En fait, pour chaque équation qu'il envisage, Poincaré exhibe une solution, soit sous la forme d'un produit de convolution avec une fonction de Green, soit sous la forme d'une série convergente dont chaque terme est solution d'une équation « plus simple » (*i.e.* que l'on savait intégrer auparavant). L'article de Poincaré ayant été oublié, il faudra attendre 1971 pour que M. S. Berger réussisse à prouver par des méthodes modernes (c'est-à-dire à coups de distributions, d'injections de Sobolev, de compacité faible, et de régularité elliptique) l'existence d'une solution à l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$ sur une surface compacte ! (voir l'encadré à la fin de ce chapitre).

Remarque X.2.1. — Il peut être amusant de noter la similarité entre la stratégie que Poincaré adopte ici, et celle qu'il avait déployée 15 ans plus tôt, dans son article de 1884 sur l'uniformisation des surfaces algébriques par la méthode de continuité (voir chapitre VIII). Ici, afin d'intégrer l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$, Poincaré part d'une équation aux dérivées partielles dont il connaît une solution explicite, puis se déplace dans l'ensemble des équations aux dérivées partielles en se frayant un chemin parmi les équations qu'il arrive à intégrer, jusqu'à atteindre l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$. Dans son article sur la méthode de continuité, Poincaré partait d'une surface algébrique qu'il savait uniformiser explicitement, puis se déplaçait dans l'espace des modules des surfaces algébriques en se frayant un chemin parmi les surfaces qu'il arrivait à uniformiser, jusqu'à atteindre la surface algébrique qui l'intéressait.

Nous allons maintenant suivre pas à pas le cheminement de Poincaré vers la construction de l'unique solution de l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$.

X.2.1. Résolution de l'équation $\Delta_g u = -\varphi$

La première étape de la stratégie de Poincaré consiste à intégrer l'équation de Poisson

$$\Delta_g u = -\varphi \tag{X.6}$$

où $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 donnée et $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue. Poincaré commence par une remarque : la surface S étant fermée, la formule de Stokes implique que l'intégrale sur S de $\Delta_g u$ est nulle pour toute fonction $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ (de classe C^2) ; pour que l'équation (X.6) puisse admettre une solution, il est donc nécessaire que l'intégrale de la fonction φ soit nulle. Puis il s'attache à montrer que cette condition nécessaire est suffisante :

Proposition X.2.2. — *Quelle que soit $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et d'intégrale nulle, on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation*

$$\Delta_g u = -\varphi.$$

Pour construire les solutions de l'équation (X.6), Poincaré va « introduire une fonction qui jouera le même rôle que la fonction de Green dans la théorie du potentiel ». Autrement dit, par analogie avec la situation dans l'espace euclidien, on va chercher une « fonction de Green » $G : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, quelle que soit la fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et d'intégrale nulle, la fonction $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par l'expression

$$u(p) = \int_S G(p, q) \varphi(q) dv_g(q)$$

soit solution de l'équation (X.6).

Dans l'espace euclidien de dimension 2, les solutions de l'équation de Poisson sont données par cette formule avec $G(p, q) = \log(\|p - q\|)$. Sur la surface S , le plus naturel serait de construire une fonction G telle que pour tout $q \in S$, la fonction $p \mapsto G(p, q)$ soit harmonique sur $S \setminus \{q\}$ et possède une singularité logarithmique en q . Malheureusement, on sait – au moins depuis Riemann – que les surfaces compactes ne portent pas de fonction harmonique avec un seul pôle logarithmique. On sera donc contraint de travailler avec une fonction G telle que la fonction partielle

$p \mapsto G(p, q)$ possède deux singularités logarithmiques : l'une au point q , et l'autre en un point fixe q_0 .

Démonstration de la proposition X.2.2. — On suppose fixée une fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et d'intégrale nulle.

On fixe un point $p_0 \in S$. On va construire une fonction $u_{p_0} : S \rightarrow \mathbb{R}$ qui sera solution de l'équation de Poisson (X.6), et qui s'annulera au point p_0 . On peut observer dès maintenant que les autres solutions de l'équation (X.6) s'obtiendront à partir de u_0 par l'ajout d'une constante arbitraire. En effet, la différence de deux (éventuelles) solutions de l'équation (X.6) est une fonction harmonique sur S , et les seules fonctions harmoniques sur une surface fermée sont les fonctions constantes.

Soit q_0 un point de S distinct de p_0 . Pour tout point $q \in S \setminus \{q_0\}$, on considère l'unique 1-forme méromorphe $\omega_{q_0, q}$ sur S qui vérifie les conditions suivantes (voir proposition II.2.8) :

- d'une part, $\omega_{q_0, q}$ a deux pôles d'ordre un de résidus respectifs -1 et $+1$ situés aux points q_0 et q , et elle n'a pas d'autre pôle ;
- d'autre part, les parties réelles de toutes les périodes de $\omega_{q_0, q}$ sont nulles ; autrement dit, la partie réelle de l'intégrale de $\omega_{q_0, q}$ le long d'une courbe fermée dans S est nulle.

On considère alors la fonction G_{p_0, q_0} , définie sur l'ensemble des couples $(p, q) \in (S \setminus \{q_0\})^2$ tels que $p \neq q$, par la formule suivante :

$$G_{p_0, q_0}(p, q) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_{p_0, p}} \omega_{q_0, q} \right)$$

où $\gamma_{p_0, p}$ est un chemin quelconque joignant le point p_0 au point p , en évitant les points q_0 et q . On remarquera que la quantité $G_{p_0, q_0}(p, q)$ ne dépend pas du choix du chemin $\gamma_{p_0, p}$ puisque les parties réelles des périodes de $\omega_{q_0, q}$ sont nulles, et puisque l'intégrale d'une 1-forme méromorphe le long d'une petite courbe fermée entourant un pôle simple est purement imaginaire. La proposition II.2.9 implique que cette quantité satisfait les propriétés suivantes :

- la fonction $(p, q) \mapsto G_{p_0, q_0}(p, q)$ est analytique en ses deux variables et harmonique en la variable p sur $\{(p, q) \mid p \neq q_0, p \neq q\}$;
- si on a un ouvert d'adhérence compacte U de $S \setminus \{q_0\}$, et une coordonnée holomorphe locale z sur U , alors, pour $(p, q) \in U^2$,

$p \neq q$, on peut écrire dans la coordonnée z

$$G_{p_0, q_0}(p, q) = H(p, q) + \frac{1}{2\pi} \log|p - q| \tag{X.7}$$

où H est une fonction définie sur $U \times U$ (y compris sur la diagonale $p = q$), analytique en ses deux variables, et harmonique en la variable p .

On peut maintenant définir une fonction $u_{p_0} : S \setminus \{q_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, candidate à être solution de l'équation (X.6), par :

$$u_{p_0}(p) := \int_S G_{p_0, q_0}(p, q) \varphi(q) dv_g(q). \tag{X.8}$$

On vérifie immédiatement que l'intégrale ci-dessus est bien convergente. En effet, la surface S est compacte, la fonction $q \mapsto \varphi(q)$ est de classe C^1 sur S , la fonction $q \mapsto G_{p_0, q_0}(p, q)$ est continue sur $S \setminus \{p\}$, et la singularité de cette fonction en p est logarithmique.

La formule (X.8) ci-dessus n'a pas de sens lorsque $p = q_0$; on montrera cependant plus tard que la fonction u_{p_0} définie par la formule (X.8) se prolonge en q_0 , et que la fonction prolongée ne dépend pas du choix du point q_0 .

On doit maintenant prouver que la fonction u_{p_0} définie ci-dessus vérifie l'équation (X.6). Pour ce faire, on considère un ouvert d'adhérence compacte U de $S \setminus \{q_0\}$, suffisamment petit pour qu'on dispose d'une coordonnée holomorphe locale z sur U . Pour $p \in U$, on décompose alors $u_{p_0}(p)$ comme une somme de trois termes :

$$\begin{aligned} u_{p_0}(p) &= \int_{S \setminus U} G_{p_0, q_0}(p, q) \varphi(q) dv_g(q) + \int_U H(p, q) \varphi(q) dv_g(q) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_U \log|p - q| \varphi(q) dv_g(q) \end{aligned}$$

où H est définie par l'égalité (X.7). Le premier terme est une fonction analytique et harmonique de la variable p . En effet, la fonction $(p, q) \mapsto G_{p_0, q_0}(p, q)$ est analytique en ses deux variables et harmonique en la variable p sur $U \times (S \setminus U)$. Par suite, la fonction $p \mapsto \int_{S \setminus U} G_{p_0, q_0}(p, q) \varphi(q) dv_g(q)$ est analytique sur U , et pour tout $p \in U$, on a :

$$\Delta_g \left(\int_{S \setminus U} G_{p_0, q_0}(p, q) \varphi(q) dv_g(q) \right) = \int_{S \setminus U} \Delta_g G_{p_0, q_0}(p, q) \varphi(q) dv_g(q) = 0.$$

De même, le second terme dans la décomposition de $u_0(p)$ est une fonction analytique et harmonique de la variable p (puisque l'application $(p, q) \mapsto H(p, q)$ est analytique en les deux variables et harmonique en la variable p sur $U \times U$). Reste à évaluer le troisième terme de la décomposition de $u_0(p)$. Un calcul usuel dans \mathbb{R}^2 montre que, pour φ de classe C^1 , la fonction $p \mapsto \int_U \log|p - q| \varphi(q) dv_g(q)$ est de classe C^2 et satisfait

$$\Delta_z \left(\frac{1}{2\pi} \int_U \log|p - q| \varphi(q) dz d\bar{z}(q) \right) = -\varphi(p)$$

pour tout $p \in U$, où $\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{dv_g}{dz d\bar{z}} \Delta_g$. Par suite, on a, pour tout $p \in D$,

$$\Delta_g \left(\frac{1}{2\pi} \int_U \log|p - q| \varphi(q) dv_g(q) \right) = -\varphi(p).$$

Par conséquent, on a montré que u_{p_0} est de classe C^2 sur U et vérifie l'égalité

$$\Delta_g u_{p_0}(p) = -\varphi(p) \tag{X.9}$$

pour tout $p \in U$. Comme l'ouvert U n'est astreint qu'à être d'adhérence compacte dans $S \setminus \{q_0\}$ et suffisamment petit, on en déduit que u_{p_0} est de classe C^2 sur $S \setminus \{q_0\}$ et satisfait l'égalité (X.9) pour tout $p \in S \setminus \{q_0\}$.

Il reste à montrer que la fonction u_{p_0} définie par la formule (X.8) se prolonge par continuité en q_0 , et que la fonction prolongée est de classe C^2 (la fonction prolongée satisfera alors automatiquement l'équation (X.6) en q_0). Pour ce faire, il suffit de reprendre la construction de la fonction u_{p_0} en remplaçant le point q_0 par un autre point \hat{q}_0 (distinct de p_0). La remarque clé est la suivante : pour tout point $q \in S \setminus \{q_0, \hat{q}_0\}$, l'unicité de la 1-forme $\omega_{\hat{q}_0, q}$ (proposition II.2.8) implique que l'on aura :

$$\omega_{\hat{q}_0, q} = \omega_{q_0, q} + \omega_{\hat{q}_0, q_0}.$$

Pour tout couple de points distincts $p, q \in S \setminus \{q_0, \hat{q}_0\}$, on aura donc

$$G_{p_0, \hat{q}_0}(p, q) = G_{p_0, q_0}(p, q) + G_{p_0, \hat{q}_0}(p, q_0).$$

Et finalement, pour tout $p \in S \setminus \{q_0, \hat{q}_0\}$, on aura

$$\begin{aligned} & \int_{S \setminus \{p\}} G_{p_0, \hat{q}_0}(p, q) \varphi(q) dv_g(q) \\ = & \int_{S \setminus \{p\}} G_{p_0, q_0}(p, q) \varphi(q) dv_g(q) + G_{p_0, \hat{q}_0}(p, q_0) \int_{S \setminus \{p\}} \varphi(q) dv_g(q) \\ = & \int_{S \setminus \{p\}} G_{p_0, q_0}(p, q) \varphi(q) dv_g(q) \end{aligned}$$

puisque φ est d'intégrale nulle. On voit donc que, si l'on remplace le point q_0 par un autre point \hat{q}_0 dans la définition de u_{p_0} , on obtient une fonction définie et de classe C^2 sur $S \setminus \{\hat{q}_0\}$, qui coïncide avec u_{p_0} sur $S \setminus \{q_0, \hat{q}_0\}$. Par conséquent, la fonction u_{p_0} définie par la formule (X.8) se prolonge par continuité en q_0 , la fonction prolongée est de classe C^2 , et vérifie l'équation (X.6). \square

Remarque X.2.3. — Si la fonction φ est de classe C^k (avec $k \geq 1$), alors toute solution de l'équation (X.6) est de classe C^{k+1} . Pour le voir, il suffit de reprendre la preuve de la proposition X.2.2 ci-dessus, après avoir observé que la fonction $p \mapsto \int_U \log|p - q| \varphi(q) dv_g(q)$ est de classe C^{k+1} dès lors que la fonction φ est de classe C^k .

Il est aussi utile de remarquer que, si la fonction φ est seulement bornée, alors la fonction $u_{p_0} : p \mapsto \int_S G_{p_0, q_0}(p, q) \varphi(q) dv_g(q)$ est bien définie et de classe C^1 .

La formule intégrale (X.8) qui donne la solution de l'équation (X.6) s'annulant en p_0 permet d'obtenir une majoration de la norme de cette solution en fonction de la norme de la fonction φ :

Addendum X.2.4. — On suppose fixé un point $p_0 \in S$. Alors, il existe une constante $\beta > 0$ telle que, pour toute fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et d'intégrale nulle, on a :

$$\|u_{p_0, \varphi}\|_\infty \leq \beta \|\varphi\|_\infty \quad \text{et} \quad \|\vec{\nabla}_g u_{p_0, \varphi}\|_\infty \leq \beta \|\varphi\|_\infty$$

où $u_{p_0, \varphi}$ désigne l'unique solution de l'équation (X.6) qui s'annule en p_0 .

Preuve. — On fixe un point $q_0 \in S$ distinct de p_0 , et un voisinage U_0 de q_0 . D'après la preuve de la proposition X.2.2, quelle que soit la fonction

φ , on a pour tout $p \neq q_0$

$$u_{p_0, \varphi}(p) := \int_S G_{p_0, q_0}(p, q) \varphi(q) dv_g(q).$$

En particulier, on a pour tout $p \neq q_0$

$$|u_{p_0, \varphi}(p)| \leq \left(\int_S |G_{p_0, q_0}(p, q)| dv_g(q) \right) \|\varphi\|_\infty.$$

L'intégrale $\int_S |G_{p_0, q_0}(p, q)| dv_g(q)$ est finie pour tout $p \in S \setminus \{q_0\}$ et dépend continûment de p . Par suite, la quantité

$$\beta_0 := \sup_{p \in S \setminus U_0} \int_S |G_{p_0, q_0}(p, q)| dv_g(q)$$

est finie. Et on a, pour tout $p \in S \setminus U_0$,

$$|u_{p_0, \varphi}(p)| \leq \beta_0 \|\varphi\|_\infty.$$

Par ailleurs, on a montré dans la preuve de la proposition X.2.2 que la fonction u_{p_0} ne dépend pas du choix du point q_0 . Ainsi, si on considère un point $\hat{q}_0 \in S$ distinct de q_0 et de p_0 , et un voisinage \hat{U}_0 de \hat{q}_0 , on aura, pour tout $p \in S \setminus \hat{U}_0$,

$$|u_{p_0, \varphi}(p)| \leq \hat{\beta}_0 \|\varphi\|_\infty$$

où

$$\hat{\beta}_0 := \sup_{p \in S \setminus \hat{U}_0} \int_S |G_{p_0, \hat{q}_0}(p, q)| dv_g(q).$$

Il ne reste plus qu'à choisir les voisinages U_0 et \hat{U}_0 suffisamment petits, de manière à avoir $(S \setminus U_0) \cup (S \setminus \hat{U}_0) = S$. On aura ainsi

$$\|u_{p_0, \varphi}\|_\infty = \sup_{p \in (S \setminus U_0) \cup (S \setminus \hat{U}_0)} |u_{p_0, \varphi}(p)| \leq \beta \|\varphi\|_\infty$$

avec $\beta := \max(\beta_0, \hat{\beta}_0)$. La majoration de $\|\vec{\nabla}_g u_{p_0, \varphi}\|_\infty$ s'obtient en remplaçant dans le raisonnement ci-dessus la fonction G_{p_0, q_0} (resp. G_{p_0, \hat{q}_0}) par son gradient par rapport à la variable p . \square

Remarque X.2.5. — Si on note $C_0^1(S)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et d'intégrale nulle, la proposition X.2.2 montre que l'opérateur linéaire $\Delta_g : C^2(S) \rightarrow C_0^1(S)$ est surjectif et donne une formule pour l'inverse de cet opérateur. L'addendum X.2.4 montre que l'inverse de l'opérateur linéaire $\Delta_g : C^2(S) \rightarrow C_0^1(S)$ est continu, si on munit l'espace $C^2(S)$ de la norme C^1 .

X.2.2. Résolution de l'équation $\Delta_g u = \eta u - \varphi$

La deuxième grande étape dans la stratégie de Poincaré consiste à intégrer l'équation

$$\Delta_g u = \eta u - \varphi \tag{X.10}$$

où $\eta : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 strictement positive donnée, $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 donnée. Partant du fait qu'on sait intégrer l'équation de Poisson $\Delta_g u = \varphi$, Poincaré montre tout d'abord que l'on sait aussi intégrer l'équation $\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi$ pour tout réel $\lambda > 0$ suffisamment petit. Puis il montre que, si l'on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \lambda_0 \eta u - \varphi$ pour un certain $\lambda_0 > 0$, alors on sait également intégrer l'équation $\Delta_g u = (\lambda_0 + \lambda) \eta u - \varphi$ pour tout λ tel que $0 < \lambda < \lambda_0$. De ces deux résultats, on déduit immédiatement que l'on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi$ pour tout $\lambda > 0$. En particulier, en prenant $\lambda = 1$, on sait intégrer l'équation (X.10).

Unicité des solutions. — Assez tôt dans son article, Poincaré nous explique que la « *propriété fondamentale de l'expression $\Delta_g u$* » est la suivante :

Fait X.2.6. — *Soit $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. En un point où u est maximale, $\Delta_g u$ est négatif ou nul. En un point où u est minimale, $\Delta_g u$ est positif ou nul.*

Démonstration. — Il suffit de se rappeler que Δ_g est proportionnel à $\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ pour toute coordonnée holomorphe locale z . □

Poincaré donne de ce fait une interprétation physique fort convaincante : *un point où la température est maximum peut céder de la chaleur aux points voisins, mais ne peut en recevoir.* Il en déduit immédiatement un « principe du maximum » pour l'équation qui l'intéresse :

Proposition X.2.7. — *Étant donné un réel strictement positif λ , une fonction strictement positive $\eta : S \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction quelconque $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$, l'équation aux dérivées partielles*

$$\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi$$

n'admet qu'au plus une solution $u : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Preuve. — Soient $u, v : S \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de $\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi$. Puisque S est compacte, on peut considérer deux points $p_-, p_+ \in S$ tels

que la fonction $u - v$ atteint son minimum en p_- et son maximum en p_+ . D'après le fait X.2.6, on a alors

$$\Delta_g(u - v)(p_-) \geq 0 \quad \text{et} \quad \Delta_g(u - v)(p_+) \leq 0.$$

Par ailleurs, la fonction $u - v$ est solution de $\Delta_g(u - v) = \lambda\eta(u - v)$. Comme la fonction $\lambda\eta$ est strictement positive par hypothèse, il vient alors

$$(u - v)(p_-) \geq 0 \quad \text{et} \quad (u - v)(p_+) \leq 0.$$

Et comme la fonction $u - v$ est maximale en p_+ et minimale en p_- , ces inégalités impliquent qu'elle est identiquement nulle. \square

Majoration a priori des solutions. — En utilisant à nouveau le fait X.2.6, Poincaré montre une majoration *a priori* de la norme de l'éventuelle solution d'une équation du type $\Delta_g u = \lambda\eta u - \varphi$:

Proposition X.2.8. — Soient λ un réel strictement positif, $\eta : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, et $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Si $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de l'équation $\Delta_g u = \lambda\eta u - \varphi$, alors on a

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda} \left\| \frac{\varphi}{\eta} \right\|_\infty.$$

Preuve. — On considère deux points $p_-, p_+ \in S$ tels que la fonction u atteint son minimum en p_- , et son maximum en p_+ . On a alors l'inégalité $\Delta_g u(p_-) \geq 0$ et $\Delta_g u(p_+) \leq 0$. En utilisant l'équation $\Delta_g u = \lambda\eta u - \varphi$ et la stricte positivité de η , on en déduit les inégalités suivantes :

$$\frac{\varphi(p_-)}{\lambda\eta(p_-)} \leq u(p_-) \quad \text{et} \quad u(p_+) \leq \frac{\varphi(p_+)}{\lambda\eta(p_+)}.$$

Comme u atteint son minimum en p_- et son maximum en p_+ , on en déduit l'encadrement

$$\frac{\varphi(p_-)}{\lambda\eta(p_-)} \leq u(p) \leq \frac{\varphi(p_+)}{\lambda\eta(p_+)}$$

pour tout $p \in S$. La majoration souhaitée pour $\|u\|_\infty$ en découle trivialement. \square

Résolution de l'équation $\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi$ pour λ assez petit. — Poincaré cherche les solutions de l'équation $\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi$ sous forme d'une série en les puissances de λ , série dont il va montrer la convergence pour λ assez petit :

Proposition X.2.9. — Soit β la constante donnée par l'addendum X.2.4. On sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation

$$\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi \tag{X.11}$$

pour toute fonction $\eta : S \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive de classe C^1 , toute fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , et tout réel $\lambda > 0$ tel que $2\lambda\beta\|\eta\|_\infty < 1$.

Preuve de la proposition X.2.9. — On fixe une fonction $\eta : S \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive de classe C^1 , et une fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On fixe également un point $p_0 \in S$.

Première étape : recherche de la solution sous forme d'une série.

On écrit φ sous la forme $\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1$ où φ_0 et φ_1 sont deux fonctions de classe C^1 , la première étant d'intégrale nulle (on peut, par exemple, choisir φ_1 constante). On cherche une solution u de l'équation (X.11) sous la forme d'une série

$$u = (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \lambda^2(u_2 + c_2) + \dots$$

les u_i étant des fonctions qui s'annulent en p_0 , et les c_i étant des constantes. Si on injecte cette égalité dans l'équation (X.11), et si on regroupe les termes selon les puissances de λ (tout cela est uniquement formel), on trouve les équations suivantes

$$\begin{aligned} \Delta_g u_0 &= -\varphi_0 \\ \Delta_g u_1 &= \eta(u_0 + c_0) - \varphi_1 \\ \Delta_g u_2 &= \eta(u_1 + c_1) \\ \Delta_g u_3 &= \eta(u_2 + c_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

On voit immédiatement que ces équations impliquent

$$0 = \int \eta(u_0 + c_0) - \varphi_1 = \int \eta(u_1 + c_1) = \int \eta(u_2 + c_2) = \dots$$

L'équation $\Delta_g u_0 = -\varphi_0$ est une équation de Poisson d'inconnue u_0 . Puisque φ_0 est de classe C^1 et d'intégrale nulle, cette équation admet une unique solution u_0 de classe C^2 qui s'annule en p_0 (dont une

expression intégrale nous est donnée par la proposition X.2.2). Une fois u_0 connue, on peut alors choisir la constante c_0 de manière à ce que la fonction $\eta(u_0 + c_0) - \varphi_1$ soit d'intégrale nulle. La fonction u_0 et la constante c_0 étant alors connues, l'équation $\Delta_g u_1 = \eta(u_0 + c_0) - \varphi_1$ peut être vue comme une équation de Poisson d'inconnue u_1 . Comme $\eta(u_0 + c_0) - \varphi_1$ est de classe C^1 et d'intégrale nulle, cette équation admet une unique solution u_1 de classe C^2 (remarque X.2.3) qui s'annule en p_0 . On peut alors choisir la constante c_1 de manière à ce que la fonction $\eta(u_1 + c_1)$ soit d'intégrale nulle. Comme $\eta(u_1 + c_1)$ est connue et de classe C^1 , l'équation $\Delta_g u_2 = \eta(u_1 + c_1)$ admet une unique solution u_2 de classe C^2 qui s'annule en p_0 . De proche en proche, on trouve ainsi des fonctions u_i et des constantes c_i telles que les équations ci-dessus soient satisfaites. Ces fonctions u_i et ces constantes c_i sont uniques. Les fonctions u_i sont de classe C^2 .

Deuxième étape. Convergence de $(u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \lambda^2(u_2 + c_2) + \dots$. On cherche maintenant à déterminer pour quelles valeurs du paramètre λ la série $(u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \lambda^2(u_2 + c_2) + \dots$ est convergente. Pour ce faire, on utilise l'addendum X.2.4 qui va nous fournir des estimées des fonctions u_i et des constantes c_i . On note tout d'abord que, la fonction $\eta(u_i + c_i)$ étant d'intégrale nulle, on a, pour tout $i \geq 1$,

$$|c_i| \leq \|u_i\|_\infty.$$

Puis on observe que, pour $i \geq 1$, l'équation $\Delta_g u_{i+1} = \eta(u_i + c_i)$ ainsi que l'addendum X.2.4 donnent

$$\|u_{i+1}\|_\infty \leq \beta \|\eta\|_\infty (\|u_i\|_\infty + c_i) \leq 2\beta \|\eta\|_\infty \|u_i\|_\infty.$$

On en déduit l'existence d'une constante K telle que, pour tout $i \geq 2$, on a la majoration

$$\|u_i + c_i\|_\infty \leq 2\|u_i\|_\infty \leq 2K (2\beta \|\eta\|_\infty)^{i-1}.$$

Il en résulte immédiatement que la série de fonctions

$$(u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \lambda^2(u_2 + c_2) + \dots$$

converge normalement vers une fonction u pour toute valeur du paramètre λ telle que

$$2\beta \|\eta\|_\infty \lambda < 1.$$

Il est utile de noter que, pour de telles valeurs de λ , la fonction u est alors automatiquement de classe C^1 . En effet, pour $i \geq 1$, l'addendum X.2.4 et

l'équation $\Delta_g u_{i+1} = \eta(u_i + c_i)$ impliquent que l'on a

$$\|\vec{\nabla} u_{i+1}\|_\infty \leq \beta \|\eta\|_\infty \|\vec{\nabla} u_i\|_\infty.$$

Par suite, la série des dérivées $\vec{\nabla} u_0 + \lambda \vec{\nabla} u_1 + \lambda^2 \vec{\nabla} u_2 + \dots$ converge normalement dès que $\beta \|\eta\|_\infty \lambda < 1$, et la fonction u est donc bien de classe C^1 pour tout λ tel que $2\beta \|\eta\|_\infty \lambda < 1$.

Troisième étape. La fonction u est solution de l'équation (X.11).

Il reste à montrer que la fonction $u = (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \lambda^2(u_2 + c_2) + \dots$ est solution de l'équation (X.11). Pour ce faire, on considère une fonction $v : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$\Delta_g v = \lambda \eta u - \varphi.$$

L'existence d'une telle fonction v résulte de la proposition X.2.2. En effet, la fonction $\lambda \eta u - \varphi$ est de classe C^1 (car les fonctions u , η et φ le sont), et d'intégrale nulle puisque l'on a

$$\lambda \int \eta u = \sum_{i \geq 0} \lambda^{i+1} \int \eta(u_i + c_i) = \lambda \int \eta(u_0 + c_0) = \lambda \int \varphi_1 = \int \varphi.$$

On considère alors, pour tout $n \geq 0$, les fonctions R_n et S_n définies comme suit :

$$\begin{aligned} R_n &:= u - ((u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \dots + \lambda^n(u_n + c_n)) \\ S_n &:= v - ((u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \dots + \lambda^{n+1}(u_{n+1} + c_{n+1})). \end{aligned}$$

On remarque que l'on a, pour tout $n \geq 0$,

$$u - v = R_n - S_n - \lambda^{n+1}(u_{n+1} + c_{n+1}).$$

Les termes $\lambda^{n+1}(u_{n+1} + c_{n+1})$ et R_n tendent uniformément vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ (puisque la série $(u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \lambda^2(u_2 + c_2) + \dots$ converge uniformément vers u). Par ailleurs, en utilisant les équations satisfaites par v et les u_i , on voit qu'on a, pour tout $n \geq 0$,

$$\Delta_g S_n = \lambda \eta R_n.$$

Cette équation et l'addendum X.2.4 impliquent que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\|S_n\|_\infty \leq \lambda \beta \|\eta\|_\infty \|R_n\|_\infty.$$

On en déduit que S_n tend uniformément vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité $u - v = R_n - S_n - \lambda^{n+1}(u_{n+1} + c_{n+1})$, on obtient donc l'égalité $u = v$. On en déduit que la fonction u est de classe C^2 , puis, comme v satisfait l'équation $\Delta_g v = \lambda \eta u - \varphi$, la fonction u

satisfait l'équation (X.11). D'après la proposition X.2.7, l'équation (X.11) n'admet pas d'autre solution. \square

De l'équation $\Delta_g u = \lambda_0 \eta u - \varphi$ à l'équation $\Delta_g u = (\lambda_0 + \lambda) \eta u - \varphi$. — Dès qu'il a montré qu'on peut intégrer l'équation $\Delta_g u = \lambda_0 \eta u - \varphi$ pour certaines valeurs de λ_0 , Poincaré tente de perturber cette équation afin d'élargir un peu le champ des équations qu'il sait résoudre :

Proposition X.2.10. — Soit $\eta : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 strictement positive, et λ_0 un réel strictement positif. On fait l'hypothèse que l'on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation

$$\Delta_g u = \lambda_0 \eta u - \varphi \quad (\text{X.12})$$

pour toute fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Alors, on sait également trouver une solution de classe C^2 à l'équation

$$\Delta_g u = (\lambda_0 + \lambda) \eta u - \varphi \quad (\text{X.13})$$

pour toute fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , et tout réel positif λ tel que $\lambda < \lambda_0$.

Notons que les fonctions η et φ ont des statuts différents dans l'énoncé ci-dessus : la fonction η est fixée une fois pour toutes ; par contre, l'hypothèse concerne toutes les fonctions φ de classe C^1 . En effet, pour intégrer l'équation $\Delta_g u = (\lambda_0 + \lambda) \eta u - \varphi_0$ pour une certaine fonction φ_0 , on aura besoin de savoir intégrer l'équation $\Delta_g u = \lambda_0 \eta u - \varphi$ pour une infinité de fonctions φ différentes.

Preuve de la proposition X.2.10. — La preuve est très similaire à celle de la proposition X.2.9.

Première étape : recherche de la solution sous forme d'une série.

On cherche une solution $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (X.13) sous la forme

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$$

Si on injecte dans l'équation (X.13) et que l'on regroupe les termes selon les puissances de λ , on trouve les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_g u_0 &= \lambda_0 \eta u_0 - \varphi \\ \Delta_g u_1 &= \lambda_0 \eta u_1 + \eta u_0 \\ \Delta_g u_2 &= \lambda_0 \eta u_2 + \eta u_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

La première équation est du type (X.12). Par hypothèse, on sait l'intégrer. Une fois l'unique solution u_0 de la première équation connue, la deuxième équation devient une équation d'inconnue u_1 du type (X.12) (avec $\varphi = -\eta u_0$) ; on sait donc l'intégrer par hypothèse. Une fois l'unique solution u_1 de cette deuxième équation connue, la troisième équation devient une équation d'inconnue u_2 du type (X.12) ; on sait donc l'intégrer par hypothèse. De proche en proche, on peut donc trouver successivement les solutions (de classe C^2 et uniques) u_0, u_1, u_2, \dots de toutes les équations ci-dessus.

Deuxième étape. Convergence de la série $u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$.

D'après la majoration *a priori* obtenue dans la proposition X.2.8, on a, pour tout $i \geq 0$:

$$\|u_{i+1}\|_\infty \leq \left\| \frac{\eta u_i}{\lambda_0 \eta} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda_0} \|u_i\|_\infty.$$

Par conséquent, il existe une constante K telle que $\|u_i\| \leq K \lambda_0^{-i}$ pour tout $i \geq 0$, et la série de fonctions $u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$ converge normalement vers une fonction u (*a priori* seulement continue) pour tout $\lambda < \lambda_0$.

Troisième étape. La fonction u est solution de l'équation (X.13).

Il nous reste à montrer que u est de classe C^2 et vérifie (X.13).

Pour ce faire, Poincaré considère, la fonction $(p, q) \mapsto G_{p_0, q_0}(p, q)$ construite dans la preuve de la proposition X.2.2, et définit des fonctions $v_0, v_1, v_2, \dots : S \rightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour tout $p \in S \setminus \{q_0\}$:

$$\begin{aligned} v_0(p) &:= \int_S G_{p_0, q_0}(p, q) (\lambda_0 \eta u_0 - \varphi)(q) d\nu_g(q) \\ v_1(p) &:= \int_S G_{p_0, q_0}(p, q) (\lambda_0 \eta u_1 + \eta u_0)(q) d\nu_g(q) \\ v_2(p) &:= \int_S G_{p_0, q_0}(p, q) (\lambda_0 \eta u_2 + \eta u_1)(q) d\nu_g(q) \\ &\dots \end{aligned}$$

On a vu dans la preuve de la proposition X.2.2 que les fonctions v_0, v_1, v_2, \dots se prolongent en q_0 et sont de classe C^2 . Puisque la série de fonctions $u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$ converge normalement vers la fonction u , la série de fonctions $(\lambda_0 \eta u_0 - \varphi) + \lambda(\lambda_0 \eta u_1 + \eta u_0) + \lambda^2(\lambda_0 \eta u_2 + \eta u_1) + \dots$ converge normalement vers la fonction continue $(\lambda_0 + \lambda)\eta u - \varphi$. De ce fait, la série de fonctions $v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots$ converge normalement vers

la fonction

$$\begin{aligned} v &= \int_S G_{p_0, q_0}(p, q) ((\lambda_0 \eta u_0 - \varphi) + \lambda(\lambda_0 \eta u_1 + \eta u_0) + \dots)(q) dv_g(q) \\ &= \int_S G_{p_0, q_0}(p, q) ((\lambda_0 + \lambda) \eta u - \varphi)(q) dv_g(q). \end{aligned}$$

La fonction v est donc de classe C^1 , d'après la remarque X.2.3.

Par ailleurs, comme les fonctions φ, u_0, u_1, \dots sont de classe C^1 , les égalités qui définissent les fonctions v_0, v_1, \dots impliquent

$$\begin{aligned} \Delta_g v_0 &= \lambda_0 \eta u_0 - \varphi &= \Delta_g u_0 \\ \Delta_g v_1 &= \lambda_0 \eta u_1 + \eta u_0 &= \Delta_g u_1 \\ \Delta_g v_2 &= \lambda_0 \eta u_2 + \eta u_1 &= \Delta_g u_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Pour chaque $i \geq 0$, les fonctions u_i et v_i diffèrent donc par l'addition d'une constante : il existe $c_i \in \mathbb{R}$ tel que $v_i = u_i + c_i$. Comme les séries $u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$ et $v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots$ convergent normalement, la série $c_0 + \lambda c_1 + \lambda^2 c_2 + \dots$ converge absolument. Par suite, les fonctions u et v diffèrent d'une constante : on a $v = u + c$ avec $c = c_0 + \lambda c_1 + \lambda^2 c_2 + \dots$.

Comme v est de classe C^1 , et que u et v diffèrent par l'addition d'une constante, la fonction u est de classe C^1 . Il en est donc de même pour la fonction $\eta u - \varphi$. Par conséquent, la fonction

$$v = \int_S G_{p_0, q_0}(p, q) ((\lambda_0 + \lambda) \eta u - \varphi)(q) dv_g(q)$$

est de classe C^2 (voir la remarque X.2.3) et vérifie

$$\Delta_g v = (\lambda_0 + \lambda) \eta u - \varphi.$$

Par ailleurs, puisque les fonctions u et v diffèrent par l'addition d'une constante, la fonction u est de classe C^2 , et on a

$$\Delta_g u = \Delta_g v.$$

Des deux égalités ci-dessus, on déduit finalement que la fonction u satisfait l'équation $\Delta_g u = (\lambda_0 + \lambda) \eta u - \varphi$. \square

Résolution de l'équation $\Delta_g u = \eta u - \varphi$. — Il ne reste plus maintenant qu'à cueillir les fruits du travail effectué ci-dessus :

Proposition X.2.11. — *Quelles que soient $\eta : S \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive de classe C^1 et $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation*

$$\Delta_g u = \eta u - \varphi.$$

Preuve de la proposition X.2.11. — Soit $\eta : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, de classe C^1 , fixée. D'après la proposition X.2.9, on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation

$$\Delta_g u = \lambda \eta u - \varphi \tag{X.14}$$

pour toute fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , et tout réel positif $\lambda < (2\beta\|\eta\|_\infty)^{-1}$. En appliquant la proposition X.2.10, on en déduit que l'on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation (X.14) pour toute fonction φ de classe C^1 et pour tout $\lambda < 2(2\beta\|\eta\|_\infty)^{-1}$. Puis, en appliquant une seconde fois la proposition X.2.10, on en déduit que l'on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation (X.14) pour toute fonction φ de classe C^1 et pour tout $\lambda < 3(2\beta\|\eta\|_\infty)^{-1}$. Par récurrence, on obtient ainsi que l'on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation (X.14) pour toute fonction φ de classe C^1 et pour $\lambda > 0$. On conclut en prenant $\lambda = 1$. □

X.2.3. Résolution de l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$

Dans la troisième grande étape de la stratégie de Poincaré, on s'intéresse à l'équation

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi \tag{X.15}$$

où $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 strictement positive donnée, $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et d'intégrale strictement positive donnée. Poincaré va tout d'abord remarquer que l'équation admet une solution évidente lorsque les fonctions φ et θ sont proportionnelles. Puis, il va montrer – par une technique de développement en série dont le lecteur a maintenant l'habitude – que, si l'on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi_0$ pour une certaine fonction φ_0 , alors on sait aussi intégrer l'équation $\Delta_g u = 2e^u - (\varphi_0 + \lambda\psi)$ pour λ assez petit.

Unicité des solutions. — Le même genre de raisonnement que dans la preuve de la proposition X.2.7 permet de montrer que l'équation (X.15) ne peut admettre plus d'une solution.

Proposition X.2.12. — *Étant données une fonction strictement positive $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction quelconque $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$, l'équation*

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$$

admet au plus une solution $u : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Preuve. — Soient $u, v : S \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$. On aura alors

$$\Delta_g(u - v) = \theta e^v(e^{(u-v)} - 1).$$

Puisque S est compacte, on peut considérer deux points $p_-, p_+ \in S$ tels que la fonction $u - v$ atteint son minimum en p_- et son maximum en p_+ . D'après le fait X.2.6, on a alors

$$\Delta_g(u - v)(p_-) \geq 0 \quad \text{et} \quad \Delta_g(u - v)(p_+) \leq 0.$$

En utilisant l'équation ci-dessus et la stricte positivité de la fonction θ , on en déduit

$$e^{(u-v)}(p_-) \geq 1 \quad \text{et} \quad e^{(u-v)}(p_+) \leq 1.$$

Ces inégalités impliquent que la fonction $u - v$ est identiquement nulle. □

Le cas où les fonctions φ et θ sont proportionnelles. — La proposition suivante est triviale, mais fondamentale dans la stratégie de Poincaré :

Proposition X.2.13. — *Quels que soient la fonction $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive, et le réel strictement positif α , l'équation*

$$\Delta_g u = \theta e^u - \alpha \theta$$

admet une solution constante.

Preuve. — La fonction constante $u = \log \alpha$ est solution de l'équation, et c'est la seule solution d'après la proposition X.2.12. □

De l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi_0$ à $\Delta_g u = \theta e^u - (\varphi_0 + \lambda\psi)$. — Poincaré montre un dernier résultat de type « si on sait intégrer telle équation, alors on sait aussi... ».

Proposition X.2.14. — Soit $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 strictement positive, $\varphi_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive de classe C^1 et $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On fait l'hypothèse que l'on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi_0 \tag{X.16}$$

Alors on sait aussi trouver une solution de classe C^2 à

$$\Delta_g u = \theta e^u - (\varphi_0 + \lambda\psi) \tag{X.17}$$

pour tout réel strictement positif λ tel que

$$\lambda \left\| \frac{\psi}{\theta} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\theta}{\varphi_0} \right\|_{\infty} < 2 \log 2 - 1.$$

Preuve. — La preuve est semblable à celle des propositions X.2.9 et X.2.10; il apparaît simplement quelques complications techniques dues à la non-linéarité de l'équation (X.17).

Première étape : recherche de la solution sous forme d'une série.

On cherche la solution éventuelle u de l'équation (X.17) sous la forme d'une série

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$$

Si la fonction u peut s'écrire sous cette forme, alors la fonction e^u s'écrira sous la forme

$$e^u = e^{u_0} (1 + \lambda u_1 + \lambda^2 (u_2 + w_2) + \lambda^3 (u_3 + w_3) + \lambda^4 (u_4 + w_4) + \dots)$$

où $w_2 = \frac{u_1^2}{2}$, $w_3 = \frac{u_1^3}{6} + u_1 u_2$, $w_4 = \frac{u_1^4}{24} + u_1 u_3 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_1^2 u_2}{2}$ et plus généralement

$$w_i = P_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-1})$$

où P_i est un polynôme en $i - 1$ variables à coefficients positifs.

En reportant dans l'équation (X.17), et en regroupant les termes selon les puissances de λ , on obtient les équations

$$\begin{aligned} \Delta_g u_0 &= \theta e^{u_0} - \varphi_0 \\ \Delta_g u_1 &= \theta e^{u_0} u_1 - \psi \end{aligned}$$

$$\Delta_g u_2 = \theta e^{u_0}(u_2 + w_2)$$

$$\Delta_g u_3 = \theta e^{u_0}(u_3 + w_3)$$

...

Nous avons fait l'hypothèse que nous savons intégrer la première équation. On peut donc supposer connue une fonction $u_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant cette équation. Une fois la fonction u_0 connue, la deuxième équation devient une équation du type (X.10) (d'inconnue u_1). D'après la proposition X.2.11, on sait intégrer cette équation. On obtient ainsi la fonction u_1 . La fonction u_1 étant connue, on peut calculer $w_2 = P_2(u_1)$. La fonction w_2 étant connue, la troisième équation devient une équation du type (X.10) (d'inconnue u_2). D'après la proposition X.2.11, on sait intégrer cette équation. On obtient ainsi la fonction u_2 . Les fonctions u_1 et u_2 étant connues, on peut calculer $w_3 = P_3(u_1, u_2)$. On peut ainsi intégrer toutes les équations ci-dessus, et trouver l'une après l'autre les fonctions u_0, u_1, u_2, \dots

Deuxième étape. Convergence de la série $u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$.

Il nous faut maintenant déterminer pour quelles valeurs du paramètre λ (s'il en existe) la série $u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$ converge.

Commençons par majorer la norme uniforme de u_1 . L'équation $\Delta_g u_1 = \theta e^{u_0} \cdot u_1 - \psi$ est une équation (d'inconnue u_1) du type (X.10) ; la proposition X.2.8 implique donc que l'on a

$$\|u_1\|_\infty \leq \left\| \frac{\psi}{\theta e^{u_0}} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\psi}{\theta} \right\|_\infty \left\| \frac{1}{e^{u_0}} \right\|_\infty.$$

On est donc ramené à majorer la norme uniforme de la fonction $1/e^{u_0}$. Soit p un point de S tel que u_0 atteigne son minimum en p . La fonction $1/e^{u_0}$ atteint son maximum en p . Par ailleurs, on a $\Delta_g u_0(p) \geq 0$, et donc $(\theta e^{u_0} - \varphi)(p) \geq 0$. Par conséquent, on a

$$\left\| \frac{1}{e^{u_0}} \right\|_\infty \leq \frac{1}{e^{u_0(p)}} \leq \frac{\varphi(p)}{\theta(p)} \leq \left\| \frac{\varphi_0}{\theta} \right\|_\infty.$$

En rassemblant les inégalités ci-dessus, on obtient la majoration souhaitée de la norme de u_1 :

$$\|u_1\|_\infty \leq \left\| \frac{\psi}{\theta} \right\|_\infty \left\| \frac{\varphi_0}{\theta} \right\|_\infty. \quad (\text{X.18})$$

Cherchons maintenant à majorer la norme uniforme de u_i , pour $i \geq 2$. L'équation $\Delta_g u_i = \theta e^{u_0}(u_i + w_i)$ est une équation du type (X.10) ; d'après

la proposition X.2.8, on aura donc, pour tout $i \geq 2$,

$$\|u_i\|_\infty \leq \left\| \frac{\theta e^{u_0} \cdot w_i}{\theta e^{u_0}} \right\|_\infty = \|w_i\|_\infty = \|P_i(u_1, \dots, u_{i-1})\|_\infty.$$

Et comme P_i est un polynôme à coefficients *positifs*, on en déduit, pour tout $i \geq 2$,

$$\|u_i\|_\infty \leq P_i(\|u_1\|_\infty, \dots, \|u_{i-1}\|_\infty). \tag{X.19}$$

Considérons alors la suite de réels positifs $(a_i)_{i \geq 1}$ définie par récurrence comme suit

$$\begin{cases} a_1 := \left\| \frac{\psi}{\theta} \right\|_\infty \left\| \frac{\varphi_0}{\theta} \right\|_\infty \\ a_{i+1} := P_i(a_1, \dots, a_i) \quad \text{pour tout } i \geq 1. \end{cases}$$

Les inégalités (X.18) et (X.19) ci-dessus montrent que l'on a $\|u_i\|_\infty \leq a_i$ quel que soit $i \geq 1$. Pour que la série de fonctions $u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$ converge normalement, il suffira donc d'obtenir la convergence de la série de réels positifs $\lambda a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3 + \dots$.

Cherchons donc à déterminer pour quelles valeurs du paramètre λ (s'il en existe) la série $\lambda a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3 + \dots$ converge. Supposons qu'elle converge; et notons a sa somme. On aura alors

$$\begin{aligned} e^a &= 1 + \lambda a_1 + \lambda^2(a_2 + P_2(a_1)) + \lambda^3(a_3 + P_3(a_1, a_2)) + \dots \\ &= 1 + \lambda a_1 + 2(\lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3 + \dots) \\ &= 2a + 1 - \lambda a_1. \end{aligned}$$

En particulier, l'équation $e^x = 2x + 1 - \lambda a_1$ aura une racine. En étudiant la fonction $x \mapsto e^x = 2x + 1 - \lambda a_1$, on voit que pour que cela soit possible, il faut que $\lambda a_1 \leq 2 \log 2$. Réciproquement, supposons que $0 < \lambda a_1 \leq 2 \log 2$. Alors l'équation $e^x = 2x + 1 - \lambda a_1$ possède deux racines (toutes deux positives); appelons a la plus petite. Pour $N \geq 1$, notons

$$A_N := \lambda a_1 + \lambda^2 a_2 + \dots + \lambda^N a_N.$$

Considérons la fonction $f : x \mapsto e^x - x - 1 + \lambda a_1$. En développant e^{A_N} selon les puissances de λ , nous voyons que, quel que soit $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(A_N) &= A_{N+1} + \lambda^{N+2} P_{N+2}(a_1, \dots, a_N, 0) + \dots \\ &\geq A_{N+1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme f est croissante sur $[0, +\infty[$, on a $f(x) < a$ pour tout $x \in]0, a[$. On en déduit que A_N est majoré par a pour tout $N \geq 1$. Par conséquent, la série $\lambda a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3 + \dots$ converge. En résumé, nous

avons montré que la série de fonctions $u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$ converge normalement vers une fonction (*a priori* seulement continue) u , pourvu que $\lambda a_1 \leq 2 \log 2$, c'est-à-dire pourvu que

$$\lambda \left\| \frac{\psi}{\theta} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\varphi_0}{\theta} \right\|_{\infty} < 2 \log 2 - 1.$$

Troisième étape. La fonction u est solution de l'équation (X.17).

Comme dans la preuve de la proposition X.2.10, on définit des fonctions $v_0, v_1, v_2, \dots : S \rightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour tout $p \in S \setminus \{q_0\}$:

$$\begin{aligned} v_0(p) &:= \int_S G_{p_0, q_0}(p, q)(\theta e^{u_0} - \varphi)(q) d v_g(q) \\ v_1(p) &:= \int_S G_{p_0, q_0}(p, q)(\theta e^{u_0} \cdot u_1 - \psi)(q) d v_g(q) \\ v_2(p) &:= \int_S G_{p_0, q_0}(p, q)(\theta e^{u_0}(u_2 + w_2))(q) d v_g(q) \\ v_3(p) &:= \int_S G_{p_0, q_0}(p, q)(\theta e^{u_0}(u_3 + w_3))(q) d v_g(q) \\ &\dots \end{aligned}$$

où $(p, q) \mapsto G_{p_0, q_0}(p, q)$ est la fonction utilisée dans la preuve de la proposition X.2.2. Par les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition X.2.10, les fonctions $v_0, v_1, v_2 \dots$ se prolongent alors en q_0 , sont de classe C^2 , et la série de fonctions $v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots$ converge normalement vers

$$\begin{aligned} v &= \int_S G_{p_0, q_0}(p, q)(\theta e^{u_0}(1 + \lambda u_1 + \dots) - \varphi_0 - \lambda \psi)(q) d v_g(q) \\ &= \int_S G_{p_0, q_0}(p, q)(\theta e^u - \varphi_0 - \lambda \psi)(q) d v_g(q). \end{aligned}$$

La fonction v est de classe C^1 d'après la remarque X.2.3. On montre alors, comme dans la preuve de la proposition X.2.10, que les fonctions u et v diffèrent par l'addition d'une constante c . On en déduit que u est de classe C^1 , puis que la fonction v est de classe C^2 et vérifie

$$\Delta_g v = \theta e^u - \varphi_0 - \lambda \psi.$$

On en déduit enfin que u est de classe C^2 , satisfait $\Delta_g u = \Delta_g v$, et donc que u satisfait l'équation (X.17). \square

Cas où la fonction φ est positive. — Les propositions X.2.13 et X.2.14 permettent d'intégrer l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$ dans le cas où la fonction φ est partout strictement positive.

Proposition X.2.15. — *Quelles que soient la fonction $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive de classe C^1 , et la fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive de classe C^1 , on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation*

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi.$$

Preuve. — On cherche à se ramener aux propositions X.2.13 et X.2.14. Pour ce faire, on écrit la fonction φ sous la forme $\varphi = \alpha\theta + \psi$ où α est un réel strictement positif et $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement positive (on peut par exemple prendre $\alpha < \min(\varphi/\theta)$). On va montrer que l'on peut intégrer l'équation

$$\Delta_g u = \theta e^u - (\alpha\theta + \lambda\psi) \tag{X.20}$$

pour tout $\lambda > 0$. On pose

$$\lambda_0 = (2 \log 2 - 1) \alpha \left\| \frac{\psi}{\theta} \right\|_{\infty}^{-1}.$$

D'après la proposition X.2.13, puisque la constante α est strictement positive, on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation (X.20) pour $\lambda = 0$. En appliquant la proposition X.2.14 (avec $\varphi_0 = \alpha\theta$), on en déduit que l'on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation (X.20) pour $0 < \lambda < \lambda_0$. En appliquant à nouveau la proposition X.2.14 (cette fois-ci, avec $\varphi_0 = \alpha\theta + \lambda_0\psi$), on en déduit que l'on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation (X.20) pour $0 < \lambda < 2\lambda_0$. En répétant le raisonnement, on voit que l'on peut trouver une solution de classe C^2 à l'équation (X.20) pour $0 < \lambda < n\lambda_0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à remarquer que l'équation (X.20) se réduit à l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$ lorsque $\lambda = 1$. \square

Résolution de l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$. — On en arrive finalement au résultat souhaité :

Théorème X.2.16. — *Quelles que soient la fonction $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive de classe C^1 , et la fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 d'intégrale strictement positive, on sait trouver une solution de classe C^2 à l'équation*

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi.$$

Preuve. — Soit $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et d'intégrale strictement positive. On note c l'intégrale de φ , et $\varphi_0 = \varphi - c$. Comme φ_0 est une fonction de classe C^1 et d'intégrale nulle, on peut trouver (d'après la proposition X.2.2) une unique fonction $v : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$\Delta_g v = -\varphi_0.$$

Et comme la fonction θe^v est alors de classe C^1 et strictement positive, et comme la constante c est strictement positive, on peut trouver (d'après la proposition X.2.15) une fonction $w : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que

$$\Delta_g w = \theta e^v e^w - c.$$

On vérifie immédiatement que la fonction $u = v + w$ satisfait l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$. □

X.3. Conclusion : uniformisation des surfaces de Riemann algébriques, prescription de courbure et calcul des variations

En mettant bout à bout le théorème X.2.16 et la proposition X.1.3, on obtient le théorème d'uniformisation suivant :

Théorème X.3.1. — *Le revêtement universel de toute surface de Riemann algébrique compacte de caractéristique d'Euler strictement négative est biholomorphe au disque.*

C'est la deuxième preuve que Poincaré donne de ce théorème. Et, alors que la première était loin d'être satisfaisante selon les critères de rigueur actuels, on ne peut guère faire de reproches à celle-ci.

Mieux encore : si l'uniformisation des surfaces est reliée à l'équation $\Delta_g u = 2e^u - \varphi$, Poincaré obtient en fait l'existence et l'unicité de solutions pour l'équation un peu plus générale $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$ (où θ est une fonction strictement positive). Cette équation s'interprète naturellement en terme d'existence de métriques à courbure prescrite. Considérons en effet une surface compacte S de caractéristique d'Euler strictement négative, et une métrique riemannienne g sur S .

La métrique g induit sur S une structure de surface de Riemann. La surface de Riemann obtenue est automatiquement algébrique puisque compacte. Notons $-\varphi_g$ la courbure de g . La formule donnée dans la section X.1.3 se généralise comme suit : pour toute fonction $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ (de classe C^2), la courbure de la métrique $g' = e^u g$ est égale à $-\varphi_{g'}$ où $\Delta_g u = 2\varphi_{g'} e^u - 2\varphi_g$. Le théorème X.2.16 montre que l'équation

$$\Delta_g u = \theta e^u - \varphi_g \quad (\text{X.21})$$

admet une solution quelle que soit la fonction strictement positive $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ (de classe C^2). Les travaux de Poincaré impliquent donc le résultat suivant⁽¹¹⁾ :

Théorème X.3.2. — *Soit S une surface compacte de caractéristique d'Euler strictement négative, g une métrique riemannienne sur S , et $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 strictement positive. Il existe une métrique riemannienne dans la classe conforme de g dont la courbure de Gauss est égale à $-\theta$.*

Ce résultat a été démontré par des méthodes modernes par M. S. Berger dans [Berg1971] (voir l'encadré ci-dessous).

Au milieu de son mémoire, Poincaré fait une pause :

Mais, avant de démontrer par des procédés rigoureux l'intégrabilité de cette équation [l'équation $\Delta_g u = \theta \cdot e^u - \varphi$], je veux tout d'abord la faire pressentir par un de ces aperçus fondés sur le calcul des variations dont on fait quelquefois usage en Physique mathématique.

Poincaré construit ensuite une fonctionnelle dont les points critiques de classe C^2 sont les solutions de l'équation $\Delta_g u = \theta \cdot e^u - \varphi$. Puis il montre, si θ est strictement positive et si l'intégrale de φ est strictement positive, que la fonctionnelle ainsi construite est minorée. La citation ci-dessus montre cependant que Poincaré sait parfaitement que cela n'implique pas *a priori* l'existence d'une fonction lisse u où la fonctionnelle atteint son minimum. C'est, en gros, l'existence d'une telle fonction u que M. Berger⁽¹²⁾ montrera dans [Berg1971]. L'encadré suivant présente la preuve « moderne ».

11. Bien sûr, l'interprétation de l'équation (X.21) en termes de courbure n'apparaît jamais dans le mémoire de Poincaré.

12. En fait, la fonctionnelle considérée par Berger est légèrement différente de celle considérée par Poincaré.

Encadré X.1 : Existence de solution pour l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$

Soit S , g , θ comme dans l'énoncé du théorème X.3.2, et $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ l'opposé de la courbure de Gauss de g . Berger considère la fonctionnelle

$$F : u \mapsto \int_S \left(\frac{1}{2} |du|^2 + \varphi u \right) dv_g$$

sur la sous-variété de l'espace de Sobolev $H^1(S)$ définie par la contrainte de Gauss-Bonnet

$$V = \left\{ u \in H^1(S) \mid \int_S \theta e^u dv_g = -2\pi \chi(S) \right\}.$$

En dimension 2, et puisque S est compacte, on a des inclusions de Sobolev $H^1(S) \hookrightarrow L^p(S)$ pour tout $p < \infty$ (mais pas $p = \infty$). Ces inclusions sont de plus *compactes*. Un autre ingrédient de la preuve est l'inégalité suivante, conséquence des *inégalités de Trudinger*

$$\int_S e^{|u|} dv_g \leq C \exp \left(C \|u\|_{H^1}^2 \right).$$

Elle entraîne que la fonctionnelle F est de classe C^1 sur $H^1(S)$, et que V est une sous-variété de $H^1(S)$. Des inégalités du même type montrent que l'application $u \mapsto e^u$ est continue de $H^1(S)$ muni de la topologie faible vers L^1 , et donc que V est fermée *pour la topologie faible* dans $H^1(S)$.

Un calcul aisé montre que les points critiques de la fonctionnelle F sur S sont solutions du problème étudié *i.e.* $\Delta_g u = \theta e^u - \varphi$.

Comme la fonctionnelle F est convexe et continue (pour la topologie forte), elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible (Hahn-Banach).

De plus, elle est minorée sur V , ce que l'on voit en utilisant (entre autres) *l'inégalité de Poincaré* sur S ,

$$\int_S |u_0|^2 dv_g \leq C \int_S |du_0|^2 dv_g, \text{ si } u_0 \in H^1(S) \text{ et } \int_S u_0 dv_g = 0,$$

ainsi que l'hypothèse $\theta > 0$.

Dès lors, la stratégie est celle habituelle du calcul des variations : on considère une suite minimisante u_n dans V , *i.e.* telle que $F(u_n) \rightarrow \inf_V F$. Ceci entraîne que u_n est bornée dans $H^1(S)$, et

donc, quitte à extraire une sous-suite, qu'elle converge *faiblement* dans $H^1(S)$, vers une limite u_∞ . Cette limite appartient à V (puisque V est fermée) et $F(u_\infty) = \inf_V F$ par semi-continuité faible. Les arguments classiques de régularité elliptique montrent alors que c'est une solution lisse du problème.

L'article de Berger a marqué le début d'une série de travaux concernant l'existence de métriques à courbure prescrite sur les surfaces non-compactes (voir par exemple l'article de survol de D. Hulin et M. Troyanov [HuTr1992]). Citons notamment [KaWa1974], toujours pour les surfaces, et par exemple [Aub1998] pour toute l'immense littérature sur la prescription de courbure scalaire en dimension supérieure (appelé problème de Yamabe). Notons que, dans son article, Poincaré ne s'intéresse pas qu'aux surfaces compactes : il traite aussi le cas des surfaces compactes privées d'un nombre fini de points. Hélas, nous n'avons pas réussi à interpréter, dans ce cadre, les résultats de Poincaré en termes d'existence de métriques à courbure prescrite... mais on ne peut exclure qu'une lecture approfondie du mémoire de Poincaré ne réserve encore quelques belles surprises !

PARTIE C

Vers le théorème
d'uniformisation général

La dernière partie de ce livre est consacrée au chemin qui, de 1882 à 1907, mène de l'uniformisation des surfaces de Riemann algébriques, par la méthode de continuité, au théorème d'uniformisation général tel que nous le connaissons aujourd'hui. Gray a réalisé une étude très fouillée [Gra1994] consacrée au théorème de représentation de Riemann, à laquelle on pourra se référer. Citons également des références plus anciennes dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* : [OsgW1901, Bie1921].

En 1882, Klein et Poincaré ont acquis la conviction que toute surface de Riemann algébrique peut être uniformisée par la sphère, le plan ou le disque unité. Les détails de la preuve de ce fabuleux résultat restent à mettre au point, mais Poincaré — à qui l'audace mathématique n'a jamais manqué — est déjà parti à la conquête d'un monde beaucoup plus vaste : il tente d'uniformiser les surfaces de Riemann associées à des *germes de fonctions analytiques* quelconques, pas nécessairement algébriques.

Le mémoire [Poin1883b] que Poincaré publie en 1883 s'ouvre sur l'énoncé du *théorème d'uniformisation des fonctions* qu'il se propose de démontrer :

Soit y une fonction analytique quelconque de x , non uniforme. On peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z .

Quel lien y a-t-il entre cet énoncé et ce qu'on appelle aujourd'hui le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann? Dans son mémoire, Poincaré rappelle comment construire, à partir d'une « fonction analytique non uniforme y de la variable x », une surface de

Riemann abstraite étalée au-dessus du plan de la variable x , sur laquelle y est naturellement défini en tant que fonction analytique uniforme. En langage plus moderne, étant donné un germe de fonction analytique y d'une variable x , on construit la surface de Riemann maximale sur laquelle on peut étendre le germe y en une fonction analytique (uniforme) (voir page 67) : c'est la surface de Riemann associée au germe y . Trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z revient alors à uniformiser la surface de Riemann associée au germe y , c'est-à-dire à paramétrer cette surface avec une seule variable complexe z . En 1883, Poincaré ne parvient pas à obtenir un paramétrage qui soit un biholomorphisme local en tout point, et doit autoriser la présence de points de ramifications. Plus précisément, il montre le résultat suivant :

Théorème. — *Soit S une surface de Riemann qui admet une fonction méromorphe non constante. Il existe un revêtement ramifié $\pi : U \rightarrow S$ où U est un ouvert borné de \mathbb{C} .*

Le théorème d'uniformisation des fonctions annoncé par Poincaré découle immédiatement de ce résultat : si S est la surface de Riemann associée à un germe de fonction analytique y d'une variable complexe x , et si U est l'ouvert de \mathbb{C} donné par le théorème ci-dessus, alors x et y peuvent être vues comme des fonctions uniformes sur la surface S , et donc, comme des fonctions uniformes de la coordonnée z du plan complexe contenant U .

La notion de revêtement universel d'une surface de Riemann joue un rôle important dans le mémoire de Poincaré. À notre connaissance, c'est dans ce mémoire qu'apparaît pour la première fois une définition du revêtement universel d'une surface de Riemann associée à un (ou une famille finie de) germe(s) de fonction(s) (voir notre encadré XI.2). En 1898, Osgood considère que cette définition est un point crucial (et peut-être l'apport le plus important) du mémoire de Poincaré ([OsgW1898]). Pour obtenir le théorème ci-dessus, Poincaré va montrer l'existence une surface de Riemann Σ , qui est un revêtement ramifié de S , telle que le revêtement universel $\tilde{\Sigma}$ est biholomorphe à un ouvert borné de \mathbb{C} . Pour ce faire, il suffit — comme l'a remarqué Riemann — de trouver une surface de Riemann Σ , qui est un revêtement ramifié de S , telle que $\tilde{\Sigma}$ admet une fonction harmonique positive avec un pôle logarithmique.

L'outil fondamental de la preuve de Poincaré est le résultat suivant, qu'il attribue à Schwarz, et dont la preuve découle en effet immédiatement des techniques inventées par ce dernier dans [Schw1870a] (même s'il semble que Schwarz n'ait pas réalisé en 1870 qu'il avait démontré un énoncé aussi général) :

Théorème. — *Soit Ω un domaine d'adhérence compacte, à bord analytique ou polygonal, dans une surface de Riemann. Alors Ω admet une fonction de Green⁽¹³⁾. Par suite, si Ω est simplement connexe, il est biholomorphe au disque unité de \mathbb{C} .*

Poincaré considère une exhaustion d'une surface de Riemann simplement connexe $\tilde{\Sigma}$ par des domaines simplement connexes d'adhérences compactes (sans d'ailleurs en justifier l'existence) ; il applique le théorème de Schwarz à chacun de ces domaines, ce qui lui fournit une suite de fonctions de Green ; si cette suite converge, la limite est automatiquement une fonction sur $\tilde{\Sigma}$, harmonique positive avec un pôle logarithmique, et $\tilde{\Sigma}$ est biholomorphe à un ouvert du disque unité. La convergence n'a cependant pas lieu en général ; c'est pourquoi, au lieu du revêtement universel \tilde{S} de la surface de Riemann S qui l'intéresse, Poincaré doit considérer le revêtement universel $\tilde{\Sigma}$ d'une surface Σ qui est un revêtement ramifié de S .

Le résultat obtenu par Poincaré en 1883 est une avancée exceptionnelle du point de vue de la théorie des fonctions analytiques, mais il est beaucoup moins satisfaisant si l'on s'intéresse aux surfaces de Riemann pour elles-mêmes — et non comme un simple outil pour l'étude des fonctions analytiques.

Rappelons que Klein et Poincaré avaient montré (ou, du moins, estimaient avoir montré) que le revêtement universel \tilde{S} d'une surface de Riemann algébrique S est toujours biholomorphe à la sphère, au plan complexe, ou au disque unité, et que par conséquent S s'identifie au quotient d'une de ces surfaces par un groupe d'automorphismes. Si S n'est pas algébrique, Poincaré arrive « seulement » à démontrer en 1883 que S admet un revêtement ramifié $\tilde{\Sigma}$ qui est biholomorphe à un domaine simplement connexe borné U de \mathbb{C} . La première faiblesse dans cet énoncé est le fait qu'on ne contrôle pas le domaine U , qui dépend

13. Rappelons qu'une fonction de Green sur Ω est une fonction positive, harmonique avec un pôle logarithmique, qui tend vers 0 au voisinage du bord de Ω .

a priori de la surface S (rappelons qu'à l'époque, le théorème de représentation conforme de Riemann n'est démontré rigoureusement que dans des cas particuliers). Et même si l'on savait identifier le domaine U , la présence de points de ramifications affaiblit considérablement le résultat : en effet, une surface de Riemann S et un domaine U de \mathbb{C} étant fixés, il existe en général une infinité de revêtements ramifiés $\pi : U \rightarrow S$ qui ne s'obtiennent pas les uns à partir des autres en composant par des biholomorphismes de U . Enfin, on a du mal à se satisfaire du résultat de Poincaré quand on songe qu'il conduit à « uniformiser » le plan complexe par un ouvert du disque unité!⁽¹⁴⁾

Dans sa conférence au congrès international des mathématiciens en 1900 [Hil1900b], Hilbert salue les travaux de Poincaré sur les surfaces de Riemann algébriques ainsi que son théorème d'uniformisation des fonctions analytiques, mais souligne aussi l'imperfection de ce dernier résultat. Au vu de l'importance de la question, il estime qu'il est nécessaire de tenter d'obtenir pour les surfaces de Riemann générales un résultat aussi satisfaisant que celui obtenu par Klein et Poincaré pour les surfaces algébriques. C'est l'objet de son vingt-deuxième problème.

Une première avancée sera effectuée dès 1900 par W. Osgood, qui montrera :

Théorème. — *Tout domaine simplement connexe du plan complexe qui admet une fonction harmonique positive avec un pôle logarithmique (par exemple, tout domaine simplement connexe borné) est biholomorphe au disque unité.*

À ce stade, on sait donc que toute surface de Riemann admet un revêtement ramifié biholomorphe au disque unité de \mathbb{C} . Il faudra attendre encore sept ans pour que soit démontré le théorème d'uniformisation tel que nous le connaissons aujourd'hui...

Plusieurs auteurs essaieront de montrer sans succès de donner une solution au vingt-deuxième problème de Hilbert dans les toutes premières années du vingtième siècle. Citons en particulier Johansson ([Joh1906a, Joh1906b]).

14. On lira avec intérêt la présentation qu'Osgood fait du résultat de Poincaré et de ses insuffisances dans une série de conférences à Cambridge en 1898 [OsgW1898].

Au cours de la séance du 11 mai 1907 de la Société des sciences de Göttingen, Klein présente une note de P. Koebe [Koe1907b] qui annonce avoir démontré le théorème d'uniformisation général :

Théorème. — *Toute surface de Riemann simplement connexe (qui porte une fonction méromorphe non constante⁽¹⁵⁾) est biholomorphe à la sphère de Riemann, au plan complexe, ou au disque unité.*

Le cas des surfaces de Riemann simplement connexes compactes (*i.e.* homéomorphes à la sphère \mathbb{S}^2) a été réglé par les travaux de Schwarz et Neumann : elles sont toutes biholomorphes à la sphère de Riemann. Reste donc le cas des surfaces de Riemann simplement connexes non compactes. Étant donnée une telle surface de Riemann S , Koebe considère une exhaustion de S par une suite croissante $(D_n)_{n \geq 0}$ de domaines simplement connexes d'adhérences compactes, à bords polygonaux, et fixe un point $p_0 \in D_0$. Les travaux de Schwarz montrent l'existence, pour chaque n , d'un biholomorphisme φ_n de D_n sur le disque unité de \mathbb{C} qui envoie un point p_0 fixé sur l'origine. Si la suite des modules des dérivées en p_0 des φ_n est bornée, alors les travaux de Harnack et d'Osgood impliquent que la surface S est uniformisée par le disque unité. Tout le travail de Koebe consiste à montrer que, lorsque la suite des dérivées des φ_n en p_0 diverge, on peut construire, à partir de la suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ une autre suite de biholomorphismes $(\psi_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers un biholomorphisme de S sur le plan complexe. L'argument clé pour contrôler la suite $(\psi_n)_{n \geq 0}$ est très astucieux, et contient une version embryonnaire de ce qu'on appelle le *lemme $\frac{1}{4}$ de Koebe*. Même si elle est parfois difficile à lire⁽¹⁶⁾, la preuve de Koebe est néanmoins parfaitement rigoureuse.

15. À l'époque, les surfaces de Riemann sont toujours pensées comme étalées au-dessus du plan. La preuve de Koebe s'étend cependant aux surfaces de Riemann abstraites.

16. Souvenons-nous que [Koe1907a] est une communication à la Société de sciences de Göttingen, dont le contenu est souvent destiné à être détaillé dans un article publié dans un « vrai » journal mathématique. Koebe ne cessera d'ailleurs, tout au long de sa vie, de reprendre les différentes preuves du théorème d'uniformisation pour les populariser, les préciser, les généraliser, en améliorer la rédaction. Voir entre autres [Koe1907a, Koe1907b, Koe1908a, Koe1909a, Koe1909b, Koe1909c, Koe1909d, Koe1910b, Koe1911].

Six mois plus tard, paraît dans *Acta Mathematica* un article [Poin1907] dans lequel Poincaré propose lui aussi une preuve du théorème d'uniformisation général, très différente de celle de Koebe⁽¹⁷⁾. Étant donnée une surface de Riemann simplement connexe non compacte S , Poincaré considère l'anneau A obtenu en ôtant à S un petit disque. Il remarque que la surface S sera biholomorphe au plan complexe ou au disque unité dès lors que l'anneau A admettra une *majorante de Green*, c'est-à-dire une fonction harmonique positive avec au moins un pôle logarithmique. Reste à construire une telle fonction. Pour ce faire, Poincaré généralise à nouveau le *procédé alternant*, inventé par Schwarz. Poincaré donne une interprétation physique du procédé obtenu, qu'il nomme « *méthode du balayage* ». Supposons qu'on veuille construire une fonction u sur une surface de Riemann A , avec un pôle logarithmique en un point p_0 , harmonique sur $A \setminus \{p_0\}$, et qui tend vers zéro à l'infini. Une telle fonction peut être pensée comme le potentiel électrique associé à une charge ponctuelle négative située au point p_0 . Pour la construire, Poincaré imagine alors :

- de partir d'une fonction quelconque $u_0 : A \rightarrow \mathbb{R}$ avec un pôle logarithmique en p_0 et qui tend vers zéro à l'infini, qu'il voit comme le potentiel associé à une distribution de charge $\rho_0 := \Delta u_0$;
- de rendre petit à petit chaque région de la surface A « conductrice », afin de « balayer » les charges (sauf celle située en p_0 , maintenue artificiellement en place) vers le bord de ces régions. On espère ainsi qu'à l'issue du processus, toutes les charges (sauf celle située en p_0) auront été « balayées à l'infini » ; le potentiel associé sera alors la fonction recherchée. Mathématiquement, on recouvre A par des disques holomorphes, et on construit une suite de fonctions continues $(u_n)_{n \geq 0}$, où u_{n+1} coïncide avec u_n partout sauf sur un des disques et est harmonique sur ce disque.

Bien sûr, tout le travail consiste à montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge. Comme souvent, la preuve de Poincaré contient des intuitions lumineuses, mais n'est pas un modèle de rigueur. En particulier, Poincaré utilise un argument physique (la conservation de la charge électrique totale lorsqu'on « rend conducteur » un disque dans la surface de

17. Poincaré n'avait pas connaissance de la preuve de Koebe lorsqu'il a rédigé son article : celui-ci a été soumis en mars 1907.

Riemann), difficile à justifier mathématiquement sans utiliser la théorie des distributions.

Le mémoire de Poincaré est paru au début du mois de novembre 1907. Dès la fin de ce même mois, Koebe, qui l'a lu avidement, soumet une nouvelle note à la Société des sciences de Göttingen [Koe1907b]. Cette note contient une preuve du théorème d'uniformisation général, largement inspirée par celle de Poincaré. En fait, Koebe reprend la stratégie globale de la preuve, mais remplace la méthode du balayage par une construction beaucoup plus directe, basée sur une exhaustion de A par des anneaux d'adhérences compactes : on gagne en simplicité (et en rigueur) ce qu'on perd en intuition physique.

Dans l'introduction de la partie B, nous expliquions que Klein était, en 1881, un professeur établi qui se trouverait vite débordé par le jeune Poincaré. En 1907, c'est Poincaré qui est établi et qui doit se sentir un peu bousculé par la vigueur du jeune Koebe qui n'a que 25 ans. Une anecdote montre bien les différences de statut des deux concurrents : au congrès international à Rome en 1908, Koebe et Poincaré doivent tous les deux donner une conférence. Celle de Koebe s'intitule « Sur le problème de l'uniformisation... » ; celle de Poincaré s'intitule « Sur l'avenir des mathématiques » !

Résumons. En 1883, Poincaré a montré que toute surface de Riemann (qui porte une fonction méromorphe) admet un revêtement ramifié qui est biholomorphe à un ouvert simplement connexe borné du plan. Sa preuve s'appuie sur les idées de Schwarz qui permettent d'uniformiser tout domaine simplement connexe relativement compact à bord polygonal dans une surface de Riemann. Elle utilise d'une exhaustion de toute surface de Riemann simplement connexe non compacte par une suite de domaines simplement connexes relativement compacts à bord polygonaux. L'existence d'une telle exhaustion — que Poincaré ne justifie pas — n'est pas bien difficile à démontrer dans le cas d'une surface de Riemann étalée au-dessus du plan⁽¹⁸⁾ (voir la section XI.2). En 1900, Osgood montre que tout ouvert borné simplement connexe du plan est biholomorphe au disque. On sait alors que toute surface de Riemann admet un revêtement ramifié qui est biholomorphe au disque. Dans son intervention au congrès international des mathématiciens, Hilbert

18. Jusqu'aux travaux de Weyl dans les années 1910, une surface de Riemann est *par définition* étalée au-dessus du plan.

souligne les insuffisances de ce résultat, et incite les mathématiciens à chercher à montrer un « vrai » résultat d'uniformisation pour les surfaces de Riemann non algébriques. En mai 1907, Koebe publie une première preuve du théorème d'uniformisation général, utilisant elle aussi les travaux de Schwarz et l'existence d'exhaustions par des domaines simplement connexes relativement compacts à bord polygonaux. Cette preuve nous semble parfaitement correcte et rigoureuse. Un peu avant la publication du mémoire de Koebe, Poincaré avait lui aussi mis au point et rédigé une preuve du théorème d'uniformisation général, qui paraîtra début novembre 1907. Cette preuve, basée sur une intuition physique, nous semble très naturelle. On ne peut cependant la rendre rigoureuse sans avoir recours à la théorie des distributions. Dès la fin novembre 1907, Koebe publie une version « simplifiée » de la preuve de Poincaré, où la méthode du balayage est remplacée par l'utilisation des travaux de Schwarz et d'une exhaustion d'une surface de Riemann simplement connexe privée d'un petit disque par des anneaux relativement compacts. Cette version « nettoyée » de la preuve de Poincaré est certes moins intuitive que la version originale, mais elle est particulièrement courte, et nous semble rigoureuse en l'état.

À la fin de l'année 1907, le théorème d'uniformisation est fermement établi. Bien sûr, le processus d'assimilation de ce résultat est loin d'être terminé, et il faudra encore au moins une quinzaine d'années pour aboutir aux preuves que l'on trouve dans les livres aujourd'hui (voir, à ce propos, notre bibliographie commentée). Surtout, les mathématiciens cherchent déjà à aller au-delà du théorème d'uniformisation : Koebe est déjà en train de réfléchir à l'uniformisation des surfaces de Riemann qui ne sont pas simplement connexes [Koe1910b], Hilbert a déjà invité les mathématiciens à s'interroger sur l'uniformisation des variétés complexes de dimensions supérieures... mais notre livre s'arrête en 1907.

Le théorème d'uniformisation des domaines simplement connexes d'adhérence compacte de Schwarz, les résultats d'uniformisation des fonctions obtenus par Poincaré en 1883, et le théorème d'Osgood font l'objet de notre chapitre XI. Nous expliquons ensuite, dans notre chapitre XII, la première preuve que Koebe donne du théorème d'uniformisation général dans sa note [Koe1907a]. Enfin, notre chapitre XIII est consacré à la preuve que Poincaré donne de ce même théorème

dans [Poin1907]. Nous y expliquerons également la simplification de la preuve de Poincaré proposée par Koebe dans [Koe1907b].

Encadré : La classification des surfaces

De manière bien naturelle, la théorie des surfaces de Riemann — qui est le véritable sujet de ce livre — s'est développée en parallèle avec la théorie *topologique* des surfaces, c'est-à-dire des variétés de dimension 2 qui ne sont pas munies *a priori* d'une structure complexe. L'histoire de ces développements pourrait faire l'objet d'un autre livre mais il nous a semblé utile d'en indiquer ici quelques jalons importants. Dans leurs marches vers le théorème d'uniformisation général, Poincaré et Koebe utilisent, démontrent, ou tout simplement anticipent, des résultats sur la topologie des surfaces. Souvent, ces emprunts à la topologie sont complètement implicites. Une fois de plus, la situation est un peu confuse.

La classification topologique des surfaces compactes s'est faite peu à peu, gagnant progressivement en rigueur et en généralité. Le concept même de surface prendra du temps avant de s'imposer, en commençant par les surfaces plongées dans l'espace de dimension 3, jusqu'aux surfaces abstraites. Par ailleurs, deux surfaces plongées dans l'espace de dimension 3 peuvent être homéomorphes sans qu'il existe un homéomorphisme de l'espace qui envoie l'une sur l'autre : un tore par exemple peut être noué dans l'espace. Enfin, il faudra distinguer les degrés de régularité des surfaces étudiées, qui peuvent être lisses ou seulement topologiques. Les ensembles fractals qui apparaissent en même temps que les groupes kleinien fournissent par exemple de multiples courbes qui ne sont pas différentiables et dont l'allure locale peut effrayer le candidat à une classification topologique.

Le théorème aujourd'hui classique se résume de la façon suivante :

Théorème. — *Toute surface compacte orientable est homéomorphe à une somme connexe de tores.*

Ce théorème était « connu » — et utilisé — par B. Riemann, même s'il ne cherche pas à le justifier. Sur l'histoire de ce théorème on

pourra se référer à [Pont1974] : les noms les plus importants sont ceux de F. A. Möbius [Möb1863], C. Jordan [Jor1866] et W. von Dyck [Dyc1888]. Les premières preuves satisfaisant (presque) aux conditions de rigueur d'aujourd'hui datent des années 1860 et utilisent deux sortes d'idées différentes. Elles supposent, implicitement, que les surfaces sont lisses.

Möbius donne d'abord une preuve remarquable du cas des surfaces compactes dans l'espace (ce qui *a posteriori* équivaut à l'orientabilité). Il s'agit de choisir une fonction sur la surface à valeurs réelles et d'étudier la nature de ses courbes de niveau. Par des modifications successives de la fonction, on la simplifie pour supprimer peu à peu des points critiques et la ramener à une forme « standard ». On y reconnaît donc le germe de ce qui deviendra la théorie de Morse. Il démontre ainsi que la surface peut être découpée en deux surfaces planaires, que celles-ci sont caractérisées à homéomorphisme près par le nombre n de leurs composantes de bord, et que ce nombre est l'unique invariant de la surface close de départ. Il remarque aussi que $n - 1$ est le plus grand nombre de courbes fermées disjointes ne disconnectant pas la surface, retrouvant ainsi la définition du genre de Riemann. Ces idées seront développées et consolidées par la suite, entre autres par J.C. Maxwell [Max1870] ou C. Jordan [Jor1872].

Jordan suit une autre approche, reprenant en quelque sorte la méthode de Riemann, qui consiste à découper la surface le long de courbes fermées simples et disjointes. Les surfaces étudiées par Jordan sont compactes, lisses, et sans bord, mais ne sont pas nécessairement plongées dans l'espace usuel : on autorise des lignes d'auto-intersection, c'est-à-dire qu'il s'agit en fait de surfaces immergées.

La classification des surfaces non orientables s'effectue aussi progressivement. En 1862, J.B. Listing (à qui l'on doit également le mot « topologie » [Lis1847]) décrit la surface non orientable à bord qu'on appelle aujourd'hui la bande de Möbius [Lis1861]. C'est Klein qui décrit en 1882 la « bouteille » non orientable qui porte son nom dans un article que nous avons déjà discuté [Kle1882c]. En 1886, Möbius dégage clairement le concept d'orientabilité [Möb1886]

et Dyck obtiendra ensuite la classification des surfaces compactes, lisses, éventuellement à bord, éventuellement non orientables [Dyc1888]. Le tome 6 des œuvres de Poincaré contient un lexique permettant de passer du vocabulaire topologique de 1950 vers celui de Poincaré. Sur la ligne « bande de Möbius », on trouve la terminologie de Poincaré : « la surface unilatère que tout le monde connaît. »

Tout cela est précisé dans un article de Dehn et Heegaard en 1907 [DeHe1907]. Les surfaces sont cette fois triangulées, elles peuvent être non orientables et leurs bords peuvent être non vides. La classification est de nature combinatoire et les preuves convaincantes. Klein notera à propos de cet article qu'il est « écrit de manière assez abstraite... Il commence avec la formulation des notions et des faits de base de topologie. Ensuite, tout le reste est déduit de manière purement logique. Ceci est en contraste complet avec la présentation inductive que j'ai toujours recommandée. Pour être compris pleinement, cet article présuppose du lecteur qu'il a déjà travaillé sur ce sujet en profondeur de manière inductive » [Kle1925].

La description des surfaces *topologiques* à homéomorphisme près prendra plus de temps, comme nous allons le voir.

Le théorème de la courbe de Jordan et le théorème d'Osgood-Schoenflies

Théorème. — *Le complémentaire d'une courbe fermée simple dans le plan a exactement deux composantes connexes.*

Ce théorème a été énoncé par Jordan en 1887 [Jor1887]. La « démonstration » proposée par Jordan n'a pas semblé convaincre les commentateurs [Veb1905, Ale1920, Schoe1906, DoTi1978] et il faut noter qu'elle supposait que l'énoncé est évident dans le cas où la courbe est polygonale (ou lisse)... La démonstration dans ce cas polygonal sera en fait obtenue par Schoenflies en 1896 [Schoe1896]. La première preuve complète semble due à Veblen en 1905 [Veb1905].

Replaçons ces dates par rapport aux protagonistes de cette partie de notre livre — Poincaré et Koebe — entre 1883 et 1907. Puisqu'ils s'intéressent à des surfaces de Riemann, donc lisses, tous ces théorèmes de classification des surfaces lisses sont à leur disposition, et ils les utilisent largement, sans toujours les citer.

Le théorème suivant, particulièrement délicat dans le cas des courbes non lisses, fera progressivement son apparition pendant cette même période.

Théorème. — *Toute courbe fermée simple dans le plan peut être envoyée sur un cercle par un homéomorphisme global du plan.*

Voici quelques commentaires sur l'histoire de ce résultat traditionnellement appelé « théorème de Schoenflies ». Nous suivons les indications provenant d'une publication récente de Siebenmann [Sieb2005].

Les arguments de Jordan allant dans la direction du théorème de la courbe de Jordan [Jor1887], même s'ils n'étaient pas convainquants, montraient essentiellement que la composante bornée du complémentaire d'une courbe est homéomorphe à un disque ouvert. Ce fait sera explicitement démontré par des méthodes conformes par Osgood en 1900, dans un article que nous discutons plus loin [OsgW1900].

C'est en 1903 qu'Osgood énoncera le théorème de Schoenflies [OsgW1902] mais il faudra attendre encore une dizaine d'années pour les premières preuves complètes, basées sur des méthodes conformes [Car1913a, Car1913b, Car1913c, Koe1913a, Koe1913b, Koe1915, OsTa1913, Stu1913]. Schoenflies énoncera aussi clairement « son » théorème en 1906 [Schoe1906]. Sa preuve, tout à fait correcte pour le cas où la courbe est polygonale ou lisse ne l'est cependant pas dans le cas général.

La première preuve correcte fondée uniquement sur des arguments topologiques (et non pas conformes) semble due à Tietze en 1914 [Tie1913, Tie1914] ou à Antoine en 1921 [Ant1921]. Le nom « théorème de Schoenflies » est dû à Wilder en 1949 [Wil1949].

La classification *topologique* des surfaces

Insistons encore sur le fait que les surfaces de Riemann qui intéressent Koebe et Poincaré sont lisses et que la description des surfaces topologiques ne les intéressait pas directement à l'époque que nous discutons ici. Il nous semble cependant utile de décrire très rapidement les développements ultérieurs relatifs à ces surfaces topologiques.

Le théorème de Schoenflies sera la clé qui permettra à Radó de démontrer en 1925 que toutes les surfaces topologiques dénombrables à l'infini sont triangulables et donc d'obtenir leur classification dans le cas compact [Rad1925].

Le cas des surfaces non compactes sera traité grâce à l'introduction de la compactification par les bouts, due à Freudenthal, Kerékjártó et Schoenflies. La classification complète dans le cas non compact est due à Kerékjártó en 1923 [Ker1923] et elle sera précisée par Richards en 1963 et Goldman en 1971 [Ric1963, GolM1971].

Notons en passant ce cas particulier, sur lequel nous reviendrons lors de la preuve du lemme XI.2.1 : une surface simplement connexe non compacte est homéomorphe au plan.

L'uniformisation des fonctions

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de cette dernière partie, au dix-neuvième siècle, le problème de l'uniformisation des surfaces de Riemann était avant tout un problème de théorie des fonctions : étant donnée une fonction analytique y d'une variable x , non uniforme, on cherchait une variable z telle que y et x soient des fonctions uniformes de z . Cela revient à paramétrer la surface de Riemann associée à la fonction multiforme y par une variable z qui décrit un ouvert de \mathbb{C} . Dans son mémoire de 1883, Poincaré réalise un double tour de force. D'une part, il uniformise *toutes* les fonctions, en autorisant cependant le paramétrage $z \mapsto (x(z), y(z))$ à avoir des points de ramification. D'autre part, il montre que la variable z peut être astreinte à évoluer dans un ouvert borné simplement connexe du plan. Que le lecteur songe un instant à la diversité et à la complexité des fonctions multiformes – les solutions des équations différentielles algébriques en sont de bons exemples et étaient sûrement l'une des motivations principales de Poincaré – pour se persuader du caractère révolutionnaire de cet énoncé.

Il faudra attendre 1900 et les travaux d'Osgood pour obtenir un paramétrage par le disque. En effet, il résulte du théorème principal de [OsgW1900] que tout ouvert borné simplement connexe (non vide) de \mathbb{C} est biholomorphe au disque unité. Pour ce chapitre, on pourra consulter également [Cho2007, Gra1994].

XI.1. Uniformisation des domaines relativement compacts à bords

Commençons par revenir un instant sur l'étape importante que représentent les travaux de Schwarz au tournant des années 1870. Nous avons vu au chapitre IV comment Schwarz obtenait, dans [Schw1869], des formules « explicites » pour des biholomorphismes du disque sur des domaines polygonaux du plan. Son cheminement logique était le suivant : il supposait *a priori* l'existence d'un biholomorphisme entre le domaine considéré et le disque unité, et déterminait alors une formule pour ce biholomorphisme. Pour compléter ce travail, il lui restait donc à montrer que tout domaine plan polygonal est biholomorphe au disque unité, par exemple en démontrant rigoureusement que de tels domaines admettent des fonctions de Green (voir ci-dessous). C'est à cette tâche qu'il s'attelle dans [Schw1870a], mettant en place une méthode très élégante, aujourd'hui connue sous le nom de *méthode alternante*. Elle sera reprise et généralisée par ses contemporains, par exemple C. Neumann dans le dernier chapitre de [Neum1884], et est encore utilisée aujourd'hui pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles. Poincaré la développera dans son article de 1890 [Poin1890] sous le nom de « méthode du balayage » et l'utilisera de façon cruciale dans la démonstration du théorème général d'uniformisation qu'il donnera en 1907. Les techniques de Schwarz présentent l'intérêt d'aller bien au-delà du cas des domaines polygonaux plans et de s'appliquer aux domaines relativement compacts d'une surface de Riemann quelconque, à bords analytiques ou polygonaux (nous donnerons plus loin un sens précis à ce mot « polygonal » pour un domaine d'une surface de Riemann).

Précisons tout d'abord les liens entre uniformisation et construction de fonctions de Green. Nous avons déjà défini dans la section II.2.2 ce qu'était une fonction de Green pour un ouvert du plan. On peut généraliser la définition à une surface de Riemann quelconque :

Définition XI.1.1. — (Singularité logarithmique simple) : Soit S une surface de Riemann. On dira qu'une fonction $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ présente une *singularité logarithmique simple* en un point p_0 de S si, étant donnée une coordonnée holomorphe locale z définie sur un voisinage de p_0 dans S , la fonction

$$p \mapsto u(p) + \log|z(p) - z(p_0)|$$

est bornée au voisinage de p_0 .

Définition XI.1.2. — (Fonctions de Green) : Soit S une surface de Riemann (connexe) non compacte. La fonction $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction de Green* sur S s'il existe un point p_0 de S tel que :

- (i) u est harmonique sur $S \setminus \{p_0\}$;
- (ii) u présente une singularité logarithmique simple en p_0 ;
- (iii) $u(p)$ tend vers 0 quand p sort de tout compact de S .

Remarque XI.1.3. — Le principe du maximum entraîne qu'une fonction de Green est strictement positive et qu'une surface S ne peut avoir qu'au plus une fonction de Green dont la singularité logarithmique est située en un point donné.

L'intérêt des fonctions de Green vis-à-vis de l'uniformisation des surfaces de Riemann est rendu clair par le théorème ci-dessous.

Théorème XI.1.4. — *Si la surface de Riemann simplement connexe S admet une fonction de Green, alors S est biholomorphe au disque unité \mathbb{D} .*

Démonstration. — La preuve est très proche de celle de la section II.2.2 qui traitait le cas où S était un ouvert simplement connexe du plan.

Soit u une fonction de Green sur S dont la singularité logarithmique se situe au point p_0 de S . Soit α la 1-forme définie sur $S \setminus \{p_0\}$ par

$$\alpha(\xi) = -du(i\xi).$$

L'harmonicité de u assure que la forme α est fermée. Soit γ un petit lacet qui tourne une fois autour de p_0 . Un calcul dans une carte autour de la singularité donne

$$\int_{\gamma} \alpha = -2\pi.$$

Notons u^* une primitive de α . C'est une fonction multiforme (puisque l'intégrale de α sur γ est non nulle) mais la fonction $F := e^{-(u+iu^*)}$ est bien définie (*i.e.* uniforme) : en effet, la surface S étant simplement connexe, tout lacet sera homologue à un multiple de γ et l'intégrale de α le long de ce lacet sera donc égale à un multiple de 2π . Puisque $u > 0$, F est à valeurs dans le disque unité \mathbb{D} . Quand p sort de tout compact, $u(p) \rightarrow 0$ (par définition de la fonction de Green) et donc $|F(p)| \rightarrow 1$. Autrement dit, l'application F est propre, ce qui implique que son image est fermée. Cette image est également ouverte, puisque c'est toujours le cas pour une application holomorphe non constante. Ceci montre

que F est surjective. Il nous reste à vérifier que F est injective. Puisque $F : S \rightarrow \mathbb{D}$ est propre et holomorphe, la fibre $F^{-1}(w)$ d'un point w de \mathbb{D} est de cardinal fini, et ce cardinal est localement constant, en comptant les multiplicités. Comme $F^{-1}(0) = \{p_0\}$ et que $F'(p_0) \neq 0$, chaque fibre a un unique élément : l'application F est bien injective. \square

Voici maintenant le résultat qu'on peut déduire des techniques développées par Schwarz dans [Schw1870a] :

Théorème XI.1.5. — *Soit S une surface de Riemann et Ω un domaine de S d'adhérence compacte, à bord analytique ou polygonal. Pour toute fonction continue $u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$:*

1. *il existe une unique extension continue $\tilde{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, harmonique dans l'intérieur de Ω ;*
2. *si p_0 est un point de l'intérieur de Ω , il existe une unique extension continue $\bar{u} : \bar{\Omega} \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, harmonique sur $\Omega \setminus \{p_0\}$ et présentant une singularité logarithmique simple en p_0 .*

En particulier :

Corollaire XI.1.6. — *Soit S une surface de Riemann et Ω un domaine simplement connexe d'adhérence compacte, à bord analytique ou polygonal. Alors, pour tout point p_0 de Ω , il existe une fonction de Green sur Ω dont la singularité logarithmique est située en p_0 . Par conséquent, Ω est biholomorphe au disque unité.*

Comme nous l'avons déjà mentionné, le corollaire XI.1.6, joint au théorème IV.1.2, permet de montrer que toute surface de Riemann compacte et simplement connexe est biholomorphe à la sphère de Riemann (voir chapitre IV).

Précisons que dans l'énoncé du théorème XI.1.5 et celui du corollaire XI.1.6, un *domaine à bord analytique* est un ouvert dont le bord est une sous-variété analytique réelle non vide de dimension un⁽¹⁾. Par *domaine à bord polygonal*, on entend un ouvert dont le bord est une sous-variété topologique de dimension un et pour lequel il existe un atlas holomorphe de la surface de Riemann tel que, dans chaque carte qui rencontre le bord du domaine, celui-ci apparaisse soit comme

1. En particulier, une surface de Riemann compacte ou une surface de Riemann compacte privée d'un point n'est pas un domaine à bord analytique.

un segment de droite, soit comme un « coin » (deux segments issus d'un même point). Précisons que le théorème XI.1.5 n'est pas tout à fait énoncé comme ci-dessus par Schwarz dans [Schw1870a] mais ses contemporains le lui ont explicitement attribué sous cette forme. En effet, les techniques qu'il met en œuvre s'adaptent, quitte à lire parfois « entre les lignes », pour obtenir ce degré de généralité.

Démonstration du corollaire XI.1.6. — Par le second point du théorème XI.1.5, appliqué à la fonction nulle sur le bord $\partial\Omega$, l'ouvert Ω admet une fonction de Green. Il suffit alors d'appliquer à cet ouvert le théorème XI.1.4 pour obtenir le corollaire. \square

Démonstration du théorème XI.1.5. — On commence par déterminer en chaque point p de $\bar{\Omega}$, un voisinage « privilégié » D_p de p dans $\bar{\Omega}$. Si p est un point intérieur à Ω , on prendra comme voisinage D_p un petit disque euclidien dans une coordonnée holomorphe de sorte que \bar{D}_p est contenu dans Ω . Si p appartient à la partie lisse du bord de Ω , alors il existe, par hypothèse sur $\partial\Omega$, une carte holomorphe $z_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ avec U_p un voisinage de p dans S , telle que $z_p(U_p \cap \partial\Omega)$ soit un segment de droite. On considère dans $z_p(U_p \cap \bar{\Omega})$ un triangle euclidien T dont un des côtés est inclus dans $z_p(U_p \cap \partial\Omega)$ et tel que $z_p(p)$ ne soit pas un sommet de T . On prend dans ce cas $D_p = z_p^{-1}(\text{Int}(T))$. Enfin, si $\partial\Omega$ est polygonal et que p est sur un « sommet » de $\partial\Omega$, alors on choisit une carte holomorphe $z_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ telle qu'au voisinage de p , la carte z_p envoie $\partial\Omega$ sur le bord d'un secteur angulaire euclidien de sommet $z_p(p)$. On complète ce secteur en un triangle et on prend comme précédemment la pré-image par z_p pour obtenir le voisinage D_p souhaité.

Pour chaque p de $\bar{\Omega}$, le voisinage D_p ainsi construit a la propriété importante qu'il existe un biholomorphisme $z : D_p \rightarrow \mathbb{D}$ de D_p vers le disque unité \mathbb{D} qui se prolonge en un homéomorphisme de \bar{D}_p vers $\bar{\mathbb{D}}$. C'est clair si p est intérieur à Ω et lorsque p est sur le bord de Ω , cela découle des travaux de [Schw1869] (voir section IV.2.3 : pour tout triangle euclidien T , il existe en effet une fonction du type

$$z \mapsto A + \int_0^z \frac{B}{(w-a)^{1-\alpha}(w-b)^{1-\beta}} dw$$

envoyant biholomorphiquement le demi-plan supérieur sur T et s'étendant en un homéomorphisme au bord. On considère dans la suite un recouvrement fini \mathcal{R} de $\bar{\Omega}$ par des voisinages comme ci-dessus.

Si D est un domaine de \mathcal{R} et $u : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (ou éventuellement continue par morceaux), on définit l'*extension harmonique de u dans D* comme suit. Après identification de \overline{D} avec le disque unité $\overline{\mathbb{D}}$ par un biholomorphisme, on considère u comme une fonction définie sur le bord de \mathbb{D} . Il existe une fonction harmonique $\tilde{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{u}(p)$ tend vers $u(\zeta)$ lorsque le point p du disque tend vers un point ζ du cercle $\partial\mathbb{D}$ qui n'est pas un point de discontinuité de u . Cette fonction \tilde{u} est unique et elle est donnée par la formule de Poisson

$$\tilde{u}(z) = \int_0^1 \frac{1 - |z|^2}{|1 - e^{-2i\pi\theta} z|^2} u(e^{2i\pi\theta}) d\theta.$$

On considère maintenant \tilde{u} comme une fonction définie sur \overline{D} : c'est l'extension harmonique de u à D .

Maintenant, si D est un domaine de \mathcal{R} et $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $u|_{\partial D}$ est continue par morceaux, on la rend harmonique dans D en formant la fonction $B(u, D)$ qui coïncide avec u sur $\Omega \setminus D$ et avec l'extension harmonique de $u|_{\partial D}$ dans D . Remarquons que si l'on est parti d'une fonction u continue sur $\overline{\Omega}$, $B(u, D)$ reste continue.

1. Existence d'une extension harmonique. — Considérons une fonction continue $u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et commençons par étendre u à $\overline{\Omega}$ en une fonction $u_0 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut u sur $\partial\Omega$ et $m = \inf_{\partial\Omega} u$ sur Ω . Nous allons successivement rendre u_0 harmonique dans une suite infinie (D_n) de disques du recouvrement \mathcal{R} . On commence par choisir $D_1 \in \mathcal{R}$ tel que $\overline{D_1} \cap \partial\Omega$ soit d'intérieur non vide dans $\partial\Omega$. Puis on se fixe une suite finie D_1, \dots, D_r d'éléments de \mathcal{R} telle que $\partial D_{j+1} \cap D_j$ soit non vide pour chaque $j = 1, \dots, r-1$ et telle que tout D de \mathcal{R} soit égal à un certain D_j (éventuellement à plusieurs); la suite (D_n) est alors définie par $D_1, \dots, D_r, D_1, \dots, D_r, \dots$ à partir de (D_n) , on construit une suite de fonctions u_0, u_1, \dots par la formule $u_{n+1} = B(u_n, D_{n+1})$.

Le lecteur vérifiera que cette suite est bien définie et que les fonctions u_n sont continues sur l'intérieur de Ω . Elles ne sont pas toutes continues sur $\overline{\Omega}$. En revanche, u_n est continue sur $\overline{\Omega}$ dès que n est supérieur à r . En effet, soit p un point du bord de Ω . Il existe un indice k inférieur à r tel que p est dans l'intérieur de $\overline{D_k} \cap \partial\Omega$. La fonction u_{k-1} en restriction à un voisinage de p dans ∂D_k est continue; son extension harmonique à D_k définie par la formule de Poisson est aussi continue en p . On démontre alors par récurrence que toutes les fonctions u_n ,

pour $n \geq k$, sont continues en p . En effet, supposons que ce soit le cas pour u_n . Alors si ∂D_{n+1} ne contient pas p , on a $u_{n+1} = u_n$ au voisinage de p dans $\bar{\Omega}$, ce qui montre que u_{n+1} est continue en p . Sinon, le point p est dans ∂D_{n+1} . Mais puisque la restriction de u_n à ∂D_{n+1} est continue en p , son extension harmonique à l'intérieur de D_{n+1} est aussi continue en p . On en déduit bien que u_{n+1} est continue en p et, par récurrence, que u_n est continue en p pour tout n supérieur à r .

Observons aussi que la suite (u_n) est croissante. En effet, considérons une fonction $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $D \in \mathcal{R}$, on ait $B(w, D) \geq w$. C'est par exemple le cas de u_0 d'après le principe du maximum. Soit D' un disque de \mathcal{R} et $w' = B(w, D')$. Nous prétendons que w' vérifie à nouveau $B(w', D) \geq w'$ pour tout disque D de \mathcal{R} . Pour voir cela, remarquons que $B(w', D) = w'$ à l'extérieur de D . De plus, $w' \geq w$ par l'hypothèse faite sur w . Dans $D \setminus D'$, on a $w' = w$, d'où le résultat puisque $B(w', D) \geq B(w, D) \geq w$. Reste à vérifier l'inégalité dans $D \cap D'$; la fonction $B(w', D) - w'$ s'annule sur ∂D et, sur $\partial D'$, elle vaut

$$B(w', D) - w' \geq B(w, D) - w \geq 0.$$

Par le principe du maximum, on a donc $B(w', D) \geq w'$ sur $D \cap D'$. On applique alors ce fait à $w = u_0$, puis à $w = u_1$, etc. pour en déduire que la suite u_n est croissante.

Pour tout entier positif n , on définit $v_n := u_{n+2r} - u_{n+r}$; on a alors $v_{n+1} = B(v_n, D_{n+1})$. Nous allons montrer :

Lemme XI.1.7. — Soit v_0 une fonction continue sur $\bar{\Omega}$, nulle sur le bord de Ω , et (v_n) la suite définie par $v_{n+1} = B(v_n, D_{n+1})$. Alors il existe une constante $0 \leq q < 1$ telle que pour tout entier k , on ait

$$\|v_{(k+1)r}\|_\infty \leq q \|v_{kr}\|_\infty. \tag{XI.1}$$

Démonstration. — Considérons la suite de fonctions f_0, f_1, \dots, f_r sur $\bar{\Omega}$ définie comme suit. La fonction f_0 est nulle sur $\partial\Omega$ et vaut identiquement 1 sur l'intérieur de Ω . On définit alors $f_{k+1} = B(f_k, D_{k+1})$ pour tout $k = 0, \dots, r - 1$ et on pose $q := \sup_{\bar{\Omega}} f_r$. Puisque $v_{kr} \leq f_0 \|v_{kr}\|_\infty$, on en déduit que

$$v_{kr+1} = B(v_{kr}, D_1) \leq B(f_0 \|v_{kr}\|_\infty, D_1) = f_1 \|v_{kr}\|_\infty.$$

Par récurrence, on obtient

$$v_{(k+1)r} \leq f_r \|v_{kr}\|_\infty \leq q \|v_{kr}\|_\infty.$$

Pour démontrer (XI.1), il nous suffit de voir que $q < 1$. Comme cela a été prouvé pour les fonctions u_n , $n \geq r$, la fonction f_r est continue sur $\bar{\Omega}$. La fonction f_r atteint alors son maximum en un point p_0 de $\bar{\Omega}$. Comme le lecteur pourra le constater, f_r n'est pas identiquement nulle et, par conséquent, p_0 appartient à l'intérieur de Ω , donc à l'intérieur d'un certain disque D_j . Remarquons que si une fonction continue par morceaux est comprise entre 0 et 1 sur le bord d'un domaine $D \in \mathcal{R}$ et est strictement inférieure à 1 sur un ouvert non vide de ce bord, alors son extension harmonique, obtenue par la formule de Poisson, est strictement inférieure à 1 sur l'intérieur du domaine. On voit alors que la fonction f_1 prend des valeurs strictement inférieures à 1 sur l'intérieur de D_1 et donc sur un ouvert non vide de ∂D_2 . Alors, f_2 prend des valeurs strictement inférieures à 1 sur l'intérieur de D_2 ; en particulier sur un ouvert non vide de ∂D_3 . De proche en proche, on voit que f_j prend des valeurs strictement inférieures à 1 dans l'intérieur de D_j . Comme la suite (f_k) est décroissante (avec une démonstration similaire à celle qu'on a faite pour la croissance de la suite (u_n)), on a $q = f_r(p_0) \leq f_j(p_0) < 1$. L'inégalité (XI.1) est donc établie. \square

Remarquons que pour tout $i = 1, \dots, r$ et tout entier positif k , on a

$$\|v_{kr+i}\|_\infty \leq \|f_i\|_\infty \|v_{kr}\|_\infty \leq \|v_{kr}\|_\infty \leq q^k \|v_0\|_\infty.$$

La série

$$u_{i+r} + (u_{i+2r} - u_{i+r}) + (u_{i+3r} - u_{i+2r}) + \dots$$

converge uniformément sur $\bar{\Omega}$ vers une fonction continue $U_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut u sur $\partial\Omega$ et qui est harmonique dans D_i (pour le voir, on remarque d'abord que chaque terme de la série est harmonique dans D_i , puis on en déduit que U_i satisfait la formule de la moyenne, grâce au théorème de convergence dominée). Pour conclure la preuve, notons que $U_i \leq U_{i+1}$. En effet, $U_i = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{i+kr}$, $U_{i+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{i+1+kr}$ et $u_{i+kr} \leq u_{i+1+kr}$. Comme $U_{i+r} = U_i$, cela entraîne $U_{i+1} = U_i$ pour tout i . La fonction U_i est donc harmonique à l'intérieur de Ω , continue sur $\bar{\Omega}$ et vaut u sur $\partial\Omega$. Le problème de Dirichlet est résolu.

2. Existence d'une extension harmonique avec singularité logarithmique simple.— On se donne un point p_0 à l'intérieur de Ω . Nous pourrions supposer, quitte à modifier le recouvrement \mathcal{R} , que d'une part, aucun des disques de \mathcal{R} ne contient p_0 dans son bord, d'autre part, p_0 appartient seulement au disque D_{i_0} de la suite D_1, \dots, D_r et a pour coordonnée

$z_{i_0}(p_0) = 0$. On modifie alors la définition de la suite (u_n) comme suit. Le premier terme de la suite est u_{i_0} défini par $u_{i_0}(p) = \log\left(\frac{1}{|z_{i_0}(p)|}\right)$ dans l'intérieur de D_{i_0} et par $u_{i_0} = 0$ en dehors de D_{i_0} . Ensuite, on définit u_{n+1} à partir de u_n par $u_{n+1} = B(u_n, D_{n+1})$ si $n+1$ est différent de i_0 modulo r et $u_{n+1} = u_{i_0} + B(u_n - u_{i_0}, D_{n+1})$ si $n+1$ vaut i_0 modulo r . Il est clair que chaque fonction $u_n : \bar{\Omega} \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue pour $n \geq i_0$ et, comme précédemment, on montre que $u_n \leq u_{n+1}$.

Posons pour tout entier positif $n \geq i_0$, $v_n = u_{n+r} - u_n$. On a alors $v_{n+1} = B(v_n, D_{n+1})$ et les restrictions de v_n au bord de Ω sont identiquement nulles. De plus v_0 est continue. On peut appliquer le lemme XI.1.7 et l'inégalité (XI.1) est donc encore satisfaite dans ce cas. Ainsi, si \tilde{u} désigne l'extension harmonique de u à Ω (obtenue grâce au 1), un raisonnement identique à celui du point 1 montre que pour $i = i_0, \dots, i_0 + r - 1$, les séries

$$U_i = \tilde{u} + u_{i+r} + (u_{i+2r} - u_{i+r}) + \dots$$

convergent uniformément vers une même fonction limite qui est l'extension harmonique de u à Ω avec singularité logarithmique simple en p_0 . □

XI.2. Exhaustion par des domaines relativement compacts simplement connexes

Supposons que l'on veuille uniformiser une surface de Riemann S simplement connexe, non compacte. Au vu du corollaire XI.1.6, une stratégie naturelle est de choisir une exhaustion $D_0 \subset D_1 \subset \dots$ de la surface par des domaines simplement connexes D_k d'adhérences compactes, admettant une fonction de Green g_k avec singularité logarithmique en un point p_0 de D_0 , puis d'essayer de comprendre le comportement de la suite (g_k) . C'est, très sommairement, le point de départ de l'approche que suivront Poincaré en 1883, puis Koebe en 1907. Nous y reviendrons dans les sections à venir. Il faut néanmoins commencer par montrer que l'on peut trouver une exhaustion $D_0 \subset D_1 \subset \dots$ comme ci-dessus. C'est le but du :

Lemme XI.2.1. — *Toute surface de Riemann S non compacte simplement connexe admet une exhaustion par des domaines simplement connexes d'adhérences compactes à bords polygonaux.*

Démonstration. — On peut remarquer que, sans se préoccuper des bords, il est déjà facile de démontrer l'existence d'une famille de domaines simplement connexes d'adhérences compactes si l'on savait que S est homéomorphe à un plan. Cela découlerait de la classification des surfaces mais celle-ci n'était pas disponible avant 1923 pour les surfaces non compactes, et Poincaré et Koebe ne pouvaient donc pas l'utiliser. Cela ne les empêche pas de considérer évidente l'existence d'une telle exhaustion : dans [Koe1907a], Koebe écrit par exemple : « *Die Konstruktion einer allen angeführten Bedingungen genügenden Folge von Bereichen bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten dar.* »⁽²⁾ On peut noter qu'en dimension plus grande, la situation est plus compliquée et que Whitehead a par exemple construit des exemples de variétés *contractiles* de dimension 3 qui ne sont pas homéomorphes à un espace euclidien et n'admettent pas d'exhaustion par des boules topologiques.

En utilisant la classification des surfaces lisses à bord, qui était bien établie à l'époque qui nous intéresse, il n'est cependant pas difficile d'établir l'existence d'une exhaustion $\tilde{D}_0 \subset \tilde{D}_1 \subset \dots$ par des disques topologiques à bords lisses par morceaux. Pour cela, on recouvre S par un nombre dénombrable de petits disques fermés (voir l'encadré XI.1). On peut toujours supposer que les bords de ces disques sont transverses deux à deux si bien que la réunion d'un nombre fini de ces disques est une surface compacte Σ plongée dans S dont le bord est constitué d'un nombre fini de cercles topologiques deux à deux disjoints plongés dans S . On observe alors que la démonstration du théorème de la courbe de Jordan se généralise sans peine à une courbe tracée sur S (car seule la simple connexité du plan est utilisée) de sorte que chaque courbe du bord de Σ découpe S en deux composantes dont l'une est relativement compacte. L'une de ces composantes relativement compactes $\hat{\Sigma}$ contient toutes les autres, si bien que Σ est contenu dans $\hat{\Sigma}$ qui est une surface qui n'a qu'une composante de bord ; il s'agit de Σ dont on a « bouché les trous ». Le genre de $\hat{\Sigma}$ est nécessairement nul pour des raisons « homologiques » car dans le cas contraire on pourrait trouver deux courbes tracées dans $\hat{\Sigma}$ (et donc dans S) qui se coupent transversalement en un unique point ; ce n'est pas possible dans S puisque ceci contredit le théorème de la courbe de Jordan. Ainsi, nous avons construit un

2. « La construction d'une suite de domaines satisfaisant toutes les conditions énumérées ne présente aucune difficulté fondamentale. »

disque fermé contenant une réunion arbitraire finie de disques fermés. L'existence de l'exhaustion par des disques topologiques fermés (\tilde{D}_k) en résulte.

Commençons par démontrer que l'on peut imposer que les membres de cette exhaustion aient un bord polygonal lorsqu'il existe une fonction méromorphe non constante f sur notre surface S (ce qui est, rappelons-le, une hypothèse que Koebe et Poincaré s'imposeront car ils ne disposent pas du concept de surface de Riemann abstraite). Alors, quitte à modifier légèrement les \tilde{D}_k , on peut supposer que les bords $\partial \tilde{D}_k$ ne passent ni par les points de ramification de f , ni par ses pôles. Pour tout entier k , il existe un voisinage U_k de $\partial \tilde{D}_k$ sur lequel f est un biholomorphisme local. Alors $\gamma_k = f(\partial \tilde{D}_k)$ est une courbe fermée lisse de \mathbb{C} (avec d'éventuels points multiples). Si U_k a été choisi assez petit, on peut approcher γ_k avec une précision arbitraire pour la distance de Hausdorff par une courbe polygonale euclidienne fermée ν_k qui se relève dans U_k *via* f en une courbe fermée simple $\tilde{\nu}_k$. On appelle D_k la composante connexe d'adhérence compacte de $S \setminus \tilde{\nu}_k$. Le domaine D_k est simplement connexe, d'adhérence compacte dans S et à bord polygonal par construction. Si, pour chaque k , on choisit $\tilde{\nu}_k$ assez proche de $\partial \tilde{D}_k$, alors $\overline{D_k} \subset D_{k+1}$ et (D_k) est l'exhaustion de S souhaitée.

Si l'on ne fait pas l'hypothèse qu'il existe une fonction méromorphe non constante sur S , il faut faire appel à des arguments beaucoup plus sophistiqués que le lecteur peut omettre en première lecture. Observons par exemple que sur une surface de Riemann abstraite, il n'est pas évident qu'on puisse joindre deux points donnés par une courbe analytique réelle (il faudrait recourir à des méthodes bien postérieures à l'époque que nous considérons pour le démontrer, par exemple en utilisant le fait qu'une surface de Riemann ouverte est *de Stein*, ce qui d'ailleurs entraîne l'existence d'une fonction holomorphe non constante). Voici un argument qui aurait sans doute pu convaincre Poincaré : commençons par étudier deux germes de courbes analytiques réelles dans le plan qui se rencontrent transversalement en un point p avec un certain angle α et cherchons s'il est possible de trouver un germe de difféomorphisme holomorphe au voisinage de p qui transforme les deux courbes en deux droites. Pour cela, on constate qu'un germe de courbe analytique réelle est le lieu des points fixes d'une unique involution anti-holomorphe : la symétrie de Schwarz associée à la courbe. En composant les deux involutions anti-holomorphes associées aux

deux germes de courbes, on obtient un germe de difféomorphisme holomorphe φ qui fixe le point p et dont la dérivée en p est $e^{2i\alpha}$. Si l'on transporte les deux courbes par un germe h de difféomorphisme, φ est conjugué par h . La possibilité de rectifier les deux courbes par un germe de difféomorphisme holomorphe s'avère donc équivalente à la possibilité de conjuguer le germe φ à sa partie linéaire. Le problème de la linéarisation des germes de fonctions holomorphes au voisinage d'un point fixe est un chapitre aujourd'hui classique de la dynamique holomorphe. Lorsque la dérivée au point fixe n'est pas de module 1, Poincaré a montré que cette linéarisation est possible. Mais dans notre situation, la dérivée à l'origine est au contraire de module 1 et la situation est autrement plus délicate. Il a fallu attendre 1942 pour que Siegel démontre que c'est possible lorsque α est un nombre irrationnel satisfaisant à une condition diophantienne [Sieg1942]. On notera que ces nombres diophantiens sont denses parmi les nombres réels. Pour l'histoire de ce problème de « rectification » holomorphe de germes de couples de courbes analytiques réelles, on pourra consulter [Kas1913, Pfe1917].

On part comme précédemment d'une exhaustion $\tilde{D}_0 \subset \tilde{D}_1 \subset \dots$ par des disques topologiques à bords lisses. Pour chaque k , on peut choisir un disque topologique $D_k \subset \tilde{D}_k$ dont le bord soit analytique par morceaux et tel que ∂D_k et $\partial \tilde{D}_k$ soient très proches pour la distance de Hausdorff. On obtient alors une exhaustion (D_k) . Pour assurer que chaque D_k admet une fonction de Green, il faudrait faire fonctionner le second point de la preuve du théorème XI.1.5 sur les domaines D_k . Ce sera possible si les bords de D_k sont polygonaux et pas seulement analytiques par morceaux. Par densité des nombres diophantiens, il est possible de choisir les ouverts D_k ci-dessus de sorte que les angles aux sommets de ∂D_k soient diophantiens, ce qui assure par l'argument que nous venons d'esquisser que tous les coins sont rectifiables et achève la preuve du lemme. \square

On en déduit un corollaire.

Corollaire XI.2.2. — *Toute surface de Riemann S non compacte simplement connexe admet une exhaustion par des domaines simplement connexes d'adhérences compactes, à bords analytiques.*

Démonstration. — Par le lemme précédent, il existe une exhaustion de S par des domaines simplement connexes \tilde{D}_k , d'adhérences compactes

à bords polygonaux. Par le corollaire XI.1.6, il existe pour tout entier k un biholomorphisme $F_k : \tilde{D}_k \rightarrow \mathbb{D}$. On choisit (n_k) une suite d'entiers qui tend vers l'infini et on appelle γ_k l'image réciproque par F_k du cercle de centre 0 et de rayon $1 - \frac{1}{n_k}$. Si D_k est la composante connexe de $\tilde{D}_k \setminus \gamma_k$ dont l'adhérence dans \tilde{D}_k est compacte et si (n_k) tend suffisamment vite vers l'infini, alors $D_0 \subset D_1 \subset \dots$ est une exhaustion de S par des domaines simplement connexes, d'adhérences compactes, à bords analytiques. \square

Encadré XI.1 : Quelques remarques concernant la dénombrabilité

Chaque germe de fonction holomorphe d'une variable se prolonge en une fonction multiforme maximale ou, de manière équivalente, définit une surface de Riemann S munie d'une fonction holomorphe. Dans son article de 1883, Poincaré suppose (implicitement) que la fonction multiforme ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs en chaque point, ou encore que S est à base dénombrable d'ouverts. Dans une note de 1888, Vivanti remarque que cela limite *a priori* la portée du théorème de Poincaré : « Dunque la dimostrazione di Poincaré vale solo per le funzioni aventi la 1 a potenza » [Viv1888a]. Sans surprise, Poincaré répondit immédiatement que cette note « [l]'a vivement intéressé et [lui a] inspiré diverses réflexions ». Les « diverses réflexions » forment un article qui paraît dans le même volume que la note de Vivanti [Poin1888] démontrant en effet qu'une telle fonction multiforme ne prend toujours qu'un nombre au plus dénombrable de valeurs. Ce volume contient également un autre article de Vivanti [Viv1888b] contenant aussi une preuve – malheureusement fautive – de la même assertion... Volterra publiera indépendamment et presque simultanément une autre preuve (correcte et plus détaillée que celle de Poincaré) de ce qu'on appelle aujourd'hui le « théorème de Poincaré-Volterra » [Vol1888].

L'histoire de ce théorème et de ses développements est décrite dans un article très intéressant de Ullrich [Ull2000]. On y apprend en particulier que Cantor et Weierstrass avaient également démontré ce théorème un peu plus tôt. Aujourd'hui, la démonstration n'est

pas compliquée : on peut par exemple considérer les prolongements analytiques de $f_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}$ le long de chemins polygonaux par morceaux à sommets rationnels : l'ensemble de ces chemins est dénombrable et tout prolongement analytique peut se déduire d'un tel chemin. Par la suite, le théorème de Poincaré-Volterra prendra un caractère purement topologique : un espace connexe étalé au-dessus d'un espace séparé à base dénombrable d'ouverts est lui-même à base dénombrable d'ouverts.

Il faut également noter que Radó démontrera en 1925 que *toutes* les surfaces de Riemann (connexes) sont à base dénombrable d'ouverts, sans supposer *a priori* l'existence d'une fonction holomorphe [Rad1925]. Pour une preuve moderne, on peut consulter [Forst1977].

XI.3. Paramétrage par un ouvert simplement connexe du disque

Dans ce paragraphe, nous démontrons le résultat suivant de Poincaré, provenant de [Poin1882c] :

Théorème XI.3.1. — *La surface de Riemann $S(y)$ d'un germe de fonction méromorphe $x \in U \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \mapsto y(x) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ peut être entièrement paramétrée par un ouvert simplement connexe du disque unité.*

Démonstration. — Nous nous donnons une fonction fuchsienne non constante $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ obtenue en considérant un réseau *cocompact* Γ de $\text{Aut}(\mathbb{D})$ et en construisant $F(z)$ comme le quotient de deux séries fuchiennes de la forme

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} R(\gamma(z)) \gamma'(z)^2,$$

où R est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle sur le cercle unité. Rappelons que F est invariante par Γ et s'obtient donc comme composition du revêtement $\mathbb{D} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{D}$ avec une fonction méromorphe non constante sur $\Gamma \backslash \mathbb{D}$. Ceci découle de la surjectivité de F et du fait qu'elle a la propriété de relèvement des chemins : pour tout chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ d'origine un point $\gamma(0) = x_0$ de la sphère de Riemann et

tout point $z_0 \in F^{-1}(\gamma(0))$, il existe un chemin continu $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ tel que $\beta(0) = z_0$ et $F \circ \beta = \gamma$ ⁽³⁾.

Dans la suite de la preuve, nous n’aurons en fait pas besoin de supposer que $S(y)$ est la surface de Riemann d’une fonction mais simplement qu’elle admet une fonction méromorphe non constante; dans le cas de la surface $S(y)$, la fonction x convient et, de surcroît, elle ne ramifie pas. Pour simplifier les notations, on considérera donc une surface de Riemann S que l’on souhaite paramétrer par un ouvert simplement connexe du disque et une fonction $x : S \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ non constante que l’on supposera sans points critiques⁽⁴⁾.

L’idée de Poincaré est d’utiliser la fonction F pour construire une surface de Riemann qui soit à la fois « au-dessus » de S et de \mathbb{D} . Plus précisément, on construit une surface de Riemann Σ et des applications holomorphes $f : \Sigma \rightarrow S$ et $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{D}$ telles que $x \circ f = F \circ h$. Pour ce faire, on considère le produit $S \times \mathbb{D}$ et une composante connexe non vide Σ de la courbe holomorphe d’équation $x \circ \text{pr}_S = F \circ \text{pr}_\mathbb{D}$, où pr_S et $\text{pr}_\mathbb{D}$ sont respectivement les projections de $S \times \mathbb{D}$ sur S et \mathbb{D} . On remarque alors Σ est non singulière puisque x n’a pas de point de ramification. On pose alors $f = \text{pr}_{S|\Sigma}$ et $h = \text{pr}_{\mathbb{D}|\Sigma}$.

Observons que $f : \Sigma \rightarrow S$ est surjective. En effet, fixons un point $(p_0, z_0) \in \Sigma$ et posons $x_0 = x(p_0) = F(z_0)$. Soit p un point quelconque de S et $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ un chemin continu qui relie $p_0 = \alpha(0)$ à $p = \alpha(1)$. On pose alors $\gamma := x \circ \alpha$ et on considère un chemin $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ tel que $\beta(0) = z_0$ et $F \circ \beta = \gamma$. Par connexité de Σ , le point $(\alpha(t), \beta(t))$ de $S \times \mathbb{D}$ appartient à Σ pour tout $0 \leq t \leq 1$. En particulier, $p = \text{pr}_S(p, \beta(1)) = f(\alpha(1), \beta(1))$ est dans l’image de f , si bien que f est bien surjective.

Pour conclure la démonstration du théorème, il reste montrer que le revêtement universel $\tilde{\Sigma}$ de Σ est biholomorphe à un ouvert simplement connexe du disque unité. Poincaré doit tout d’abord *construire* ce revêtement universel; autrement dit, montrer l’existence d’une surface de Riemann simplement connexe $\tilde{\Sigma}$ qui revêt Σ . Il le fait en moins d’une page, de manière très naturelle; nous présentons sa construction dans

3. On notera cependant que la propriété d’unicité n’est pas vérifiée ici puisque F admet des points de ramification.

4. Des points critiques apparaîtraient si, au lieu de la surface de Riemann de la fonction, on lui ajoutait les points correspondant aux singularités « algébriques ». La démonstration fonctionnerait aussi dans ce cas mais nous nous autorisons cette petite simplification.

l'encadré XI.2 ci-dessous. Pour montrer que $\tilde{\Sigma}$ est biholomorphe à un ouvert simplement connexe du disque unité, on utilise l'application $h: \Sigma \rightarrow \mathbb{D}$. C'est une application holomorphe et *non constante*. On peut la voir comme une fonction définie sur $\tilde{\Sigma}$, quitte à la composer à droite par l'application de revêtement $\tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$. On pourra supposer, en la composant éventuellement par un automorphisme du disque unité, qu'elle s'annule exactement à l'ordre 1 en un point p_0 de $\tilde{\Sigma}$. On introduit alors la fonction $t = -\log|h|$ définie sur $\tilde{\Sigma}$. Cette fonction admet une singularité en p_0 , ainsi que d'autres singularités $\{p_i\}_{i \geq 1}$, qui forment une partie discrète de $\tilde{\Sigma}$. Ces singularités sont toutes « de type logarithmique » : si z est une coordonnée holomorphe au voisinage de p_i , il existe un entier n_i tel que $t(p) + n_i \log|z(p) - z(p_i)|$ est bornée. Il est important de remarquer que $n_0 = 1$: autrement dit, le point p_0 est une singularité logarithmique simple (définition XI.1.1). En dehors de ces singularités, la fonction t est harmonique et strictement positive.

Choisissons une exhaustion de $\tilde{\Sigma}$ par des domaines simplement connexes $D_0 \subset D_1 \subset \dots$ compacts, à bords polygonaux (grâce au lemme XI.2.1). On choisit les D_k de sorte que ∂D_k ne contienne aucun pôle de t et que D_0 contienne p_0 . Le théorème XI.1.6 montre que pour tout entier k , l'intérieur de D_k admet une fonction de Green g_k dont la singularité logarithmique se situe en p_0 .

Observons que la suite de fonctions (g_k) est croissante, c'est-à-dire que g_{k+1} est plus grande que g_k sur D_k . En effet, la fonction $g_{k+1} - g_k$ est harmonique sur l'intérieur de D_k et positive sur son bord.

De plus, chacune des fonctions g_k est majorée par t . En effet, la différence $t - g_k$ est positive sur le bord de D_k , elle est harmonique sur l'intérieur de D_k en dehors d'un nombre fini de points en lesquels elle admet une singularité logarithmique ; le principe du minimum montre que $t - g_k$ atteint son minimum sur le bord de D_k .

Cela démontre que la suite $(g_k(p))$ est majorée indépendamment de k lorsque p n'est pas un pôle de t . Si p est un pôle de t différent de p_0 , nous avons encore une majoration. En effet, $g_k(p)$ sera majoré indépendamment de k par le maximum de t sur un petit cercle entourant p . On montre ainsi que (g_k) converge simplement vers une fonction g sur $\tilde{\Sigma} \setminus \{p_0\}$ qui est localement bornée. Le théorème de convergence dominée, que l'on applique dans la formule de Poisson exprimant les valeurs de g_k dans un petit disque en fonction de celles du bord,

implique que g est harmonique sur $\tilde{\Sigma} \setminus \{p_0\}$ et que (g_k) converge uniformément dans la topologie C^∞ sur les compacts de $\tilde{\Sigma} \setminus \{p_0\}$ vers g . Puisque sur un petit voisinage V de p_0 d'adhérence compacte, $g_k - g_0$ est harmonique, $|g_k - g_0|$ est majoré sur V par $\sup_{\partial V} |g_k - g_0|$. Cette dernière quantité est majorée indépendamment de k puisque l'on a convergence uniforme sur les compacts de $\tilde{\Sigma} \setminus \{p_0\}$. Par conséquent $g - g_0$ est bornée au voisinage de p_0 : g admet une singularité logarithmique simple en $\{p_0\}$.

Fixons un point $p_1 \in D_0 \setminus \{p_0\}$. Pour tout entier k , on considère la fonction harmonique conjuguée g_k^* de g_k sur $D_k \setminus \{p_0\}$ définie par

$$g_k^*(p) = \int_{p_1}^p *d g_k.$$

C'est une fonction multiforme mais comme nous l'avons vu dans la preuve du théorème XI.1.4, la fonction $G_k = e^{-(g_k + i g_k^*)}$ est une fonction holomorphe uniforme sur $D_k \setminus \{p_0\}$ qui se prolonge holomorphiquement en p_0 et induit un biholomorphisme de D_k dans le disque unité. Comme (g_k) converge uniformément sur les compacts et dans la topologie C^1 vers g , la suite (G_k) converge uniformément sur les compacts vers la fonction holomorphe $G = e^{-(g + i g^*)}$. Cette fonction n'est pas constante puisque g admet une singularité logarithmique simple en p_0 . Le théorème d'Hurwitz montre que, les G_k étant injectives, la fonction G l'est aussi. Nous avons donc démontré que G est un biholomorphisme de $\tilde{\Sigma}$ vers un ouvert simplement connexe du disque unité. \square

C'est à ce stade que Poincaré s'arrête dans son mémoire de 1883. *A priori*, on ne connaît pas l'ouvert simplement connexe du disque unité qui paramètre la surface de Riemann de la fonction $x \mapsto y(x)$ et, d'ailleurs, Poincaré se garde bien de dire qu'il est biholomorphe au disque unité. C'est pourtant vrai mais il faudra attendre 1900 et l'article [OsgW1900] d'Osgood pour en avoir une démonstration.

Encadré XI.2 : Revêtement universel d'une surface de Riemann

Le concept de revêtement universel est, au moins implicitement, au cœur des travaux de Klein et Poincaré sur l'uniformisation des courbes algébriques. Cependant, à notre connaissance, le mémoire de Poincaré sur l'uniformisation des fonctions contient la première *définition* explicite du revêtement universel d'une surface de Riemann. En fait, étant donnés des germes de fonctions analytiques y_1, \dots, y_m d'une variable x , Poincaré construit le revêtement universel \tilde{S} de la surface de Riemann associée aux germes y_1, \dots, y_m . Il commence par dire que \tilde{S} sera une surface de Riemann étalée au-dessus du plan des x , et que \tilde{S} sera entièrement définie si on sait, pour tout lacet C tracé dans le plan des x , à quelle condition les deux extrémités d'un relevé de C seront sur un même feuillet de \tilde{S} (il est sous-entendu que cette condition ne dépendra que de C , pas du relevé choisi). Poincaré distingue alors deux sortes de lacets C :

1. ceux tels que le prolongement de l'un au moins des germes y_1, \dots, y_m ne revient pas à sa valeur initiale quand la variable x parcourt le lacet C ;
2. ceux tels que les prolongements des germes y_1, \dots, y_m reviennent tous à leurs valeurs initiales quand la variable x parcourt C .

Il divise ensuite les lacets de la deuxième sorte en deux espèces :

1. les lacets de la première espèce sont ceux que l'on peut déformer de façon continue en un point de telle manière qu'au cours de la déformation, le lacet reste constamment de la deuxième sorte ;
2. les autres lacets sont de la seconde espèce.

Il ne reste plus qu'à dire que le point initial et le point final d'un relevé d'un lacet C seront situés sur un même feuillet de \tilde{S} si et seulement si C est de la deuxième sorte et de la première espèce. Ceci définit entièrement la surface \tilde{S} .

La thèse de R. Chorlay contient une intéressante analyse de cette construction ; voir [Cho2007, pages 187 à 190].

XI.4. Théorème d'Osgood

La fonction t utilisée dans la démonstration du théorème XI.3.1 ressemble à une fonction de Green sur $\tilde{\Sigma}$, à ceci près qu'elle ne tend pas vers 0 à l'infini et qu'elle admet potentiellement une infinité de pôles (et non un seul). On doit à Osgood d'avoir remarqué que l'existence d'une telle fonction implique l'existence d'une « vraie » fonction de Green et donc, sur une surface simplement connexe, d'un biholomorphisme vers le disque unité ([OsgW1900]).

Définition XI.4.1. — Soit S une surface de Riemann. Une *majorante de Green* est une fonction positive $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ayant un ensemble discret de singularités, harmonique en dehors de ces singularités, tendant vers $+\infty$ au voisinage de chaque singularité et telle qu'au moins une des singularités, notée p_0 , est une singularité logarithmique simple (si z est une coordonnée holomorphe au voisinage de p_0 , alors $u(p) + \log|z(p) - z(p_0)|$ est bornée).

Exemple XI.4.2. — Un ouvert non vide U contenu dans le disque unité possède une majorante de Green. En effet, quitte à composer par un automorphisme du disque on peut supposer que U contient le point 0 et on remarque alors que $z \mapsto \log \frac{1}{|z|}$ est une majorante de Green sur U .

Exemple XI.4.3. — Si une surface de Riemann admet une majorante de Green, alors son revêtement universel aussi : il suffit de composer avec l'application de revêtement. En particulier, le revêtement universel d'un ouvert non vide contenu dans le disque unité admet une majorante de Green.

Remarquons qu'en général, une surface de Riemann peut très bien admettre des majorantes de Green sans posséder de véritable fonction de Green.

Exemple XI.4.4. — Si p est un point du disque unité différent de l'origine, considérons la surface $S = \mathbb{D} \setminus \{p\}$. Une fonction de Green sur S avec singularité logarithmique en 0 se prolongerait en une fonction de Green sur \mathbb{D} s'annulant en p au mépris du principe de maximum : S n'admet donc pas de fonction de Green. En revanche, la restriction à S de la fonction $z \mapsto \log \frac{1}{|z|}$ est une majorante de Green sur S .

Nous pouvons à présent énoncer le théorème d'Osgood :

Théorème XI.4.5. — *Soit S une surface de Riemann. Si S admet une majorante de Green, alors son revêtement universel est biholomorphe au disque unité.*

En particulier :

Corollaire XI.4.6. — *Tout ouvert simplement connexe de \mathbb{C} qui admet une majorante de Green est biholomorphe au disque unité.*

Seul le corollaire apparaît explicitement dans l'article d'Osgood [OsgW1900]. Il suffit à assurer un paramétrage par le disque unité dans le théorème XI.3.1. Les arguments d'Osgood démontrent cependant l'énoncé plus général XI.4.5 et c'est cette forme que Poincaré utilisera dans sa démonstration du théorème d'uniformisation général en 1907.

Démonstration du théorème XI.4.5. — On appelle t la majorante de Green sur S . En constatant que la composée de t avec l'application de revêtement est une majorante de Green sur le revêtement universel, on peut supposer que S est simplement connexe.

On reprend alors la stratégie et les notations de la preuve de XI.3.1 : on fait une exhaustion de S par des domaines D_k , simplement connexes, d'adhérences compactes, à bords polygonaux. On choisit D_k de sorte que ∂D_k ne contienne aucune singularité de t et que D_0 contienne une singularité logarithmique simple p_0 de t . On considère les fonctions de Green g_k de D_k ayant leur singularité logarithmique en p_0 et dont l'existence est assurée par le théorème XI.1.5.

Nous avons vu dans la démonstration de XI.3.1 que la suite de fonctions (g_k) tend uniformément sur les compacts de $S \setminus \{p_0\}$ vers une fonction harmonique positive g qui admet une singularité logarithmique simple en p_0 . Nous allons voir que g est en fait une fonction de Green sur S .

Pour tout entier k et toute majorante de Green t' dont p_0 est une singularité logarithmique simple, la fonction $t' - g_k$ est positive sur ∂D_k , harmonique sur l'intérieur de D_k , en dehors d'un nombre fini de singularités aux voisinages desquelles elle tend vers l'infini. Le principe du minimum assure que $t' - g_k$ va atteindre son minimum sur le bord de D_k . Autrement dit, g_k est inférieure à toute majorante de Green définie sur S et dont p_0 est une singularité logarithmique simple. Il en va donc de même pour la fonction g .

Supposons que g ne tende pas vers 0 à l'infini. Il existe alors une suite (q_n) de points de S qui tend vers l'infini et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que $g(q_n) \geq \varepsilon$. Considérons la fonction $G = e^{-(g+ig^*)}$, obtenue comme limite des fonctions $G_k = e^{-(g_k+ig_k^*)}$. Nous avons vu à la section précédente que G est injective. La suite $G(q_n)$ vérifie $|G(q_n)| \leq e^{-\varepsilon} < 1$. Quitte à extraire, on peut donc supposer que $G(q_n)$ converge vers un point q de \mathbb{D} .

Ce point ne peut pas appartenir à l'image de G . En effet, si tel était le cas, on choisirait une pré-image p de q par G et un voisinage relativement compact U de p tel que $G(U)$ soit un voisinage de q (l'application holomorphe non constante G est ouverte). Presque tous les termes de la suite $G(q_n)$ appartiendraient alors à $G(U)$ et l'injectivité de G garantirait que presque tous les (q_n) sont dans U , ce qui contredirait le fait que (q_n) sort de tout compact.

Nous pouvons considérer maintenant le revêtement universel du disque épointé⁽⁵⁾ $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{q\}$. Puisque S est simplement connexe, l'application $G : S \rightarrow G(S) \subset \mathbb{D} \setminus \{q\}$ se relève en une application $\tilde{G} : S \rightarrow \mathbb{D}$ telle que $G = \pi \circ \tilde{G}$. La suite $\tilde{G}(q_n)$ sort nécessairement de tout compact, c'est-à-dire que $|\tilde{G}(q_n)| \rightarrow 1$.

Si F est la fonction de Green du disque dont la singularité logarithmique est en $\tilde{G}(p_0)$, l'application $\tilde{F} = F \circ \tilde{G}$ est une nouvelle majorante de Green sur S , admettant une singularité logarithmique simple en p_0 et vérifiant $\tilde{F}(q_n) \rightarrow 0$. Puisque g est inférieure à toute majorante de Green sur S , cela contredit l'hypothèse $g(q_n) \geq \varepsilon$ et achève la preuve du théorème XI.4.5. □

Remarquons que le théorème d'Osgood implique en particulier le théorème de représentation conforme de Riemann.

Corollaire XI.4.7. — *Tout domaine simplement connexe D du plan, différent du plan lui-même, est biholomorphe au disque unité.*

Démonstration. — Par hypothèse, la frontière de D dans \mathbb{C} n'est pas vide et, comme D est simplement connexe, cette frontière contient au moins deux points. Quitte à considérer l'image de D par une transformation

5. Il suffit de composer le revêtement universel

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\} \\ z &\mapsto \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \end{aligned}$$

par un automorphisme du disque.

affine, nous pouvons supposer que 0 et 1 sont dans la frontière de D . Or nous savons qu'il existe un revêtement holomorphe $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$: ce revêtement provient de l'action sur le demi-plan supérieur du groupe fuchsien engendré par $z \mapsto \frac{z}{2z+1}$ et $z \mapsto z + 2$. L'inclusion ι de D dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ se relève alors en une injection $\tilde{\iota} : D \rightarrow \mathbb{D}$. On peut rapatrier une majorante de Green de \mathbb{D} sur D *via* $\tilde{\iota}$ et appliquer le corollaire XI.4.6 pour conclure que D est biholomorphe au disque unité. \square

XI.5. Le problème des ramifications

En analysant la preuve du théorème XI.3.1, on voit que le paramétrage de la surface de la fonction $x \mapsto y(x)$ admet des points critiques (points de ramification). L'ensemble E de ces points est la pré-image par x de l'ensemble des points critiques de F . Cet ensemble E est discret dans S . La surface $S \setminus E$ est paramétrée, sans point de ramification, par un ouvert du disque unité. C'est de cette façon que Poincaré formule son résultat dans le mémoire de 1883. Le théorème XI.3.1 n'est pas totalement satisfaisant puisque l'on aimerait obtenir un paramétrage de *toute* la surface S . Osgood souligne ce point dans la présentation du théorème de Poincaré qu'il fait au cours d'une série de conférences en 1898 ([OsgW1898]), et suggère ce que serait un énoncé d'uniformisation « vraiment satisfaisant ». Hilbert insistera également, lors du congrès des mathématiciens de 1900, sur le problème posé par la présence de points de ramifications dans le résultat de Poincaré. Voici comment il formule son vingt-deuxième problème :

Wie Poincaré zuerst bewiesen hat, gelingt die Uniformisirung einer beliebigen algebraischen Beziehung zwischen zwei Variablen stets durch automorphe Functionen einer Variablen ; d. h. wenn eine beliebige algebraische Gleichung zwischen zwei Variablen vorgelegt ist, so lassen sich für dieselben stets solche eindeutigen automorphen Functionen einer Variablen finden, nach deren Einsetzung die algebraische Gleichung identisch in dieser Variablen erfüllt ist. Die Verallgemeinerung dieses fundamentalen Satzes auf nicht algebraische, sondern beliebige analytische Beziehungen zwischen zwei Variablen hat Poincaré {Bulletin de la Société Mathématique de France XI. 1883} ebenfalls mit Erfolg in Angriff genommen und zwar auf einem völlig anderen Wege als derjenige war, der ihn bei dem anfangs genannten speciellen Probleme zum Ziele führte. Aus Poincarés Beweis für die Möglichkeit der Uniformisirung einer beliebigen analytischen Beziehung zwischen

zwei Variablen geht jedoch noch nicht hervor, ob es möglich ist, die eindeutigen Functionen der neuen Variablen so zu wählen, daß, während diese Variable das reguläre Gebiet jener Functionen durchläuft, auch wirklich die Gesamtheit aller regulären Stellen des vorgelegten, analytischen Gebildes zur Darstellung gelangt. Vielmehr scheinen in Poincarés Untersuchungen, abgesehen von den Verzweigungspunkten, noch gewisse andere im Allgemeinen unendlichviele diskrete Stellen vorgelegten analytischen Gebildes ausgenommen zu sein, zu denen man nur gelangt, indem man die neue Variable gewissen Grenzstellen der Functionen nähert. Eine Klärung und Lösung dieser Schwierigkeit scheint mir in Anbetracht der fundamentalen Bedeutung der Poincaréschen Fragestellung äußerst wünschenswert.

Nous en donnons ici une traduction approximative :

Comme Poincaré fut le premier à le démontrer, il est toujours possible d'uniformiser une relation algébrique quelconque entre deux variables par le biais de fonctions automorphes d'une variable. C'est-à-dire, étant donnée une équation algébrique en deux variables, on peut toujours exprimer ces dernières comme des fonctions automorphes d'une troisième variable de sorte qu'après substitution, la relation algébrique soit identiquement satisfaite. Poincaré s'est également attaqué avec succès à la généralisation de ce théorème fondamental pour des relations entre deux variables qui ne soient pas algébriques mais analytiques quelconques, et ceci en employant des méthodes complètement différentes de celles qui l'avaient mené à la résolution du premier problème mentionné. De la preuve de Poincaré de la possibilité d'uniformiser une relation analytique arbitraire entre deux variables, il ne résulte toutefois pas encore, qu'il soit possible de choisir les fonctions uniformes de la nouvelle variable, de sorte que lorsque ladite variable parcourt leur domaine de définition, la totalité des points réguliers de la surface analytique considérée soit atteinte. Au contraire, il apparaît dans les recherches de Poincaré, outre les points de branchement, certains autres points, qui en général constituent une partie infinie discrète de la surface considérée, et qui ne peuvent être atteints qu'en faisant tendre la nouvelle variable vers certains points à la frontière de son domaine de définition. Au vu de l'importance fondamentale que revêt le problème de Poincaré, il me semble qu'un éclaircissement et une résolution de cette difficulté seraient des plus souhaitables.

La preuve de Koebe du théorème d'uniformisation

Lorsqu'il résout de manière magistrale le vingt-deuxième problème de Hilbert, Koebe est un jeune mathématicien de 25 ans qui a soutenu deux ans auparavant une thèse sous la direction de Schwarz et Schottky. Le résultat qu'il a obtenu, qu'on appelle aujourd'hui *le théorème d'uniformisation*, est présenté le 11 mai 1907 par Klein à la Société des sciences de Göttingen [Koe1907a] :

Théorème XII.0.1. — *Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à la sphère de Riemann, au plan complexe ou au disque unité de \mathbb{C} .*

Remarque XII.0.2. — Comme (presque) toujours à l'époque, les surfaces de Riemann que considère Koebe sont étalées au-dessus du plan. La preuve du théorème d'uniformisation qu'il propose fonctionne cependant sans modification pour une surface de Riemann abstraite.

XII.1. Principe de la preuve

Soit S une surface de Riemann simplement connexe. On souhaite montrer que S est biholomorphe à la sphère de Riemann, à \mathbb{C} ou au disque unité. Depuis les travaux de Schwarz, on sait qu'une surface de Riemann compacte simplement connexe est biholomorphe à la sphère de Riemann; Koebe suppose donc que S n'est pas compacte.

Considérons une exhaustion $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de S par des domaines simplement connexes d'adhérences compactes, à bords polygonaux et telle que, pour tout k , on ait l'inclusion $\overline{D}_k \subset D_{k+1}$ (voir le lemme XI.2.1 pour l'existence d'une telle exhaustion). Un point p_0 ayant été fixé dans l'intérieur de D_0 , on appelle (g_k) la suite des fonctions de Green associée à (D_k) , avec singularité logarithmique en p_0 et dont l'existence est assurée par le théorème XI.1.5. Fixons p_1 et considérons « la » fonction harmonique conjuguée g_k^* de g_k définie sur $D_k \setminus \{p_0\}$ par

$$g_k^*(p) = \int_{p_1}^p *dg_k.$$

Nous avons vu lors de la preuve du théorème XI.1.4 que la fonction $G_k := e^{-(g_k + i g_k^*)}$ est univalente et réalise un biholomorphisme conforme de D_k sur le disque unité. L'approche de Koebe consiste à étudier (plus ou moins) directement la convergence des G_k , après renormalisation éventuelle. L'une des idées les plus intéressantes de sa preuve est de contrôler la taille de l'image du disque unité par une injection holomorphe grâce au module de la dérivée en 0. C'est le contenu du lemme XII.3.2, qui est une version un peu primitive de ce qui deviendra « le lemme de distorsion $\frac{1}{4}$ » de Koebe que voici (voir par exemple [Pom1975]) :

Lemme XII.1.1. — *Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe injective sur le disque unité et fixe l'origine, alors l'image $f(\mathbb{D})$ contient le disque de rayon $|f'(0)|/4$ centré sur l'origine.*

Donnons-nous $z : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ une carte holomorphe définie sur un voisinage U_0 de p_0 et centrée en p_0 (i.e. $z(p_0) = 0$). Chaque fonction g_k admet une singularité logarithmique simple en p_0 (voir définition XI.1.1). Autrement dit, on a au voisinage de p_0 un développement du type :

$$g_k(z) = \log \frac{1}{|z|} + c_k + o(1).$$

Comme pour tout k , la fonction $g_{k+1} - g_k$ est harmonique sur D_k , s'étend par continuité à \overline{D}_k et est strictement positive sur ∂D_k , le principe du maximum assure qu'elle soit strictement positive sur D_k . On en conclut que sa valeur en p_0 , qui n'est autre que $c_{k+1} - c_k$, est strictement positive. La suite (c_k) est donc strictement croissante. Par ailleurs, dans la carte U_0 , on vérifie que $|G'_k(p_0)| = e^{-c_k}$. Koebe scinde

alors sa démonstration en deux cas : celui où la suite (c_k) converge vers une limite finie c_∞ et celui où c_k tend vers $+\infty$.

XII.2. Cas où la suite (c_k) est bornée

On suppose ici que c_k tend vers un réel c_∞ . Nous venons de voir que sur tout ouvert D relativement compact dans S , la suite (g_k) est, à partir d'un certain rang, définie sur $D \setminus \{p_0\}$, harmonique et strictement croissante. Sur notre ouvert de carte U_0 autour de p_0 , on peut considérer la suite de fonctions $u_k := g_k - \log\left(\frac{1}{|z|}\right)$. Il s'agit d'une suite croissante de fonctions harmoniques et $u_k(p_0) = c_k$ est une suite convergente. On va alors pouvoir appliquer le principe de Harnack, dont nous rappelons ci-dessous l'énoncé et la preuve.

Théorème XII.2.1 (Principe de Harnack). — *Soit Ω un ouvert connexe d'une surface de Riemann et (u_k) une suite croissante de fonctions harmoniques sur Ω . Alors (u_k) converge uniformément sur tout compact de Ω , soit vers $+\infty$, soit vers une fonction harmonique.*

Démonstration. — Comme tout compact de Ω est recouvert par des ouverts biholomorphes à \mathbb{D} , via un biholomorphisme s'étendant en un homéomorphisme au bord, nous pouvons nous limiter au cas où (u_k) est une suite croissante de fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$, harmoniques dans \mathbb{D} .

Le principe de Harnack découle alors du résultat suivant :

Proposition XII.2.2 (Inégalité de Harnack). — *Pour tout compact K de \mathbb{D} , il existe une constante $C_K > 0$, telle que pour toute fonction $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement positive et harmonique sur \mathbb{D} , on ait*

$$\forall (x, y) \in K^2 \quad u(x) \leq C_K u(y). \tag{XII.1}$$

Démonstration. — Il existe une constante $C_K > 0$, telle que (XII.1) soit vérifiée pour toute fonction u de la forme

$$P_\theta : z \mapsto \frac{1 - |z|^2}{|1 - e^{-i\theta} z|^2},$$

où $\theta \in [0, 2\pi]$. En effet, il suffit de constater que l'application

$$(x, y, \theta) \mapsto \frac{P_\theta(x)}{P_\theta(y)}$$

est bornée sur $K^2 \times [0, 2\pi]$. Soit alors $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement positive et harmonique sur \mathbb{D} . La formule de Poisson donne

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\theta(z) u(e^{i\theta}) d\theta.$$

On a alors, pour tout $(x, y) \in K^2$,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\theta(x) u(e^{i\theta}) d\theta \leq C_K \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\theta(y) u(e^{i\theta}) d\theta = C_K u(y).$$

□

Pour déduire le principe de Harnack de l'inégalité du même nom, on commence par se ramener au cas où les fonctions u_k prennent des valeurs strictement positives : il suffit pour cela de considérer par exemple la suite $(u_k - u_0 + 1)$. Comme la suite (u_k) est croissante, elle tend simplement vers une fonction mesurable $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On a alors une dichotomie selon que $u(0) = +\infty$ ou $u(0) \in \mathbb{R}$.

Dans le premier cas, on aura, pour tout compact K de \mathbb{D} contenant 0 et tout entier k ,

$$\min_K u_k \geq u_k(0)/C_K$$

ce qui montre que la suite (u_k) converge vers $+\infty$ uniformément sur tout compact. Dans le second cas, on aura, pour tout compact K de \mathbb{D} contenant 0 et tout entier k ,

$$\max_K u_k \leq C_K u_k(0) \leq C_K u(0)$$

ce qui montre que la fonction u est bornée sur tout compact de \mathbb{D} . Par le théorème de convergence dominée, u vérifie la propriété de la moyenne :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + r e^{i\theta}) d\theta$$

pour tout z dans \mathbb{D} et tout $0 < r < 1 - |z|$. Il en résulte que u est harmonique sur \mathbb{D} . Il suffit en effet d'utiliser un noyau régularisant ρ_n : la régularisée $\rho_n \star u$ est lisse et a la propriété de la moyenne, donc est harmonique. Mais $u_n = u$ par la propriété de la moyenne. La fonction u est en particulier continue et le lemme de Dini permet de conclure que (u_k) converge uniformément vers u sur tout compact de \mathbb{D} . □

D'après le principe de Harnack, la suite de fonctions (u_k) converge uniformément sur les compacts de $U_0 \setminus \{p_0\}$. En particulier, pour p

dans U_0 différent de p_0 , la suite $(g_k(p))$ est bornée. On peut cette fois-ci appliquer le principe de Harnack à (g_k) et l'on obtient que (g_k) converge uniformément sur les compacts de $S \setminus \{p_0\}$ vers une fonction g qui est harmonique, positive et présente une singularité logarithmique simple en p_0 . Cette fonction g est donc une majorante de Green sur S et le théorème XI.4.5 assure que S soit biholomorphe au disque unité.

XII.3. Cas où la suite (c_k) tend vers l'infini

La suite $\left(g_k - \log \frac{1}{|z|}\right)$ est une suite croissante de fonctions harmoniques définies sur l'ouvert de carte U_0 et qui valent c_k en p_0 . Par hypothèse, c_k tend vers $+\infty$ donc l'inégalité de Harnack montre que $\left(g_k - \log \frac{1}{|z|}\right)$ diverge vers l'infini sur un voisinage de p_0 , et c'est *a fortiori* le cas pour (g_k) . Le théorème de Harnack implique que g_k tend uniformément vers l'infini sur les compacts de S ou, ce qui revient au même, G_k tend uniformément vers 0 sur les compacts de S puisque $|G_k| = e^{-g_k}$.

Il vient alors naturellement à l'esprit de considérer la suite de fonctions $F_k = e^{c_k} G_k$ dont les dérivées en p_0 sont égales à 1 dans notre carte $z : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$. Koebe démontre la proposition clé suivante :

Proposition XII.3.1. — *Pour tous $k, m \geq 0$, l'image de D_k par F_{m+k} contient un disque centré en 0 et de rayon Ce^{c_k} où C est une constante positive universelle.*

Démonstration. — L'idée de Koebe est que les plongements holomorphes du disque unité dont la dérivée en 0 possède un grand module doivent contenir de gros disques. Plus précisément :

Lemme XII.3.2. — *Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une injection holomorphe qui fixe 0. Si R désigne le plus grand réel positif pour lequel le disque de centre 0 et de rayon R est inclus dans $\varphi(\mathbb{D})$, alors*

$$R \geq C|\varphi'(0)|,$$

où C est une constante positive indépendante de φ .

Démonstration. — On choisit un point de la forme $Re^{i\theta}$ dans la frontière de $\varphi(\mathbb{D})$ et l'on introduit la fonction :

$$\psi(w) := \frac{\varphi(w)}{Re^{i\theta}}.$$

L'ouvert $\psi(\mathbb{D})$ contient le disque unité et ne contient pas 1. On appelle r la détermination holomorphe de la racine carrée sur le disque de centre -1 et de rayon 1, qui prend la valeur i en -1 . Si un nombre complexe w est dans l'image de r , alors $-w$ n'y est pas. On peut donc trouver un voisinage U de $-i$ dans la sphère de Riemann, qui n'intersecte pas l'image de r et tel qu'il existe un biholomorphisme $k : U \rightarrow \mathbb{D}$ vérifiant $k(-i) = 0$. Posons $h(w) = r(\psi(w) - 1)$. La fonction $k \circ h$ est une application holomorphe de \mathbb{D} dans lui-même qui envoie 0 sur 0. Le lemme de Schwarz impose alors

$$|k'(i)||h'(0)| \leq 1.$$

Par ailleurs, de $h^2 = \psi - 1$, on tire que

$$|h'(0)| = \frac{|\psi'(0)|}{2} = \frac{|\varphi'(0)|}{2R}.$$

On conclut que $R \geq |k'(i)||\varphi'(0)|$ (on notera que $|k'(i)|$ ne dépend que de r et du choix de U , donc pas de φ). C'est le résultat annoncé. \square

On calcule sans peine que

$$|(F_{k+m} \circ G_k^{-1})'(0)| = e^{c_k}.$$

La proposition découle alors directement du lemme, puisque $F_{k+m} \circ G_k^{-1}$ est un plongement holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{C} , qui fixe 0 et dont l'image est précisément $F_{k+m}(D_k)$. \square

Au vu de cette proposition, on aimerait montrer directement que la suite (F_k) converge vers un biholomorphisme de S sur \mathbb{C} . Koebe ne réussit cependant pas à mener à bien cette approche directe ; il va s'intéresser à la suite de fonctions

$$K_k = e^{-c_k} \left(\frac{1}{G_k} - G_k \right),$$

qu'il va étudier en utilisant ce qu'il sait des fonctions F_k . La transformation $w \mapsto \frac{1}{w} - w$ envoie biholomorphiquement le disque unité sur le complémentaire, dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, du segment $[-2i, 2i] \subset i\mathbb{R}$. Ainsi, K_k envoie D_k biholomorphiquement sur le complémentaire dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ du segment $[-2ie^{-c_k}, 2ie^{-c_k}]$. Dans la carte $z : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$, la fonction K_k admet un développement du type

$$K_k = \frac{1}{z} + O(1).$$

L'idée de Koebe est que la proposition XII.3.1 va permettre, non pas de montrer directement la convergence de la suite (K_k) , mais celle de la suite des parties réelles $U_k = \text{Re}(K_k)$ et que cela est suffisant pour aboutir au théorème d'uniformisation. Supposons en effet que la suite de fonctions $U_k : D_k \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformément sur les compacts de $S \setminus \{p_0\}$. La formule de Poisson montre alors que les dérivées partielles de (U_k) convergent aussi uniformément sur les compacts de $S \setminus \{p_0\}$. En particulier, si p_1 est un point de D_0 différent de p_0 , les fonctions univaluees

$$U_k^* : p \mapsto \int_{p_1}^p *dU_k$$

sur $D_k \setminus \{p_0\}$ convergent uniformément sur les compacts de S . Par construction, $U_k + iU_k^*$ est égal à $K_k + a_k$ pour un certain nombre imaginaire pur a_k et, pour ce choix de a_k , la suite de fonctions $(K_k + a_k)$ converge uniformément sur les compacts de S vers une fonction holomorphe $K : S \rightarrow \mathbb{C}P^1$ qui admet un pôle simple en p_0 . En particulier, K n'est pas constante. Elle est donc injective par le théorème d'Hurwitz. L'ouvert $K(S)$ est simplement connexe dans $\mathbb{C}P^1$. Koebe conclut alors que la frontière de $K(S)$ doit être réduite à un point et que S est biholomorphe au plan complexe. En effet, par simple connexité, si la frontière de $K(S)$ contient plus d'un point, elle en contient une infinité. Le corollaire XI.4.7 assure alors que $K(S)$, et donc S , est biholomorphe au disque unité. Mais l'on aboutit dans ce cas à une contradiction, puisque S admettrait une majorante de Green g avec une singularité logarithmique simple en p_0 , ce qui aurait pour conséquence de majorer tous les c_k .

Il ne nous reste plus qu'à expliquer comment Koebe montre la convergence de la suite (U_k) . Les fonctions U_k sont caractérisées par le fait d'être harmoniques sur $D_k \setminus \{p_0\}$, de tendre vers 0 au bord de D_k et d'avoir un développement au voisinage de p_0 de la forme $U_k(z) = \text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) + O(1)$. Pour voir qu'elles convergent uniformément sur les compacts de $S \setminus \{p_0\}$, on montre qu'elles sont uniformément de Cauchy.

Lemme XII.3.3. — *Pour tout $k, m \geq 0$, on a l'inégalité suivante sur le domaine D_k :*

$$|U_{k+m} - U_k| \leq 2e^{-c_k}. \tag{XII.2}$$

Démonstration. — Sur $F_{k+m}(D_{k+m}) = D(0, e^{c_{k+m}})$, la fonction

$$V_{k+m}(w) := U_{k+m} \circ F_{k+m}^{-1}(w) - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{w} \right)$$

est une fonction harmonique qui se prolonge en une fonction continue sur $\overline{D}(0, e^{c_{k+m}})$. La fonction

$$V_k(w) := U_k \circ F_{k+m}^{-1}(w) - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{w} \right)$$

est une fonction harmonique sur $F_{k+m}(D_k)$ qui se prolonge en une fonction continue sur $\overline{F_{k+m}(D_k)}$. Sur le bord de $D(0, e^{c_{k+m}})$, on a

$$V_{k+m}(w) = -\operatorname{Re} \left(\frac{1}{w} \right) \quad \text{et, par conséquent,} \quad |V_{k+m}| \leq e^{-c_{m+k}} \leq e^{-c_k}.$$

Cette inégalité est donc vraie sur $D(0, e^{c_{k+m}})$ par le principe du maximum. En particulier, elle est vraie sur $F_{k+m}(D_k)$. Par ailleurs, la proposition XII.3.1 assure que $F_{k+m}(D_k)$ contient un disque centré en 0 et de rayon e^{c_k} . Ainsi, sur le bord de $F_{k+m}(D_k)$, où $V_k(w) = -\operatorname{Re} \left(\frac{1}{w} \right)$, on a

$$|V_k| \leq e^{-c_k}.$$

On conclut finalement que, sur $F_{k+m}(D_k)$,

$$|V_{m+k} - V_k| \leq 2e^{-c_k}.$$

Ceci démontre l'inégalité (XII.2). □

La suite (U_k) est uniformément de Cauchy sur les compacts de $S \setminus \{p_0\}$. Comme expliqué précédemment, ceci implique que la surface S soit biholomorphe au plan complexe. La preuve du théorème XII.0.1 est complète.

Remarque XII.3.4. — La dichotomie $(c_k \rightarrow c_\infty)$ — $(c_k \rightarrow +\infty)$ permet de distinguer les surfaces S biholomorphes au disque unité et celles biholomorphes au plan complexe. Par ailleurs, on aimerait substituer à l'introduction — certes très astucieuse — des fonctions K_k , une étude directe des applications renormalisées F_k . C'est en fait possible grâce au lemme XII.3.2. Celui-ci assure que pour tout $k, m \geq 0$, $F_{k+m} \circ F_k^{-1}(\mathbb{D})$ contient le disque unité. En fait, dans la preuve du lemme XII.3.2, nous avons vu que si l'on pose $h_m(z) = r(F_{k+m} \circ F_k^{-1} - 1)$, alors le complémentaire de $h_m(D_k)$ contient un voisinage U de $-i$, indépendant de m et k . On en conclut que la suite $\left(\frac{1}{h_m+i} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée en module et constitue donc une famille normale. Ainsi, une suite extraite de (h_m) converge

uniformément sur les compacts de D_k . On en déduit finalement qu'une suite extraite de (F_k) converge uniformément sur les compacts de S vers une fonction holomorphe $F : S \rightarrow \mathbb{C}$. Cette fonction n'est pas constante puisque sa dérivée en p_0 est 1 et, par le théorème d'Hurwitz, elle est injective. Comme plus haut, on conclut en utilisant le corollaire XI.4.7 que $F(S) = \mathbb{C}$.

Notons que c'est en juin 1907, donc presque simultanément à la note de Koebe, que P. Montel soutient sa thèse intitulée *Sur les suites infinies de fonctions* [Mon1907], dans laquelle il dégage la notion de famille normale.

La preuve de Poincaré du théorème d'uniformisation

Ce dernier chapitre est essentiellement basé sur le mémoire [Poin1907], rédigé au début de l'année 1907, paru au mois de novembre de cette même année et dans lequel Poincaré donne lui aussi une preuve du théorème d'uniformisation XII.0.1, basée sur une généralisation du procédé alternant de Schwarz qu'il nomme méthode du balayage. Cette preuve fait l'objet des deux premières sections du chapitre. Dans la troisième section, nous présenterons le contenu de la note [Koe1907b], dans laquelle Koebe revisite la preuve de Poincaré, la simplifiant significativement.

Dans tout le chapitre, on considère une surface de Riemann S simplement connexe. Démontrer le théorème XII.0.1, c'est prouver que S est biholomorphe à la sphère de Riemann, au plan complexe ou au disque unité. Dans le cas où S est compacte, le théorème IV.1.1 montre que S est biholomorphe à la sphère de Riemann. On supposera donc dans la suite que S est non compacte (et on devra montrer que S est biholomorphe au plan complexe ou au disque unité). Pour toute partie X de S , on désignera par \bar{X} l'adhérence de X dans S et par ∂X la frontière de X dans S .

XIII.1. Stratégie de la preuve

La stratégie de Poincaré pour montrer le théorème d'uniformisation repose sur le théorème d'Osgood XI.4.5 qui affirme que le revêtement universel d'une surface de Riemann non compacte est biholomorphe

au disque unité dès que cette surface admet une majorante de Green. Poincaré va tenter de construire une majorante de Green sur la surface de Riemann A obtenue en ôtant à S un petit disque $\overline{\Delta}$. Plus précisément, on choisit une carte holomorphe $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert U de S . Quitte à composer la carte z au but, on suppose que $z(U)$ contient le disque unité de \mathbb{C} . On choisit un réel $r \in]0, 1[$ et on pose

$$\Delta := \{p \in S ; |z(p)| < r\} \quad \text{et} \quad A := S \setminus \overline{\Delta}.$$

On notera que A est un ouvert de la surface S homéomorphe à un anneau et que le bord de A dans S est la courbe $\partial A = \partial \Delta = \{p \in S ; |z(p)| = r\}$. La construction d'une majorante de Green sur A sera l'objet de la section XIII.2 ; mais expliquons dès maintenant pourquoi l'existence d'une telle majorante de Green suffit pour conclure que S est biholomorphe au plan complexe \mathbb{C} ou au disque unité \mathbb{D} .

Proposition XIII.1.1. — *Supposons que A admette une majorante de Green. Alors S est biholomorphe au plan complexe ou au disque unité.*

Démonstration. — Commençons par montrer que le groupe fondamental de A est isomorphe à $\mathbb{Z}^{(1)}$. Soit $r' \in]r, 1[$ et soit

$$\Delta' := \{p \in S ; |z(p)| < r'\}.$$

L'existence d'une exhaustion de S par des disques topologiques à bords lisses (voir la preuve du lemme XI.2.1) montre que l'inclusion de $\partial \Delta'$ dans A induit une surjection de $\pi_1(\partial \Delta')$ sur $\pi_1(A)$ qui est donc monogène. Par ailleurs, d'après le théorème XI.4.5, le revêtement universel de A est biholomorphe au disque unité \mathbb{D} . Ainsi, A est biholomorphe au quotient du disque \mathbb{D} par un sous-groupe monogène Γ de $\text{Aut}(\mathbb{D})$. Si Γ était trivial, la surface A serait un disque et S serait compacte (réunion de deux ouverts relativement compacts). Le groupe Γ est donc engendré par un élément γ agissant sans point fixe sur le disque, donc forcément parabolique ou hyperbolique et d'ordre infini (pour la classification des automorphismes du disque, voir VI.1.1).

Il est maintenant facile de voir qu'il existe un biholomorphisme h qui envoie A sur un anneau plan du type $\mathbb{A}(r_1, r_2) = \{w \in \mathbb{C}, r_1 < |w| < r_2\}$

1. Comme nous l'avons signalé dans l'introduction de cette partie, Poincaré et Koebe considèrent comme évident que S est homéomorphe au plan, donc que $A = S \setminus \Delta$ est homéomorphe à un anneau.

avec $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$ (plus précisément $0 = r_1 < r_2 < \infty$ si γ est parabolique et $0 < r_1 < r_2 < \infty$ si γ est hyperbolique). Posons $A' := S \setminus \overline{\Delta'}$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, A' contient soit l'anneau $h^{-1}(\mathbb{A}(r_1, r_1 + \varepsilon))$, soit l'anneau $h^{-1}(\mathbb{A}(r_2 - \varepsilon, r_2))$. Distinguons trois cas.

Premier cas : A' contient $h^{-1}(\mathbb{A}(r_2 - \varepsilon, r_2))$. Alors on colle l'anneau $\mathbb{A}(r_2 - \varepsilon, r_2 + \varepsilon)$ à la surface S le long de l'anneau $h^{-1}(\mathbb{A}(r_2 - \varepsilon, r_2))$. On obtient une surface de Riemann \widehat{S} dans laquelle S est un domaine simplement connexe d'adhérence compacte à bord analytique. Le corollaire XI.1.6 nous permettra de conclure que S est biholomorphe au disque unité.

Deuxième cas : A' contient $h^{-1}(\mathbb{A}(r_1, r_1 + \varepsilon))$ et $r_1 > 0$. Alors on colle l'anneau $\mathbb{A}(r_1 - \varepsilon, r_1 + \varepsilon)$ à la surface S , le long de l'anneau $h^{-1}(\mathbb{A}(r_1, r_1 + \varepsilon))$. On obtient une surface de Riemann \widehat{S} dans laquelle S est un domaine simplement connexe d'adhérence compacte à bord analytique. Le corollaire XI.1.6 nous permettra de conclure que S est biholomorphe au disque unité.

Troisième cas : A' contient $h^{-1}(\mathbb{A}(r_1, r_1 + \varepsilon))$ et $r_1 = 0$. Alors on colle le disque $\mathbb{D}(0, r_1 + \varepsilon) = \{w \in \mathbb{C}, |w| < r_1 + \varepsilon\}$ à la surface S le long de l'anneau $h^{-1}(\mathbb{A}(r_1, r_1 + \varepsilon))$. On obtient ainsi une surface de Riemann \widehat{S} homéomorphe à la sphère. Le théorème IV.1.1 montre que \widehat{S} est biholomorphe à la sphère de Riemann. La surface S est le complémentaire d'un point dans \widehat{S} : par conséquent S est biholomorphe à la sphère de Riemann privée d'un point, c'est-à-dire au plan complexe. \square

Au vu de ce résultat, la démonstration du théorème général d'uniformisation XII.0.1 se réduit à prouver l'existence d'une majorante de Green sur l'anneau A .

XIII.2. Existence d'une majorante de Green sur l'anneau A

Nous allons maintenant expliquer comment Poincaré démontre l'existence d'une majorante de Green sur A . La preuve utilise une généralisation du *procédé alternant de Schwarz* que Poincaré nomme *méthode du balayage* et dont il donne une interprétation électrostatique. La mise en œuvre de cette méthode, *a fortiori* la justification de sa convergence, pose des problèmes d'analyse dont Poincaré mesurait toute la difficulté

et qui ne seront surmontés qu'un demi-siècle plus tard grâce à la théorie des distributions. Faute d'en disposer à l'époque, Poincaré s'appuiera sur des arguments physiques. La preuve que nous présentons expose les idées de [Poin1907] en leur adjoignant parfois quelques arguments anachroniques afin de les rendre rigoureuses.

XIII.2.1. Présentation de la méthode de balayage

Cette méthode repose sur une analogie électrostatique : étant donnée une distribution de charges sur une surface recouverte par des disques, on rend successivement chaque disque conducteur, ce qui a pour effet de « balayer » les charges, c'est-à-dire de les répartir sur le bord du disque en ne changeant le potentiel qu'à l'intérieur de celui-ci, la charge totale étant conservée. On espère qu'en itérant ce procédé, les charges seront « dispersées » à l'infini, laissant un potentiel parfaitement harmonique sur la surface de Riemann.

Si on cherche à construire une fonction de Green, on part d'une distribution de charges constituée d'une charge ponctuelle positive et d'une distribution quelconque de charges négatives. Le procédé est alors modifié de manière à préserver la charge ponctuelle positive. Autrement dit, seules les charges négatives sont balayées.

Exposons maintenant la méthode d'un point de vue mathématique. On considère une surface de Riemann S et un point p_0 de S . Tout point p de S admet un voisinage D pour lequel il existe un biholomorphisme de D sur le disque unité ouvert \mathbb{D} de \mathbb{C} qui s'étend en un homéomorphisme de \bar{D} sur $\bar{\mathbb{D}}$ (en particulier, D est d'adhérence compacte). Toute fonction continue $v : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ admet une *extension harmonique* à \bar{D} , c'est-à-dire une fonction $\bar{v} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \bar{D} et harmonique dans D (cette fonction s'obtient par convolution de v avec le noyau de Poisson après avoir envoyé \bar{D} sur le disque unité fermé). De plus, si p_0 est dans l'intérieur de D , il existe une fonction de Green sur D avec une singularité logarithmique simple en p_0 .

Soit u une fonction réelle définie sur $S \setminus \{p_0\}$, continue et présentant une singularité logarithmique simple en p_0 . Le balayage sur D de la fonction u est la fonction $B(u, D)$ définie comme suit : $B(u, D)$ coïncide avec u en dehors de D ; si D ne contient pas p_0 , alors $B(u, D)|_D$ est l'extension harmonique de $u|_{\partial D}$; si D contient p_0 , alors $B(u, D)|_D$ est la somme de l'extension harmonique de $u|_{\partial D}$ et de la fonction de Green

de D avec singularité logarithmique simple en p_0 . Ainsi, la singularité logarithmique éventuelle de u est préservée.

Le *processus de balayage* consiste à répéter indéfiniment cette opération sur une famille de disques \mathcal{R} recouvrant la surface S et ne contenant pas le point p_0 dans leur frontière. Il est important que chaque disque soit balayé une infinité de fois. Si $\mathcal{R} = \{D_1, D_2, \dots\}$, on peut par exemple utiliser l'ordre $D_1, D_2, D_1, D_2, D_3, D_1, D_2, D_3, D_4, \dots$

Partant d'une fonction continue $u_0 : S \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ positive, admettant une singularité logarithmique simple en p_0 , le processus de balayage définit une suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 0}$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} := B(u_n, D_{n+1}).$$

Encadré XIII.1 : Interprétation électrostatique du balayage

Commençons par quelques rappels d'électrostatique. Une distribution de charges q à support compact dans le plan donne naissance à un champ électrique \vec{E} donné par :

$$\vec{E}(x) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\vec{x}\vec{y}}{\|\vec{x}\vec{y}\|^2} dq(y). \tag{XIII.1}$$

Le flux du champ \vec{E} à travers tout contour fermé C est égal à la charge totale dans le domaine D entouré par C :

$$\int_C \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = \int_D q, \tag{XIII.2}$$

où \vec{n} est la normale sortante le long de C . La formule de Green donne une seconde expression du membre de gauche :

$$\int_C \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = \int_D \operatorname{div} \vec{E}. \tag{XIII.3}$$

Par ailleurs, le champ \vec{E} dérive d'un potentiel u , autrement dit $\vec{E} = -\vec{\nabla}u$. Le potentiel n'est *a priori* bien défini qu'à une constante additive près. D'après les égalités (XIII.2) et (XIII.3) ci-dessus ce potentiel u satisfait :

$$\Delta u = \operatorname{div} \vec{\nabla}u = -\operatorname{div} \vec{E} = -q. \tag{XIII.4}$$

Le potentiel élémentaire $u(z) = -\log|z|$ donne pour tout (petit) cercle $C = C(0, r)$:

$$\begin{aligned} \int_C \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle &= r \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}(r e^{i\theta}) d\theta \\ &= r \int_0^{2\pi} -\frac{d\theta}{r} \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

Le laplacien Δu correspond intuitivement à $-2\pi\delta_0$, où δ_0 est une masse de Dirac en 0. C'est la formulation analytique tardive de l'intuition, beaucoup plus ancienne, d'une charge ponctuelle positive.

Imaginons à présent une distribution de charges comportant une charge ponctuelle positive en p_0 . Cette distribution est décrite par un potentiel u admettant une singularité logarithmique en p_0 . On fait alors l'expérience (de pensée) suivante : on « rend conducteur » un petit disque D du plan. Si le disque D contient p_0 , on ne rend conducteur que $D \setminus \{p_0\}$. Ceci a pour effet de « balayer » les charges électriques contenues dans D (ou dans $D \setminus \{p_0\}$) vers le bord de D . Après avoir laissé les charges évoluer jusqu'à l'équilibre, on obtient une nouvelle distribution q' , dérivant d'un potentiel u' . Le potentiel u' est harmonique dans D puisqu'il n'y a plus de charges dans D . Sur le complémentaire de \overline{D} , on a $\Delta u' = \Delta u$ puisque les charges situées hors de \overline{D} n'ont pas bougé (le complémentaire de \overline{D} est supposé non conducteur). Comme u et u' tendent tous les deux vers 0 à l'infini, on en déduit que u' n'est autre que le balayage de u sur D : on a $u' = B(u, D)$.

Un processus de balayage sur une surface de Riemann S « correspond » donc à l'expérience électrostatique suivante (qui n'est évidemment qu'une « expérience de pensée » si S n'est pas un ouvert du plan) : partant d'une distribution de charges comportant une charge ponctuelle positive en p_0 , on rend conducteurs, l'un après l'autre, les éléments d'une famille de disques qui recouvrent la surface S .

Pour souligner l'intérêt du balayage en vue de construire des majorantes de Green, supposons un instant que la suite (u_n) converge uniformément sur les compacts de $S \setminus \{p_0\}$ vers une fonction u . Alors $(u_n - u_0)$ converge uniformément sur les compacts de $S \setminus \{p_0\}$ vers une fonction v . Si l'on désigne par D un disque de \mathcal{R} et par $u_{\varphi(n)}$ une suite extraite satisfaisant $u_{\varphi(n)} = B(u_{\varphi(n)-1}, D)$, alors chaque fonction $u_{\varphi(n)} - u_0$ est harmonique sur D , donc par passage à la limite dans l'égalité de la moyenne, v l'est également. On conclut que u est harmonique sur $S \setminus \{p_0\}$ avec une singularité logarithmique simple en p_0 . Étant parti d'une fonction positive u_0 , on vérifie aisément que tous les termes u_n sont des fonctions positives ; la fonction u est une majorante de Green sur l'intérieur de $S \setminus \{p_0\}$.

XIII.2.2. Croissance du processus de balayage et critères de convergence

L'objectif est à présent limpide : il faut faire converger un processus de balayage. Un moyen commode pour cela est d'initier le processus avec une fonction *sous-harmonique*.

Encadré XIII.2 : Fonctions sous-harmoniques

Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction continue $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *sous-harmonique* si la valeur de u en un point de U est inférieure à la moyenne de u sur n'importe quel cercle centré en ce point : pour tout $x_0 \in U$ et tout $r > 0$,

$$u(x_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + re^{i\theta}) d\theta. \tag{XIII.5}$$

Comme conséquence de la formule de Green et si la fonction u est lisse, la propriété ci-dessus est équivalente au fait que le laplacien Δu de u soit positif ou nul. En fait, il est plus naturel d'introduire l'opérateur $d^c = \star d$ agissant sur les fonctions et de considérer la 2-forme $dd^c u$ qui est invariante par changement de coordonnée holomorphe. Rappelons que l'opérateur \star de Hodge agissant sur les 1-formes par $\star\alpha(\xi) = -\alpha(i\xi)$ est un invariant conforme. Il en va donc de même pour dd^c . En effet, dans une carte $x = a + ib$, on

peut écrire

$$dd^c u = \Delta u \, da \wedge db.$$

De plus, cette 2-forme admet une interprétation électrostatique : étant donnée une distribution de charges négatives définie par une 2-forme μ , le potentiel associé à cette distribution de charges est une fonction u telle que $-dd^c u = \mu$. On retiendra donc qu'une fonction lisse u est sous-harmonique si et seulement si $dd^c u$ est une 2-forme positive.

Dans le processus de balayage qui nous intéresse ici, nous aurons à considérer des fonctions sous-harmoniques qui ne sont pas différentiables. L'exemple typique que l'on rencontrera sera le maximum de deux fonctions harmoniques. Pour de telles fonctions, on aimerait définir la « répartition de charges correspondante » ; on cherche donc à définir $dd^c u$ pour toute fonction continue u . Il nous faut pour cela faire appel à la théorie des distributions.

Soit $C_c^\infty(U)$ l'espace des fonctions lisses à support compact sur U . Si u est une fonction continue sur U , on définit $dd^c u$ au sens des distributions : c'est la forme linéaire sur $C_c^\infty(U)$ donnée par

$$\langle dd^c u, \varphi \rangle := \int_U u \, dd^c \varphi.$$

Si u est lisse, $dd^c u$ au sens des distributions coïncide avec $dd^c u$ au sens usuel, en interprétant ce dernier comme une forme linéaire sur $C_c^\infty(U)$ par intégration.

Proposition XIII.2.1. — *Une fonction continue $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ est sous-harmonique si et seulement si $dd^c u$ est une forme linéaire positive, c'est-à-dire une mesure positive.*

Démonstration. — Soit $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère un noyau régularisant $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ positif, à support compact et invariant par rotation. Pour $\varepsilon > 0$, on note $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$; c'est une fonction lisse qui tend uniformément vers u sur tout compact de U quand ε tend vers 0.

Supposons d'abord que $dd^c u$ au sens des distributions soit une forme linéaire positive. Soit $\varphi \in C_c^\infty(U)$ avec $\varphi \geq 0$. Alors, pour ε

assez petit,

$$\begin{aligned} \langle dd^c u_\varepsilon, \varphi \rangle &= \int_U u_\varepsilon dd^c \varphi \\ &= \int_U u dd^c(\varphi * \rho_\varepsilon) \\ &= \langle dd^c u, \varphi * \rho_\varepsilon \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que $dd^c u_\varepsilon$ (au sens des distributions) est une forme linéaire positive. Comme u_ε est lisse, $dd^c u_\varepsilon$ est bien défini au sens usuel et positif (en tant que 2-forme). Par suite, u_ε vérifie l'inégalité (XIII.5). Comme u_ε tend vers u uniformément sur tout compact quand ε tend vers 0, on en déduit que u vérifie également (XIII.5), c'est-à-dire est sous-harmonique.

Réciproquement, supposons que u soit sous-harmonique, c'est-à-dire vérifie l'inégalité (XIII.5). L'invariance par rotation de ρ_ε permet alors de montrer que u_ε vérifie également cette inégalité. Comme u_ε est lisse, on en déduit que $dd^c u_\varepsilon$ est positif. En utilisant la convergence uniforme de u_ε vers u , on a alors, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(U)$ avec $\varphi \geq 0$:

$$\begin{aligned} \langle dd^c u, \varphi \rangle &= \int_U u dd^c \varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U u_\varepsilon dd^c \varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U \varphi dd^c u_\varepsilon \geq 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que $dd^c u$ au sens des distributions est une forme linéaire positive. \square

Comme nous l'avons dit précédemment, si u est une fonction lisse, $dd^c u$ est invariant par changement de coordonnée holomorphe. Ainsi, $dd^c u$ a un sens si u est une fonction lisse définie sur un domaine d'une surface de Riemann. Il est immédiat de voir que cela reste vrai (au sens des distributions) pour une fonction u seulement continue. Enfin, si u est une fonction continue sur une

surface de Riemann S , la proposition XIII.2.1 montre que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) la forme linéaire $dd^c u$ est une mesure positive ;
- (ii) dans toute coordonnée holomorphe sur S , pour tout x_0 et tout r positif,

$$u(x_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

La fonction u est dite *sous-harmonique* si elle vérifie ces propriétés.

Observons que la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par $u(z) = -\log|z|$ étant intégrable sur les compacts de \mathbb{C} , elle possède un laplacien au sens des distributions sur \mathbb{C} défini par

$$\langle dd^c u, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{C}} u dd^c \varphi$$

pour toute fonction lisse à support compact φ . La formule de Green implique que $dd^c u = -2\pi\delta_0$. En effet, on se donne des réels $0 < \varepsilon < r$ tels que φ soit nulle à l'extérieur du disque de rayon r . On a alors

$$\int_{\varepsilon \leq |z| \leq r} u dd^c \varphi = - \int_{|z|=\varepsilon} \frac{\varphi}{\varepsilon} + \int_{|z|=\varepsilon} \log \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

et on obtient bien $\langle dd^c u, \varphi \rangle = -2\pi\varphi(0)$ en faisant tendre ε vers 0. Ainsi, si S est une surface de Riemann, toute fonction sous-harmonique sur $S \setminus \{p_0\}$ qui admet une singularité logarithmique simple p_0 admet un laplacien au sens des distributions défini sur la surface S entière : c'est une mesure signée qui donne la masse -2π à p_0 et qui est positive en dehors de p_0 .

On considère une surface de Riemann S , ainsi qu'une fonction $u_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$ sous-harmonique sur S avec une singularité logarithmique simple. Une manière de construire de telles fonctions est de choisir un disque D d'adhérence compacte dans S , pour lequel il existe un biholomorphisme $\varphi : D \rightarrow \mathbb{D}$; il suffit alors de définir u_0 par $u_0(p) := -\log|\varphi(p)|$ pour $\varphi(p)$ dans $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ et $u_0(p) = 0$ ailleurs. La singularité logarithmique se situe alors au point $p_0 := \varphi^{-1}(0)$. On note $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions engendrée par un processus de balayage sur S initié avec u_0 .

Proposition XIII.2.2. — Pour tout n , la fonction u_n est sous-harmonique sur $S \setminus \{p_0\}$ avec une singularité logarithmique simple en p_0 . De plus, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

Démonstration. — On raisonne par récurrence et on suppose que u_n est sous-harmonique sur $S \setminus \{p_0\}$. Soit D le disque ouvert tel que u_{n+1} est obtenu à partir de u_n par balayage sur D . On suppose que D contient p_0 . Rappelons que u_{n+1} coïncide avec u_n sur $S \setminus D$ et que $u_{n+1}|_D$ est l'extension harmonique de $u_n|_{\partial D}$ avec une singularité logarithmique en p_0 . Comme $u_n - u_{n+1}$ est sous-harmonique sur D et qu'elle s'annule sur ∂D , on voit que $u_n \leq u_{n+1}$, par le principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques.

Vérifions maintenant que u_{n+1} est sous-harmonique. Elle l'est clairement sur $D \setminus \{p_0\}$ et sur $S \setminus \overline{D}$. Enfin, si $x_0 \in \partial D$, si $z : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ est une carte holomorphe autour de x_0 telle que $z(x_0) = 0$ et si $r > 0$ est tel que $\mathbb{D}(0, r) \subset z(U_0)$, on a $u_{n+1}(x_0) = u_n(x_0)$ et

$$u_n(x_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z^{-1}(re^{i\theta}))d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{n+1}(z^{-1}(re^{i\theta}))d\theta.$$

On a donc montré que u_{n+1} est sous-harmonique sur $S \setminus \{p_0\}$. Si le disque D ne contient pas p_0 , la preuve est similaire. □

Proposition XIII.2.3. — Si, pour un point p de $S \setminus \{p_0\}$, la suite $(u_n(p))_{n \geq 0}$ est majorée, alors la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur les compacts de $S \setminus \{p_0\}$ vers une majorante de Green $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ qui possède une seule singularité logarithmique, simple et située en p_0 .

Démonstration. — C'est une conséquence directe du principe de Harnack (théorème XII.2.1) et de la proposition XIII.2.2. □

La proposition suivante est l'argument clé de la preuve de Poincaré. C'est elle qui va permettre de contrôler le processus de balayage. Elle traduit mathématiquement l'intuition physique suivante : *au cours du processus de balayage, la charge électrique totale ne change pas*. Poincaré considère d'ailleurs cet énoncé comme une évidence physique et n'en donne pas de preuve.

Proposition XIII.2.4. — La masse $\int_S dd^c u_n$ ne dépend pas de n .

Preuve. — Fixons n et notons D le disque de S tel que u_{n+1} soit obtenu par balayage de u_n sur D . Si $\varphi \in C_c^\infty(S)$ est constante égale à 1 sur D , alors

$$\langle dd^c u_n, \varphi \rangle = \int_S u_n dd^c \varphi = \int_S u_{n+1} dd^c \varphi = \langle dd^c u_{n+1}, \varphi \rangle.$$

L'égalité du milieu est obtenue en remarquant que $dd^c \varphi$ est nul sur D et que u_n coïncide avec u_{n+1} hors de D . Si dans l'égalité ci-dessus, on laisse tendre φ vers la fonction constante égale à 1 sur D et valant 0 ailleurs, on obtient, par passage à la limite, que la masse totale de $dd^c u_n$ est égale à celle de $dd^c u_{n+1}$. \square

XIII.2.3. Convergence des processus de balayage sur A

Nous allons maintenant montrer que tout processus de balayage sur l'anneau A , initié avec une fonction sous-harmonique à singularité logarithmique simple, converge. Ceci prouvera l'existence d'une majorante de Green sur A .

Rappelons comment a été construit l'anneau A . On a choisi une carte holomorphe z définie sur un ouvert U de S telle que l'image de z contient le disque unité de \mathbb{C} ; on a également choisi un réel $r \in]0, 1[$ puis on a posé $\Delta := \{p \in S; |z(p)| < r\}$ et $A = S \setminus \overline{\Delta}$. On fixe maintenant un réel $r' \in]r, 1[$ et on note

$$\Delta' := \{p \in S; |z(p)| < r'\}.$$

On fixe un point $p_0 \in A$ tel que $p_0 \notin \Delta'$. On considère une fonction $u_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$ sous-harmonique sur S , avec une singularité logarithmique simple en p_0 et dont le support est un compact de A . On note $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions engendrée par un processus de balayage sur S initié avec u_0 . D'après la proposition XIII.2.2, c'est une suite croissante de fonctions sous-harmoniques sur $A \setminus \{p_0\}$ qui ont toutes une singularité logarithmique simple en p_0 . Remarquons par ailleurs que ces fonctions sont toutes à support compact dans A . D'après la proposition XIII.2.3, pour obtenir l'existence d'une majorante de Green sur A , il nous suffit de trouver un point $p \in A$ tel que la suite $(u_n(p))_{n \geq 0}$ soit majorée. Pour $n \geq 0$, nous considérons la fonction $\bar{u}_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ qui coïncide avec u_n sur A et qui est identiquement nulle sur

$$S \setminus A = \overline{\Delta} = \{p \in S; |z(p)| \leq r\}.$$

Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme XIII.2.5. — Soient r et r' tels que $0 < r < r' < 1$. Pour tout s , notons $\mathbb{D}(0, s)$ le disque ouvert de rayon s centré à l'origine dans \mathbb{C} . Si $u : \mathbb{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, sous-harmonique et qui s'annule sur le disque $\mathbb{D}(0, r)$, alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r'e^{i\theta})d\theta \leq \log \frac{r'}{r} \int_{\mathbb{D}(0, r')} dd^c u. \tag{XIII.6}$$

Preuve. — Pour $0 < s < 1$, notons $J(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(se^{i\theta})d\theta$. Commençons par le cas où u est une fonction lisse ; on va alors majorer $J(r')$ en intégrant sa dérivée. Pour $0 \leq s < 1$, on a

$$sJ'(s) = \int_0^{2\pi} \frac{du}{ds}(se^{i\theta})s \frac{d\theta}{2\pi}.$$

D'après la formule de Green, le membre de droite ci-dessus s'interprète comme l'intégrale du laplacien de u sur le disque $\mathbb{D}(0, s)$: on a donc, pour $0 < s < r'$,

$$J'(s) = \frac{1}{s} \int_{\mathbb{D}(0, s)} dd^c u \leq \frac{1}{s} \int_{\mathbb{D}(0, r')} dd^c u.$$

En intégrant cette inégalité, on obtient

$$J(r') - J(r) \leq \log \frac{r'}{r} \int_{\mathbb{D}(0, r')} dd^c u.$$

Comme $J(r)$ est nul, on obtient bien l'inégalité (XIII.6).

Pour traiter le cas où u n'est pas lisse, on considère, comme dans la preuve du lemme de Weyl III.2.4 ou de la proposition XIII.2.1, un noyau régularisant $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ positif, à support compact et invariant par rotation. Pour $0 < \varepsilon < 1 - r_1$, la fonction $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$ est sous-harmonique et lisse ; l'inégalité (XIII.6) est donc satisfaite pour u_ε . Quand ε tend vers 0, la fonction u_ε converge uniformément vers u et la mesure $dd^c u_\varepsilon$ tend faiblement vers $dd^c u$ (voir la preuve de la proposition XIII.2.1). L'inégalité (XIII.6) pour u se déduit donc de l'inégalité (XIII.6) pour u_ε . \square

Le lemme XIII.2.5 montre que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\int_{\partial\Delta'} u_n = \int_{\partial\Delta'} \bar{u}_n \leq \log \frac{r'}{r} \int_{\Delta'} dd^c \bar{u}_n = \log \frac{r'}{r} \int_{\Delta' \setminus \bar{\Delta}} dd^c u_n.$$

Remarquons que $dd^c u_0$, en restriction à $A \setminus \{p_0\}$, est une mesure de masse finie. Rappelons par ailleurs que par la proposition XIII.2.4, « la charge électrique totale ne change pas au cours du processus de

balayage », autrement dit que $\int_{A \setminus \{p_0\}} dd^c u_n$ est indépendante de n et, par suite, $\int_{\Delta'} dd^c u_n$ est majorée indépendamment de n . On en déduit que $\int_{\partial \Delta'} u_n$ est majorée indépendamment de n par une constante C .

Cette dernière majoration va suffire à contrôler les fonctions u_n en un point. Considérons la suite des fonctions u_n restreintes à $\partial \Delta'$. Nous venons de montrer qu'elles sont toutes de moyenne inférieure à C . Par ailleurs, la suite (u_n) est croissante. Le théorème des compacts emboîtés donne l'existence d'un point p de $\partial \Delta' \subset A \setminus \{p_0\}$ telle que la suite $(u_n(p))$ est majorée par C . La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (vue comme suite de fonctions sur $A \setminus \{p_0\}$, et non pas sur $S \setminus \{p_0\}$) converge donc uniformément sur les compacts de $A \setminus \{p_0\}$ vers une majorante de Green $u : A \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ avec une singularité logarithmique simple en p_0 . D'après la proposition XIII.1.1, le théorème d'uniformisation XII.0.1 en découle.

XIII.3. La preuve plus directe de Koebe

Nous expliquons maintenant la preuve de l'existence d'une majorante de Green sur l'anneau A que Koebe donne dans sa note [Koe1907b]. Koebe explique que cette preuve lui a été inspirée par la lecture du mémoire de Poincaré [Poin1907]. Il ne s'agit d'ailleurs pas d'une preuve réellement nouvelle mais plutôt d'un « nettoyage radical » de celle contenue dans [Poin1907]. Outre qu'elle est significativement plus courte que celle de Poincaré, la preuve que donne Koebe possède un autre avantage : il n'est pas nécessaire de faire appel à la théorie des distributions pour la rendre rigoureuse.

Nous gardons les notations de la section XIII.1. La preuve de Koebe utilise une exhaustion de $A := S \setminus \overline{\Delta}$ par des anneaux relativement compacts. On commence par choisir une exhaustion $D_0 \subset D_1 \subset \dots$ de la surface S par une suite croissante de domaines simplement connexes relativement compacts, à bords analytiques (voir le corollaire XI.2.2), tels que D_0 contienne $\overline{\Delta}$. Pour chaque $n \geq 0$, on note $A_n := D_n \setminus \overline{\Delta}$. On obtient ainsi une exhaustion $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ de l'anneau A par une suite croissante d'anneaux topologiques, relativement compacts dans S . Pour chaque n , le bord de A_n dans S possède deux composantes $\partial \Delta$ et ∂D_n .

On fixe un point p_0 dans l'anneau A_0 . Les travaux de Schwarz montrent que, pour chaque n , l'anneau A_n admet une fonction de Green u_n dont le pôle est situé en p_0 (corollaire XI.1.6). Rappelons

que ceci signifie que u_n est une fonction définie et harmonique sur $A_n \setminus \{p_0\}$, qui possède une singularité logarithmique simple en p_0 (voir définition XI.1.1) et qui tend vers 0 quand on sort de tout compact de A_n . On étend la fonction u_n sur l'anneau \bar{A} en posant $u_n = 0$ sur $\bar{A} \setminus A_n$; la fonction ainsi obtenue est continue.

La preuve de Koebe consiste à montrer que la suite des fonctions $(u_n)_{n \geq 0}$ converge (uniformément sur tout compact de $A \setminus \{p_0\}$) vers une majorante de Green sur A . Pour tout $n \geq 0$, la fonction u_n est harmonique sur $A_n \setminus \{p_0\}$, nulle sur $A \setminus A_n$, tend vers $+\infty$ au voisinage de p_0 ; le principe du maximum entraîne donc que u_n est positive ou nulle. Ceci implique que la fonction $u_{n+1} - u_n$ est positive ou nulle sur $A \setminus A_n$ (en effet, u_{n+1} est positive ou nulle et u_n est nulle sur $A \setminus A_n$); comme $u_{n+1} - u_n$ est harmonique sur A_n (y compris en p_0), on en déduit, en utilisant à nouveau le principe du maximum, que $u_{n+1} - u_n$ est positive ou nulle sur tout A . Ainsi, $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de fonctions positives ou nulles. D'après le principe de Harnack XII.2.1, pour montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout compact de A vers une fonction $u : A \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (qui sera alors automatiquement une majorante de Green), il suffit de trouver un point $p \in A \setminus \{p_0\}$ tel que la suite $(u_n(p))_{n \geq 0}$ soit bornée.

L'argument clé est une majoration de l'intégrale, le long de ∂A , de la dérivée partielle de u_n dans la direction normale à ∂A . Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, notons B_ε le disque ouvert de centre p_0 de rayon ε , dans une coordonnée holomorphe locale définie au voisinage de p_0 , puis notons $A_{n,\varepsilon} := A_n \setminus B_\varepsilon$. Le bord de $A_{n,\varepsilon}$ (dans S) est constitué de trois composantes ∂A , ∂D_n et ∂B_ε . Si p est un point du bord $A_{n,\varepsilon}$, on note $\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(p)$ la dérivée partielle de la fonction u_n dans la direction de la normale rentrante au bord de $A_{n,\varepsilon}$, évaluée au point p . La formule de Green s'écrit :

$$\int_{\partial A} \frac{\partial u_n}{\partial \nu} = - \int_{A_{n,\varepsilon}} \Delta u_n - \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u_n}{\partial \nu} - \int_{\partial D_n} \frac{\partial u_n}{\partial \nu}. \tag{XIII.7}$$

La fonction u_n est harmonique sur $A_n \setminus \{p_0\}$; le premier terme du membre de droite ci-dessus est donc nul. D'autre part, si w est une coordonnée holomorphe au voisinage de p_0 , la fonction $u_n(p)$ se comporte comme $-\log|w(p) - w(p_0)|$ à une quantité bornée près; la deuxième intégrale du membre de droite tend donc vers -2π quand ε tend vers 0. Enfin, nous avons vu que la fonction u_n est positive ou nulle sur \bar{A}_n et nulle sur ∂A_n ; la dérivée $\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(p)$ est positive ou nulle en tout point p

de ∂A_n . En particulier, la troisième intégrale du membre de droite est positive ou nulle. On obtient ainsi la majoration

$$\int_{\partial A} \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \leq 2\pi. \quad (\text{XIII.8})$$

Remarque XIII.3.1. — Tout comme Poincaré, Koebe ignore purement et simplement les problèmes relatifs à la régularité des fonctions considérées! Pour $n \geq 0$, la fonction de Green u_n est analytique sur $A_n \setminus \{p_0\}$ mais *a priori* seulement continue sur $\overline{A_n} \setminus \{p_0\}$; parler de la dérivée normale de u_n le long de ∂A_n et appliquer la formule de Green n'a donc *a priori* aucun sens. Pour résoudre ce type de problèmes dans la preuve de Poincaré, nous avons dû faire appel à la théorie des distributions. Ici, les difficultés ne sont qu'apparentes : on peut en effet montrer que la fonction u_n se prolonge en une fonction analytique sur un voisinage de $\overline{A_n} \setminus \{p_0\}$. Voici une preuve. Considérons deux copies $\overline{A_n^1}$ et $\overline{A_n^2}$ de l'anneau fermé $\overline{A_n}$. En collant $\overline{A_n^1}$ et $\overline{A_n^2}$ le long de leurs bords, on obtient une surface de Riemann Σ_n : le double de l'anneau A_n . Cette surface Σ_n a la topologie du tore \mathbb{T}^2 ; c'est donc une courbe elliptique. Notons σ l'involution de Σ_n qui échange $\overline{A_n^1}$ et $\overline{A_n^2}$. D'après la section II.2.4, il existe une unique fonction $v_n : \Sigma_n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique sauf aux points p_0^1 et p_0^2 , avec une singularité en $-\log|w - w(p_0^1)|$ en p_0^1 et une singularité en $\log|w - w(p_0^2)|$ en p_0^2 . La fonction $v_n \circ \sigma$ est harmonique sauf aux points $p_0^2 = \sigma(p_0^1)$ et $p_0^1 = \sigma(p_0^2)$, avec une singularité en $-\log|w - w(p_0^2)|$ en p_0^2 et une singularité en $\log|w - w(p_0^1)|$ en p_0^1 . Par unicité, on a donc $-v_n = v_n \circ \sigma$. Comme les points de $\partial A_n^1 = \partial A_n^2$ sont des points fixes de σ , on en déduit que v_n s'annule sur $\partial A_n^1 = \partial A_n^2$. Ainsi, la restriction de v_n à $\overline{A_n^1}$ est une fonction de Green sur $\overline{A_n^1} \simeq \overline{A_n}$ avec pôle en $-\log|z - z(p_0)|$ en p_0 : par unicité, c'est la fonction u_n ! Ceci montre que u_n peut être vue comme la restriction d'une fonction analytique définie sur une surface de Riemann qui contient $\overline{A_n}$; on peut donc parler sans scrupule de la dérivée normale de u_n le long de ∂A_n et appliquer la formule de Green.

Il nous reste à montrer que l'inégalité (XIII.8) suffit à majorer la suite $(u_n(p))_{n \in \mathbb{N}}$ en un point $p \in A$. Rappelons que l'anneau A est le complémentaire dans S d'un disque fermé $\overline{\Delta} := \{p \in S; |z(p)| \leq r\}$ ($r < 1$) défini dans une carte holomorphe z dont l'image contient le disque unité de \mathbb{C} . Soit $r' \in]r, 1[$ et soit $\Delta' := \{p \in S; |z(p)| < r'\}$. Quitte à prendre r' suffisamment proche de r , on peut supposer que le point p_0 n'est pas

dans $\overline{\Delta}'$. Pour tout $n \geq 0$, on note m_n le minimum de la fonction u_n sur le cercle $\partial \Delta' = \{p \in S; |z(p)| = r'\}$ et on considère la fonction h_n définie sur l'ouvert U par

$$h_n(q) := m_n \frac{\log \frac{|z(q)|}{r}}{\log \frac{r'}{r}}.$$

Sur le cercle $\partial \Delta = \partial A = \{p \in S; |z(p)| = r\}$, les fonctions u_n et h_n sont toutes deux nulles. Sur le cercle $\partial \Delta' = \{p \in S; |z(p)| = r'\}$, on a

$$u_n \geq h_n = m_n.$$

Comme les fonctions u_n et h_n sont toutes deux harmoniques sur $\Delta' \setminus \overline{\Delta}$, on en déduit que u_n majore h_n sur $\overline{\Delta}' \setminus \Delta$. Comme u_n et h_n coïncident sur $\partial \Delta$, ceci entraîne que

$$\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(q) \geq \frac{\partial h_n}{\partial \nu}(q)$$

en tout point q de $\partial \Delta = \partial A$. D'après la majoration de l'intégrale de $\frac{\partial u_n}{\partial \nu}$ obtenue ci-dessus, on a donc

$$\int_{\partial A} \frac{\partial h_n}{\partial \nu} \leq 2\pi.$$

Mais un calcul direct (à partir de la formule définissant h_n) donne

$$\int_{\partial A} \frac{\partial h_n}{\partial \nu} = 2\pi r m_n.$$

Ceci montre que la suite réelle $(m_n)_{n \geq 0}$ est majorée. On fixe maintenant un point p sur $\partial \Delta'$. L'inégalité de Harnack (XII.1) implique qu'il existe une constante K telle que

$$u_n(p) \leq K m_n$$

pour tout n . On conclut donc, comme souhaité, que la suite $(u_n(p))_{n \geq 0}$ est bornée. Comme nous l'avons expliqué plus haut, cela entraîne que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge (uniformément sur tout compact de $A \setminus \{p_0\}$) vers une majorante de Green de l'anneau A .

Remarque XIII.3.2. — Les arguments clés de la preuve de Koebe sont très similaires à ceux de la preuve de Poincaré : dans les deux cas, on contrôle la suite $(u_n(p))_{n \in \mathbb{N}}$ pour un certain point p de A , en majorant l'intégrale sur un (éventuellement plusieurs) cercle(s) centré(s) en p de la dérivée de u_n dans la direction transverse à ce(s) cercle(s) (cette majoration étant elle-même obtenue *via* la formule de Green). Une différence

importante est que chez Poincaré la mesure $dd^c u_n$ est supportée dans un compact de A , alors que chez Koebe elle est concentrée sur $\partial A_n \cup \{p_0\}$ (en effet, dans la preuve de Koebe, si on prolonge la fonction u_n sur S en posant $u_n = 0$ sur $S \setminus \bar{A}$, alors \bar{u}_n devient une fonction sous-harmonique sur S avec une singularité logarithmique simple en p_0 ; la mesure $dd^c \bar{u}_n$ est concentrée en p_0 et sur ∂A_n , et la densité linéaire de $dd^c \bar{u}_n$ le long de ∂A_n n'est autre que la fonction $\frac{\partial u_n}{\partial \nu}$). En fait, l'apport de Koebe dans sa note [Koe1907b] est d'avoir compris :

- premièrement que le mémoire de Poincaré contenait un argument fondamentalement nouveau (la conservation de la charge électrique au cours du processus de balayage implique que l'intégrale sur le bord de A de la dérivée normale des fonctions apparaissant dans le processus de balayage est majorée) ;
- deuxièmement que ce seul argument de Poincaré suffit pour conclure, à condition de remplacer la suite de fonctions qui apparaît dans un processus de balayage par une suite de fonctions beaucoup plus simple, par exemple la suite des fonctions de Green associées à une exhaustion de A .

Le théorème d'uniformisation de 1907 à 2007

Fin 1907, le théorème d'uniformisation est démontré. La preuve de Koebe et celle de Poincaré (revue par Koebe) nous semblent rigoureuses au sens moderne du terme. Mais il faudra encore du temps pour en épurer les démonstrations et parvenir aux présentations « simples et naturelles » qu'on trouve dans les ouvrages d'aujourd'hui. Le théorème par lui-même cesse d'être un sujet de recherche et devient un outil que les mathématiciens vont avoir à cœur de polir sans cesse.

En 1909, Koebe sera invité par Poincaré à présenter ses preuves du théorème d'uniformisation dans des notes aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* [Koe1909b, Koe1909c]. Dans la note [Koe1909b], Koebe écrit que le problème de l'uniformisation se décompose en deux : un problème d'Analysis Situs (étant donnée une surface de Riemann, trouver un revêtement homéomorphe (pas nécessairement simplement connexe) à un ouvert de la sphère de Riemann), et un problème conforme (remplacer homéomorphe par biholomorphe). Selon Weyl [Wey1955] :

From then on, Koebe spent his whole scientific life in studying the problem of uniformization thoroughly from all sides, and with the most varied methods. To him above all we owe it that today the theory of uniformization, which certainly may claim a central role in complex function theory, stands before us as a mathematical structure of a particular harmony and grandeur.⁽¹⁾

1. À partir de ce moment, Koebe a passé sa vie à étudier systématiquement le problème de l'uniformisation, par tous les côtés et par les méthodes les plus diverses. Nous

La liste des publications de Koebe sur l'uniformisation est en effet impressionnante. Il utilise les techniques les plus modernes pour améliorer la preuve, par exemple avec les idées de Hilbert, ou annoncer des théorèmes plus généraux [Koe1908a, Koe1908b, Koe1909a, Koe1910b, Koe1910c]. Il publie aussi des articles sur le cas des surfaces algébriques, discutant les liens entre les différents aspects de l'uniformisation (les équations différentielles linéaires et les structures projectives, les groupes fuchsien, leurs déformations et les polygones fondamentaux, les fonctions fuchsien, la méthode de continuité, l'uniformisation à la Schottky, des exemples d'uniformisation explicites...) [Koe1909e, Koe1910a, Koe1912, Koe1914].

Dans son article de 1976 faisant le point sur le vingt-deuxième problème de Hilbert (l'uniformisation), Bers place une citation de Goethe en exergue :

Was du ererbt von deinen Vätern hast, erwirb es, um es zu besitzen ⁽²⁾.

Selon Bers [Ber1976] :

Chaque génération de mathématiciens, obéissant au conseil de Goethe, repense et retravaille les solutions découvertes par ses prédécesseurs et les place dans le cadre des concepts et des notations de l'époque.

Il n'est pas question de décrire ici le développement de la théorie des surfaces de Riemann tout au long du vingtième siècle. Nous voudrions cependant proposer un guide de lecture qui permette de suivre le processus par lequel les diverses démonstrations du théorème se sont progressivement simplifiées entre 1907 et aujourd'hui.

Outre leur complication, les preuves de Poincaré et Koebe de 1907 présentent des points faibles. Les surfaces de Riemann étudiées sont en effet munies *a priori* d'une fonction méromorphe globalement définie. À vrai dire, pour Koebe et Poincaré ce n'était pas un point faible puisque c'était leur définition d'une surface de Riemann. La construction des fonctions de Green repose sur la méthode alternante de Schwarz chez Koebe et sur le balayage chez Poincaré. La méthode alternante de Schwarz est certes solide mais semble peu naturelle puisqu'elle repose sur un choix de triangulation, et qu'une surface de Riemann abstraite ne possède pas

lui devons en premier lieu que la théorie de l'uniformisation, qui peut bien sûr revendiquer un rôle central dans l'analyse complexe, dresse devant nous sa structure mathématique d'une harmonie et d'une grandeur particulière.

2. Ce que tu hérites de tes parents, il faut le conquérir pour le posséder.

de triangulation canonique. La méthode du balayage nécessite quelques précisions d'analyse, pas tout à fait à la disposition de Poincaré. Les améliorations vont venir très vite.

En juin 1907, Montel publie son premier article [Mon1907] sur les *familles normales*, qui va éclairer et simplifier considérablement la dernière partie des preuves de Koebe et Poincaré, celle qui consiste à faire converger les uniformisations partielles définies sur des domaines relativement compacts.

En 1899, Hilbert avait ressuscité le principe de Dirichlet en introduisant de nouvelles méthodes permettant de montrer que certaines fonctionnelles admettent effectivement un minimum (voir [Hil1900a, Hil1904, Hil1905]). En 1909, Hilbert annonce enfin que ses résultats permettent de montrer l'existence d'une majorante de Green dans un cadre très général [Hil1909], ce qui permet de libérer les preuves du théorème d'uniformisation de l'usage du procédé alternant de Schwarz. D'ailleurs, Koebe ne tardera pas à publier en 1909 et 1910 des articles dans lesquels il améliore sa preuve en utilisant les méthodes de Hilbert [Koe1909a, Koe1910b]. Bien sûr, la portée des idées de Hilbert est plus large puisque celles-ci ouvrent la porte à la théorie de Hodge.

Résumons la situation en 1909 : si on part d'une surface de Riemann avec une fonction méromorphe, on a une preuve simple du théorème d'uniformisation. Le versant topologique (existence d'une base dénombrable d'ouverts) est donné par le théorème de Poincaré-Volterra tandis que le versant conforme est donné par les résultats de Hilbert.

Au semestre d'hiver à Göttingen en 1911-1912, Weyl expose la théorie des surfaces de Riemann. Son livre *Die Idee der Riemannschen Fläche* paraîtra en 1913 et sera réédité plusieurs fois, jusqu'en 1955 [Wey1913, Wey1955]. Il jouera un rôle fondamental. L'une des contributions de ce livre est de donner pour la première fois la définition moderne de variété abstraite et donc de surface de Riemann qui n'est pas *a priori* munie d'une fonction méromorphe. Weyl signale que cette approche « abstraite » remonte pour l'essentiel à Klein qui lui-même parle de l'influence de Prym⁽³⁾. En ce qui concerne la démonstration par Weyl du théorème d'uniformisation, elle utilise les idées, récentes à

3. *Thus we are faced with the unique situation that the less restrictive idea of Riemann surface is due to some unknown comment made by Prym and misunderstood by Klein*, selon la recension par Sario du livre de Weyl.

l'époque, de Hilbert sur le principe de Dirichlet. Cette preuve ne s'étend pas aisément à ces surfaces abstraites, car il n'est pas clair qu'elles soient à base dénombrable. La première édition suppose d'ailleurs les surfaces de Riemann triangulées.

À notre connaissance, le livre de Weyl restera la principale référence complète pour le théorème d'uniformisation jusqu'aux années 50. Des aspects connexes à cette théorie apparaissent bien sûr dans d'autres livres. Nous pouvons citer les deux volumes d'Appell, Goursat et Fatou [ApGo1929, Fat1930], ou le livre de Ford [Ford1929]. Par ailleurs, la somme de Fricke et Klein [FrKl1897] est incontournable, mais d'accès difficile.

En 1925, Radó montre que toutes les surfaces de Riemann abstraites sont à base dénombrable et triangulables [Rad1925], ce qui élimine l'hypothèse évoquée plus haut pour le livre de Weyl. Le théorème est alors complètement démontré pour les surfaces abstraites.

En 1941, van der Waerden propose un argument topologique très simple, qui n'utilise pas la classification topologique des surfaces, pour montrer qu'une surface de Riemann simplement connexe ouverte est la réunion croissante de domaines compacts simplement connexes à bords polygonaux [Wae1941]. Cela simplifie un aspect des preuves de Koebe et Poincaré qui n'était pas clairement détaillé dans leurs articles. Ceci permettra par exemple à Carathéodory de donner une preuve simplifiée du théorème d'uniformisation en 1952 dans laquelle il fait encore usage de la méthode de Schwarz pour les polygones [Car1932, seconde édition].

Une autre simplification importante apparaît dans les années 20. L'usage des fonctions sous-harmoniques et des « familles de Perron » permet de simplifier considérablement la construction des fonctions de Green. La méthode est mise en place dans [Per1923] et simplifiée dans [Wien1924a, Wien1924b, Wien1925] puis dans [Bre1939]. Le principe de Dirichlet atteint ainsi sa formulation et sa preuve la plus simple. On pourra consulter [Han1979, Gard1979] pour l'histoire de ce principe et de ses approches successives.

En 1949, Heins observe que les méthodes à la Perron ne requièrent aucune hypothèse topologique et permettent en fait de se passer des résultats de Radó mentionnés plus haut [Hei1949].

Ainsi, au début des années 1950, tous les outils sont en place : familles normales, fonctions harmoniques et sous-harmoniques, éléments de

topologie. C'est également la période où la théorie des faisceaux fait son apparition et permet de formuler de manière limpide un grand nombre de concepts souvent confus auparavant : diviseurs, cohomologie, théorème de Riemann-Roch, dualité de Serre, etc. Les temps sont mûrs pour des présentations « optimisées » de la théorie des surfaces de Riemann et notamment du théorème d'uniformisation, utilisant peu de topologie et peu d'analyse.

Voici quelques-uns des livres de référence, publiés entre 1950 et aujourd'hui, qui contiennent tous une démonstration et dans lesquels les améliorations successives sont dès lors de l'ordre du détail.

1. Nevanlinna, *Uniformisierung* [Nev1953]. Les théorèmes d'existence sont traités à l'aide de la méthode alternante de Schwarz. On y trouve une nouvelle démonstration que les surfaces de Riemann sont à base dénombrable.
2. Springer, *Introduction to Riemann surfaces* [Spr1957]. Utilise la méthode de projection orthogonale à la Hilbert et suit la preuve de Koebe [Koe1910b]. Ce livre présente bien les intuitions provenant de la physique. En revanche, il est moins rigoureux sur les considérations topologiques (existence d'une triangulation).
3. Ahlfors et Sario, *Riemann surfaces* [AhSa1960]. Le livre présente de manière détaillée la classification topologique des surfaces et le théorème de Radó d'existence d'une triangulation. Le livre présente le principe de Dirichlet et les méthodes analytiques (la méthode de Hilbert, les capacités).
4. Ahlfors, *Conformal invariants* [Ahl1973]. La méthode de Perron est maintenant systématiquement utilisée pour construire des fonctions de Green.
5. Farkas et Kra, *Riemann surfaces* [FaKr1980]. La présentation complète du théorème d'uniformisation est fondée sur la méthode de Perron et regroupe environ 80 pages du livre.
6. Beardon, *A primer on Riemann surfaces* [Bea1984]. Ce livre présente une preuve complète du théorème d'uniformisation basée sur la méthode de Perron.
7. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann* [Rey1989]. Une vingtaine de pages suffisent à une présentation claire du théorème. L'argument principal de la preuve utilise la méthode de Perron.

8. Forster, *Lectures on Riemann surfaces* [Forst1977]. De manière étonnante, ce livre parle du théorème de « Riemann » plutôt que du théorème d'uniformisation.
9. Jones, *Rudiments on Riemann surfaces* [Jon1971]. Le livre fournit une preuve détaillée de l'uniformisation utilisant la méthode de Perron.
10. Abikoff, *The uniformization theorem* [Abi1981]. En moins d'une vingtaine de pages (efficaces et pédagogiques) l'auteur présente le théorème d'uniformisation avec une preuve inspirée par la méthode de Perron. Dans le cas parabolique, l'auteur rend rigoureux l'argument de Poincaré d'existence d'un arc analytique qui va à l'infini.
11. Hubbard, *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics* [Hub2006]. Ce dernier livre sur notre liste comporte une démonstration limpide et « allant de soi ». Cette démonstration est pourtant un héritage de plus de deux siècles de mathématiques (même si elle ne contient aucune référence explicite aux « Vätern » !).

Pour conclure, il faut encore expliquer que le cas particulier des surfaces compactes a connu un regain d'intérêt récent suite aux méthodes à la Hamilton-Perelman pour démontrer la conjecture de Poincaré. Il était naturel de chercher à démontrer que toute métrique riemannienne sur une surface compacte est conformément équivalente à une métrique à courbure constante en suivant le « flot de Ricci ». La preuve que ce procédé fonctionne effectivement n'est malheureusement pas aussi élémentaire que ce qu'on aurait pu espérer : elle date de 2006 [CLT2006].

Appendices

Correspondance entre Klein et Poincaré

Nous transcrivons ici la correspondance entre Klein et Poincaré des années 1881-1882. La traduction des lettres de Klein (écrites en allemand) est celle de François Poincaré (petit-fils de Henri Poincaré), parue aux *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* [Poin1989]. Ces lettres sont aussi publiées (mais non traduites) dans *Acta Mathematica* [KlePoi1923]. Ces deux références sont richement annotées.

En guise d'introduction, nous nous contenterons d'une citation de Freudenthal [Freu1955] :

Vingt-six lettres ont été échangées entre Klein et Poincaré sur les fonctions automorphes. Klein a écrit la première, après la parution de la troisième Note de Poincaré. Dans cette correspondance Poincaré est l'élève, qui pose des questions, et Klein est le maître, qui en toute sincérité et loyauté guide son élève et lui fait combler les lacunes énormes de son érudition mathématique. Il n'y avait qu'un seul différend : Klein désapprouvait la dénomination de fonctions fuchsienues que Poincaré avait choisie, ignorant les mérites des mathématiciens de l'école de Riemann, mais Poincaré y tenait. En parlant de fonctions automorphes on a accepté le point de vue de Klein.

Qui peut mesurer les sentiments provoqués chez Klein par les progrès énormes et instantanés que Poincaré fit sur une route où eux, Klein et ses élèves, n'avaient avancé que pas à pas ? Plus on saisit cette situation, plus on doit admirer l'attitude irréprochable de Klein.

I

Leipzig, le 12 juin 1881

Monsieur,

Vos trois Notes dans les *Comptes rendus* : « Sur les fonctions fuchsiennes » [Poin1881b], dont j'ai d'abord pris connaissance hier et aussi alors seulement rapidement, sont en relation si étroite avec les réflexions et les efforts qui m'ont occupé au cours des dernières années, que je me sens obligé de vous écrire. Je voudrais, en premier lieu, me rapporter aux différents travaux que j'ai publiés dans les tomes XIV [Kle1878b, Kle1878a, Kle1878c], XV [Kle1879a, Kle1879b] et XVII [Kle1880a] des *Mathematische Annalen* sur les fonctions elliptiques. Il ne s'agit, avec les fonctions elliptiques modulaires, que d'un cas particulier du rapport de dépendance que vous avez considéré ; mais un examen plus poussé vous montrera qu'en effet j'avais un point de vue général. À cet égard, je voudrais attirer votre attention sur certains points particuliers :

- p. 128 du tome XIV [Kle1878b] traite des fonctions générales qui peuvent être représentées par des fonctions modulaires, sans être rattachées aux fonctions doublement périodiques. Il en résulte, d'abord comme un cas particulier, l'importante théorie du polygone fondamental ;
- p. 159-160 du tome XIV [Kle1878b], il est exposé qu'on peut représenter toutes les séries hypergéométriques par des fonctions uniformes des fonctions modulaires convenables ;
- les pages 428 et suivantes du tome XIV [Kle1878c] contiennent un tableau qui illustre la disposition mutuelle des triangles d'arcs circulaires avec les angles $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ (ce qui est aussi un exemple des classes de fonctions particulières étudiées par Halphen), à propos de quoi je dois remarquer maintenant que M. Schwarz avait déjà expliqué les cas $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ dans le tome LXXV du Journal de Crelle [Schw1873].

Dans le tome XVII [Kle1880a], p. 62 et suivantes, je présente ensuite une vue d'ensemble rapide des conceptions approfondies, que, dans l'intervalle, j'ai préparées avec la théorie des fonctions modulaires elliptiques. Je n'ai rien publié sur ces conceptions, mais je les ai présentées, pendant l'été 1879, dans un cours à l'École d'enseignement technique général de Munich. Mon fil des idées, qui se rapproche sur

beaucoup de points de celui que vous avez exposé, était à l'époque le suivant :

- Fonctions périodiques et doublement périodiques ne sont que des exemples de fonctions uniformes à transformations linéaires en soi⁽⁴⁾. C'est la tâche de l'analyse moderne de déterminer toutes ces fonctions.
- Le nombre de ces transformations peut être fini ; cela donne les équations de l'icosaèdre, de l'octaèdre... que j'ai étudiées autrefois (*Math. Annalen* IX [Kle1875], XII [Kle1877a, Kle1877b]) et qui ont servi de point de départ de tout cet ensemble de notions.
- Groupes d'un nombre infini de transformations linéaires, qui donnent lieu à des fonctions utilisables (groupe discontinu, d'après votre terminologie), s'obtiennent *par exemple* en partant d'un polygone d'arcs circulaires, dont les cercles coupent orthogonalement un cercle fixe et dont les angles sont des parties exactes de π .
- On devait s'occuper de toutes ces fonctions (comme vous l'avez commencé en fait maintenant) mais pour atteindre des objectifs concrets ; limitons-nous aux triangles d'arcs circulaires et, en particulier, aux fonctions modulaires elliptiques.

Depuis, je me suis beaucoup occupé, aussi en discutant avec d'autres mathématiciens, de ces questions, mais, abstraction faite que je n'ai pas encore obtenu aucun résultat définitif, cela n'a pas, finalement, sa place ici. Je veux me borner à ce que j'ai publié ou exposé dans des cours. Peut-être aurais-je dû me mettre en rapport avec vous plus tôt, ou avec un de vos amis, comme par exemple Monsieur Picard (Voudriez-vous, à l'occasion, attirer l'attention de Monsieur Picard sur les *Annalen*, XIV, p. 122, § 8! [Kle1878b]). En effet votre démarche, celle qui conduit vos travaux depuis 2-3 ans, est, en réalité, très proche de la mienne. Aussi je serais heureux si cette première lettre donne lieu à une correspondance suivie. Il est vrai que, en ce moment, d'autres engagements m'éloignent de ces travaux, mais je suis d'autant plus incité à les reprendre que je dois faire, l'hiver prochain, un cours sur les équations différentielles.

Voulez-vous présenter mes compliments à Monsieur Hermite. J'ai souvent pensé prendre un contact épistolaire avec lui, et je l'aurais fait

4. La dénomination de ces fonctions fera l'objet d'un vif débat entre Klein et Poincaré, qui les appelle *fuchsien*nes. Ces fonctions s'appellent aujourd'hui *automorphes*.

depuis longtemps – et je ne doute pas pour mon plus grand profit – s'il n'y avait pas le problème de la langue. Comme vous le savez peut-être, je suis resté suffisamment longtemps à Paris pour parler et écrire le français ; mais, entre-temps, cette disposition, faute de pratique, s'est fortement appauvrie.

Veillez agréer l'assurance de ma considération distinguée.

Prof. Dr. F. Klein

Adresse : Leipzig, Sophienstraße 10/II.

II

[Caen, le] 15 juin [1881]

Monsieur,

Votre lettre me prouve que vous aviez aperçu avant moi quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans la théorie des fonctions fuchsienues. Je n'en suis nullement étonné ; car je sais combien vous êtes versé dans la connaissance de la géométrie non euclidienne qui est la clef véritable du problème qui nous occupe.

Je vous rendrai justice à cet égard quand je publierai mes résultats ; j'espère pouvoir me procurer d'ici là les tomes 14, 15 et 17 des *Mathematische Annalen* qui n'existent pas à la bibliothèque universitaire de Caen. Quant à la communication que vous avez faite au Polytechnicum de Munich, je vous demanderai de vouloir bien me donner quelques détails à ce sujet, afin que je puisse ajouter à mon mémoire une note vous rendant pleine justice ; car sans doute, je ne pourrai me procurer directement votre travail.

Comme je ne pourrai sans doute me procurer *immédiatement* les *Mathematische Annalen*, je vous prierais aussi de vouloir bien me donner quelques explications sur quelques points de votre lettre. Vous parlez de « *les fonctions modulaires elliptiques** »⁽⁵⁾.

Pourquoi ce pluriel ? Si la fonction modulaire est le carré du module exprimé en fonction du rapport des périodes, il n'y en a qu'une ; il faut donc entendre autrement l'expression *fonctions modulaires**.

Que voulez-vous dire par ces fonctions algébriques qui sont susceptibles d'être représentées par des fonctions modulaires ? Qu'est-ce aussi que la « *théorie du polygone fondamental** » ?

5. Les expressions en italique suivies d'un astérisque dans les lettres de Poincaré sont en allemand dans le texte original.

Je vous demanderai aussi de m'éclairer sur les points suivants :
Avez-vous trouvé tous les *polygones à arcs circulaires** qui donnent naissance à un groupe discontinu ?

Avez-vous démontré l'existence des fonctions qui correspondent à chaque groupe discontinu ?

J'ai écrit à M. Picard pour lui communiquer votre remarque.

Je me félicite, Monsieur, de l'occasion qui me met en rapport avec vous, j'ai pris la liberté de vous écrire en français ; car vous me dites que vous connaissez cette langue.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération.

Poincaré

III

Leipzig, le 19 juin 1881

Monsieur,

Au reçu, hier, de votre lettre, je vous ai envoyé immédiatement les tirés à part, dans la mesure où j'en possédais encore, des travaux se rapportant à notre sujet. Permettez-moi d'y ajouter, aujourd'hui, quelques lignes d'explications. À dire vrai, la question ne sera pas épuisée en une seule lettre, mais il nous faudra en échanger plusieurs, jusqu'à ce que nous ayons, mutuellement, un bon contact. Je voudrais faire ressortir, aujourd'hui, les points suivants :

1. Parmi les travaux envoyés il manque les trois les plus importants : celui du tome XIV des *Annalen* [Kle1878b, Kle1878c, Kle1878a], de même mes recherches sur l'icosaèdre dans les tomes IX et XII [Kle1875, Kle1877b], ainsi que mon deuxième mémoire sur les équations différentielles linéaires (qui semble également inconnu à M. Picard) aussi dans le tome XII [Kle1877a]. Je vous prie de vous les procurer quelque part. J'ai envoyé divers tirés à part à Paris, par exemple à Hermite.

2. Les travaux de mes élèves Dyck et Gierster complètent les miens. Je leur demande à l'un et à l'autre de vous envoyer leurs tirés à part. Une thèse de doctorat de M. Hurwitz, en relation avec ces mêmes théories, va être imprimée et elle vous parviendra d'ici quelques semaines.

3. Un de vos compatriotes, dont le nom vous est sans doute connu, puisqu'il a étudié avec Picard et Appell : M. Brunei (adresse : Liebigstraße 4/II) est ici depuis l'automne dernier. Peut-être seriez-vous

aussi intéressé d'entrer en correspondance avec lui ; il pourra, mieux que moi, vous parler de l'organisation du Séminaire que nous avons ici, et du rôle que les fonctions uniformes à transformations linéaires en soi ont joué là.

4. J'ai fait rédiger par M. Gierster un cahier de mon cours du semestre d'été 1879. Pour le moment je l'ai prêté, mais je dois le ravoïr dans les prochains jours, et l'examiner ensemble avec M. Brunei, après quoi nous vous en ferons un compte-rendu.

5. Je rejette la désignation *fonctions fuchsiennes*, bien que je comprenne que vous ayez été conduit à ces idées par les travaux de Fuchs. Au fond, toutes ces recherches se fondent sur les travaux de Riemann. Ma propre évolution a été fortement influencée par les considérations de Schwarz, intimement liées à celles de Riemann, dans le tome 75 du *Journal de Borchardt* [Schw1873] (que je vous recommande vivement si vous ne les connaissiez pas encore). Le mémoire de M. Dedekind sur les fonctions modulaires elliptiques a été seulement publié dans le tome 83 du *Journal de Borchardt* [Ded1877], alors que la représentation géométrique des fonctions modulaires était déjà évidente pour moi (automne 1877). Les mémoires de Fuchs sont en opposition délibérée avec ce mémoire de Dedekind, à cause de leur forme non géométrique. Je ne nie pas les grands services que M. Fuchs a rendus à d'autres parties de la théorie des équations différentielles, mais ses travaux nous mettent ici d'autant plus dans l'embarras que, pour la seule fois où il s'est expliqué sur les fonctions modulaires elliptiques dans une lettre à Hermite, il a laissé passer une faute fondamentale que Dedekind n'a critiqué que légèrement dans la revue citée.

6. On peut définir notamment une fonction à transformations linéaires en soi par le fait qu'elle applique le *demi-plan* sur un polygone à arcs circulaires quelconque. C'est alors à vrai dire seulement un cas particulier du cas général (je ne sais pas, pour le moment, si vous ne vous limitez pas seulement à ce cas particulier). Le groupe des transformations linéaires est alors caractérisé par le fait qu'il est contenu dans un groupe d'opérations deux fois plus grand, qui, à côté des transformations linéaires, contient aussi les réflexions (transformations par rayons réciproques). Dans ce cas, l'existence de la fonction a été établie rigoureusement par les travaux de longue date de Schwarz et de Weierstrass, si l'on ne veut pas faire appel aux principes généraux de Riemann. Voir Schwarz, tome 70 de *Borchardt* :

« Application du demi-plan sur des polygones à arcs circulaires »
[Schw1869].

7. Même dans ce cas particulier, je n'ai pas encore établi complètement tous les *groupes discontinus*; j'ai seulement constaté qu'il y en avait beaucoup pour lesquels il n'existe aucun cercle fondamental déterminé et auxquels par conséquent ne s'applique pas l'analogie avec la géométrie non euclidienne (qui m'est, d'ailleurs, très familière). Prenons, par exemple, un polygone quelconque, dont les côtés sont formés de cercles adjacents *quelconques*, alors l'engendrement par symétrie conduira aussi à un *groupe discontinu*.⁽⁶⁾

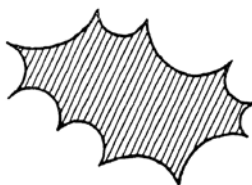


Fig. 1.

FIGURE 1. Polygone à arcs circulaires donnant lieu à un groupe discontinu

8. Vous trouverez, sans doute, une réponse aux autres questions posées dans votre lettre dans les mémoires envoyés, en particulier à celles concernant le pluriel des « fonctions modulaires » et, principalement, les « polygones fondamentaux ».

Dans l'espoir d'avoir bientôt de vos nouvelles, je vous prie de croire à mes sentiments dévoués.

F. Klein

IV

Caen, le 22 juin 1881

Monsieur,

Je n'ai pas encore reçu les envois que vous m'annoncez et que je ne tarderai sans doute pas à voir arriver à leur adresse. Mais je ne veux pas attendre ce moment pour vous remercier de vos promesses, ainsi que de votre lettre que j'ai lue avec le plus grand intérêt. Aussitôt après

6. Voir la figure 1.

l'avoir reçue, j'ai couru à la bibliothèque pour y demander le 70^e volume de *Borchardt*; malheureusement ce volume était prêté et je n'ai pu y lire le mémoire de M. Schwarz. Mais je crois pouvoir reconstituer d'après ce que vous m'en dites et y reconnaître certains résultats que j'avais trouvés sans me douter qu'ils avaient fait l'objet de recherches antérieures. Je crois donc comprendre que les fonctions fuchsiennes que les recherches de M. Schwarz et les vôtres permettent de définir sont celles dont je me suis occupé plus particulièrement dans ma note du 23 mai [Poin1881c]. Le groupe particulier dont vous me parlez dans votre dernière lettre me semble fort intéressant et je vous demanderai la permission de citer ce passage de votre lettre dans une communication que je ferai prochainement à l'Académie et où je chercherai à généraliser votre résultat.

Quant à la dénomination de fonctions fuchsiennes, je ne la changerai pas. Les égards que je dois à M. Fuchs ne me le permettent pas. D'ailleurs, s'il est vrai que le point de vue du savant géomètre d'Heidelberg est complètement différent du vôtre et du mien, il est certain aussi que ses travaux ont servi de point de départ et de fondement à tout ce qui s'est fait depuis dans cette théorie. Il n'est donc que juste que son nom reste attaché à ces fonctions qui y jouent un rôle si important.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération.

Poincaré

V

Leipzig, le 25 juin 1881

Cher Monsieur,

Envoyez-moi je vous prie, sans tarder une carte postale pour me dire si mon envoi des tirés à part ne vous est pas encore parvenu; je l'ai porté moi-même à la poste il y a aujourd'hui huit jours. Vous vous exprimerez différemment sur F. ⁽⁷⁾ quand vous connaîtrez toute la bibliographie. La théorie sur l'application des polygones à arcs circulaires est absolument indépendante du mémoire de F. dans le tome 66 [Fuc1866]; leur seul point commun est d'avoir été inspirés par Riemann.

7. Fuchs

Veillez agréer l'assurance de ma considération distinguée.

Prof. Dr. F. Klein

VI

Caen, le 27 juin 1881

Monsieur,

Au moment où j'ai reçu votre carte, j'allais précisément vous écrire pour vous remercier de votre envoi et vous en annoncer l'arrivée. S'il a été retardé c'est par suite d'une erreur de la poste qui l'a envoyé d'abord à la Sorbonne, puis au Collège de France, bien que l'adresse eût été parfaitement bien mise.

En ce qui concerne M. Fuchs et la dénomination de fonctions fuchsiennes, il est clair que j'aurais pris une autre dénomination si j'avais connu le travail de M. Schwarz ; mais je ne l'ai connu que par votre lettre, après la publication de mes résultats de sorte que je ne peux plus changer maintenant le nom que j'ai donné à ces fonctions sans manquer d'égards à M. Fuchs. J'ai commencé la lecture de vos brochures qui m'ont vivement intéressé, principalement celle qui a pour titre *Über elliptische Modulfunktionen* [Kle1880a]. C'est au sujet de cette dernière que je vous demanderai la permission de vous adresser quelques questions.

1 Avez-vous déterminé les *polygones fondamentaux** de tous les *sous-groupes** que vous appelez *groupes de congruence** et en particulier de ceux-ci :

$$\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 0 \pmod{n}.$$

2 Dans mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes, j'ai partagé les groupes fuchsien d'après divers principes de classification et entre autres d'après un nombre que j'appelle leur genre. De même vous partagez les *sous-groupes** d'après un nombre que vous appelez leur *Geschlecht*⁽⁸⁾. Le *genre* (tel que je l'entends) et le *Geschlecht* sont-ils un seul et même nombre ? Je n'ai pu le savoir, parce que je ne sais pas ce que c'est que le *Geschlecht im Sinne der Analysis Situs*⁽⁹⁾. Je vois seulement que ces nombres s'annulent à la fois. Auriez-vous donc l'obligeance de me dire ce que c'est que ce *Geschlecht im Sinne der*

8. « Genre ». Nous ne traduisons pas, car c'est l'objet d'une discussion entre Klein et Poincaré.

9. « Genre au sens de l'Analysis Situs ».

Analysis Situs ou, si cette définition est trop longue pour être donnée dans une lettre, dans quel ouvrage je pourrais la trouver ? Dans votre dernière lettre, vous me demandiez si je me suis renfermé dans le cas particulier où « *le groupe des transformations linéaires est alors caractérisé par le fait qu'il est contenu dans un groupe d'opérations deux fois plus grand, qui, à côté des transformations linéaires, contient aussi les réflexions** ». Je ne me suis pas renfermé dans ce cas, mais j'ai supposé que toutes les transformations linéaires conservaient un certain cercle fondamental. Je pense d'ailleurs pouvoir aborder par une méthode analogue le cas le plus général.

À ce propos, il me semble que tous les *sous-groupes** relatifs aux fonctions modulaires ne rentrent pas dans ce cas spécial.

Au sujet de ce groupe discontinu dont vous me parlez et que l'on obtient par des réflexions et par l'engendrement par symétries d'un polygone limité par des arcs de cercles se touchant deux à deux il me semble qu'il y a une condition supplémentaire dont vous n'avez pas parlé bien qu'elle ne vous ait sans doute pas échappé : deux arcs de cercle quelconques prolongés ne doivent pas se couper. Serait-ce abuser de votre complaisance que de vous poser encore une question ?

Vous dites : « *dans ce cas, l'existence de la fonction a été établie rigoureusement par les travaux de longue date de Schwarz et de Weierstrass** », et vous ajoutez « *si l'on ne veut pas faire appel aux principes généraux de Riemann** ». Qu'entendez-vous par là ?

J'ai écrit dernièrement à M. Hermite ; je lui ai fait part succinctement du contenu de vos lettres, et je lui ai envoyé les compliments dont vous m'aviez chargé pour lui.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma reconnaissance et de mon respect.

Poincaré

VII

Leipzig, le 2 juillet 1881

Cher Monsieur,

Laissez-moi, sans tarder, répondre aux différentes questions que vous me posez dans votre lettre, qui arrive à propos, du 27 juin.

1. J'ai décrit en détail, dans le tome 14 [Kle1878b, Kle1878c], les polygones fondamentaux des groupes de congruence $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0 \pmod{n}$ pour $n = 5$ (où par déformation simultanée des arêtes

on obtient l'icosaèdre) et pour $n = 7$. Le cas général $n =$ nombre premier fait l'objet du mémoire de Dyck, actuellement sous presse. Je n'ai pas encore terminé l'étude lorsque n est un nombre composé.

2. «Geschlecht im Sinne der *Analysis Situs*» est attaché à toute surface fermée. Il est égal au nombre maximum de courbes fermées que l'on peut tracer sur la surface sans la morceler. Si l'on considère maintenant la surface en question comme image d'un ensemble de nombres w, z d'une équation algébrique $f(w, z) = 0$, alors son genre est aussi celui de l'équation. Votre *genre* et mon *Geschlecht* sont donc *en fait le même nombre*; on trouve seulement chez moi vraisemblablement une interprétation plus libre de la surface de Riemann et de la définition de p qu'elle engendre.

3. Il existe, il est vrai, dans le groupe des fonctions modulaires des sous-groupes qui possèdent un polygone fondamental asymétrique auxquels appartiennent, comme je le démontre dans le tome 14 [Kle1878a], en particulier les sous-groupes correspondants aux résolvantes de l'équation modulaire pour $n = 7$ et $n = 11$.

4. Je connais bien le fait que dans le cas du polygone les cercles, prolongés vers l'extérieur, ne doivent pas se couper, si l'on doit avoir une fonction uniforme. C'est justement sur ce point, d'après moi, que l'on doit porter l'attention, si l'on veut démontrer que les coordonnées w, z du point d'une courbe algébrique quelconque peuvent être représentées par une fonction uniforme à transformation linéaire en soi. Je vais vous indiquer jusqu'où j'ai avancé dans cette question. D'après les travaux de Schwarz et ceux de Weierstrass, on peut toujours appliquer le demi-plan sur un polygone à arcs circulaires de façon que les points I, II, III, IV, V qui correspondent aux points 1, 2, 3, 4, 5 de la frontière du demi-plan aient une position quelconque⁽¹⁰⁾.

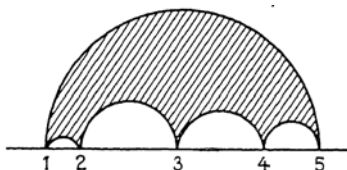


FIGURE 2. Un polygone dans le demi-plan

10. Voir la figure 2.

Supposons maintenant que I, II, III, IV, V, ... soient des points de ramification d'une fonction algébrique $w(z)$; et que cette fonction algébrique ne possède aucun autre point de ramification. Alors il est évident que w et z sont des fonctions uniformes du type considéré des variables auxiliaires dans le plan desquelles se trouve le polygone. *Si donc tous les points de ramification d'une fonction algébrique $w(z)$ sont situés sur un cercle du plan des z , alors, indubitablement, la réponse est positive.* Et si, maintenant, ce n'est pas le cas? Alors j'arrive, en fait, à des polygones que je vous citais la dernière fois. Si la figure ne présente aucune symétrie, j'arrive au moins (en établissant des équations différentielles appartenant au type que j'ai traité : $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta''}{\eta'}\right) = R(z)$) à un espace fondamental formé d'une manière analogue, dont les arêtes pour des angles nuls se rencontrent, et qui, de plus, se groupent ensemble deux à deux par des substitutions linéaires. *Mais je ne peux pas démontrer que cet espace fondamental ensemble avec ses répétitions recouvre seulement une partie du plan complexe.* Et cette difficulté m'arrête déjà depuis longtemps.

5. De plus, on obtient d'autres cas remarquables des groupes discontinus si on prend un nombre quelconque de cercles deux à deux disjoints et on les réfléchit par des rayons réciproques. Pour plus de clarté, j'ai hachuré la partie du plan extérieure à tous les cercles et qui donc représente le demi-polygone fondamental⁽¹¹⁾. Schottky (*Journal de Borchardt*, t. 83, p. 300-351 [Schot1877]) a étudié, occasionnellement, ces groupes, sans que là ait été soulevée leur signification fondamentale.

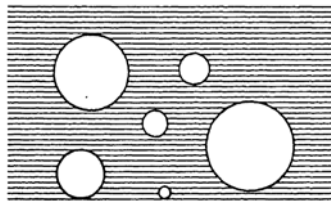


FIGURE 3. Un « groupe de Schottky »

6. Les principes de Riemann ne donnent d'abord aucun moyen pour construire effectivement une fonction dont on démontre l'existence. On

11. Voir la figure 3.

a donc tendance à les considérer comme peu sûrs, bien que l'on puisse être certain que les résultats qui en découlent soient exacts. Par contre, au sujet du problème que j'avais mentionné de l'application des polygones à arcs circulaires, Weierstrass et Schwarz ont une détermination effective des constantes considérées par des procédés convergents. Si l'on veut utiliser les principes de Riemann, alors on peut établir le théorème très général suivant. Soit donné un polygone ayant un ou aussi plusieurs contours séparés. Le polygone peut être à plusieurs feuillets, dont les feuillets sont reliés par des points de ramification. Chaque contour est composé de plusieurs morceaux; chaque morceau se transforme en un autre par une substitution linéaire déterminée. On peut, alors, toujours construire une fonction, qui possède à l'intérieur du polygone des discontinuités arbitraires, et dont la partie réelle prend certains modules de périodicité donnés, lorsqu'on passe d'un morceau de la frontière au morceau correspondant en traversant l'intérieur du polygone. À ces fonctions appartiennent, en particulier, celles qui, à l'intérieur du polygone, sont constamment uniformes et qui prennent la même valeur pour deux points correspondants quelconques de la frontière. La démonstration est exactement semblable à celle donnée par Riemann dans le § 12 de la première partie de ses « Fonctions abéliennes » [Rie1857] pour le polygone particulier constitué par p parallélogrammes empilés les uns sur les autres, reliés par $2p - 2$ points de ramification. Ce théorème, que je n'ai d'ailleurs mis en forme qu'au cours des derniers jours, englobe, me semble-t-il, toutes les preuves d'existence, dont vous parlez dans vos notes, comme des cas particuliers ou déductions faciles. Du reste, mon théorème, comme bon nombre de ceux que j'écris aujourd'hui, n'est pas encore formulé d'une façon précise; il me faudrait être beaucoup plus complet si je voulais l'éviter; vous discernerez facilement ma pensée.

7. Laissez-moi encore ajouter une remarque sur une autre de vos publications [Poin1881a]. Vous mentionnez que les fonctions θ , qui résultent de l'inversion des intégrales algébriques sur les courbes de genre p , ne sont pas les fonctions θ générales. Vous ne pouvez pas savoir que justement ces raisonnements sont généralement connus: un grand nombre de jeunes mathématiciens travaillent sur ce sujet, pour trouver les conditions permettant de distinguer les fonctions θ dites de Riemann des fonctions θ générales. Par contre, je suis étonné que vous indiquiez que le nombre des modules des fonctions θ de Riemann soit

égal à $4p + 2$, alors qu'il doit être égale à $3p - 3$. N'avez-vous pas lu les explications correspondantes de Riemann ? Ne connaissez-vous pas toute la discussion que Brill et Nöther ont achevée dans le tome 7 des *Math. Annalen* p. 300-307 [BrNo1874] ?

Dans l'espoir d'avoir bientôt de vos nouvelles, je vous prie de croire à l'assurance de ma considération distinguée.

F. Klein

VIII

Caen, le 5 juillet 1881

Monsieur,

J'ai reçu votre lettre que j'ai lue avec le plus vif intérêt. Je vous demande mille pardons de la question que je vous ai posée au sujet du *Geschlecht im Sinne der Analysis Situs*. J'aurais pu vous éviter la peine de m'y répondre, puisque je trouvais l'explication à la page suivante de votre mémoire. Vous vous rappelez sans doute que, dans une de mes dernières lettres, je vous demandais l'autorisation d'en citer une phrase dans une communication où je me proposais de généraliser vos résultats. Vous ne m'avez pas répondu à ce sujet et j'ai pris votre silence pour un acquiescement. J'ai fait cette communication en deux fois, dans les séances du 27 juin et du 4 juillet [Poin1881d, Poin1881e].

Vous trouverez que nous nous sommes rencontrés sur quelques points. Mais la citation que j'ai faite de votre phrase vous sera, je pense, une garantie suffisante.

Permettez-moi, Monsieur, encore une question ; où trouverai-je les travaux de MM. Schwarz et Weierstrass dont vous me parlez ; d'abord au sujet de ce théorème que : « *on peut toujours appliquer le demi-plan sur un polygone à arcs circulaires de façon que les points I, II, III, IV, V qui correspondent aux points 1, 2, 3, 4, 5 de la frontière du demi-plan aient une position quelconque** ». Ce théorème ne m'était pas inconnu, car je l'ai démontré dans ma communication du 23 mai [Poin1881c]. Mais où le trouverai-je dans les travaux de mes devanciers ? Est-ce au tome 70 de *Crelle* ? Où trouverai-je aussi les développements dont vous parlez dans la phrase suivante : « *Par contre, au sujet du problème que j'avais mentionné de l'application des polygones à arcs circulaires, Weierstrass et Schwarz ont une détermination effective des constantes considérées par des procédés convergents.** »

Le théorème que vous me dites avoir découvert m'a beaucoup intéressé. Il est clair que, comme vous me le dites, votre résultat contient comme cas particulier « *toutes [m]es preuves d'existence** ». Mais il arrive après.

J'arrive à votre remarque relative aux fonctions abéliennes. Quand j'ai parlé de $4p + 2$ constantes, il ne s'agissait pas du nombre des modules. J'ai dit ceci [Poin1881a] : une relation algébrique de genre p peut toujours être ramenée au degré $p + 1$. Une relation de degré $p + 1$ et de genre p dépend de $4p + 2$ paramètres ; car une relation *générale* de degré $p + 1$ dépend de

$$\frac{(p+1)(p+4)}{2}$$

paramètres. Mais il y a :

$$\frac{p(p-1)}{2} - p$$

points doubles. Il reste donc $4p + 2$ paramètres indépendants. J'ai ainsi, non le nombre des modules, mais une limite supérieure de ce nombre, ce qui me suffisait pour mon objet.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération.

Poincaré

IX

Leipzig, le 9 juillet 1881

Cher Monsieur,

Dans une réponse rapide à votre lettre, j'ai à dire, à peu près, les choses suivantes :

1. Il me convient que vous ayez cité ce passage de ma lettre. Jusqu'à présent, je ne suis en possession que de votre Note du 27 juin [Poin1881d]. En ce qui concerne le nom que vous avez donné à cette classe de fonctions, j'ai été passablement étonné ; car je n'ai, en réalité, fait rien d'autre que de reconnaître l'existence de ces groupes. Pour ma part, je n'utiliserai ni *fuchsiennes* ni *kleinéennes*, mais m'en tiendrai à mes « fonctions à transformations linéaires ».

2. Ce que j'ai dit des principes de Riemann n'était pas assez précis. Il ne fait aucun doute que le principe de Dirichlet doit être abandonné, parce que nullement concluant. Mais on peut le remplacer complètement par des méthodes de démonstration plus rigoureuses. Vous trouverez cela exposé plus en détail dans un travail de Schwarz,

que j'ai examiné justement ces jours-ci (en vue de mon cours) et dans lequel vous trouverez des informations sur la détermination des constantes, qui étaient seulement indiquées dans le *Journal de Borchardt* [Schw1873] (toutefois, il vous faudra examiner les mémoires publiés dans les tomes 70, 74 et 75 du *Journal de Borchardt*) ; ce travail de Schwarz se trouve dans les *Berliner Monatsberichten* 1870, p. 767-795 [Schw1870a].

3. La démonstration générale d'existence, que j'ai mentionnée la dernière fois, reste, naturellement, valable pour les groupes formés de substitutions analytiques quelconques (non nécessairement linéaires). Il est remarquable que, dans ce sens, tout groupe d'opérations définisse des fonctions qui restent inchangées par lui. Les groupes discontinus ont seulement l'avantage qu'ils engendrent des fonctions uniformes, ce qui est d'ailleurs tout à fait fondamental. Pourra-t-on maîtriser les cas plus difficiles par des fonctions uniformes de plusieurs variables, comme on a coutume de le faire, en particulier, dans le cas traité par Riemann dans le §12 [Rie1857] grâce au problème d'inversion de Jacobi ?

Voilà pour aujourd'hui. Entre-temps, j'ai parcouru avec Monsieur Brunei mes travaux, notamment aussi les cahiers des cours de 1877-1878 et 1878-1879 (que, à l'époque, j'avais fait remanier), et M. Brunei vous en écrira prochainement.

Veuillez agréer l'assurance de ma considération distinguée et de mes sentiments dévoués.

Prof. Dr. F. Klein

X

Leipzig, le 4 décembre 1881
Sophienstraße 10/II

Monsieur,

Après avoir longtemps réfléchi seulement de temps en temps aux problèmes auxquels nous nous intéressons tous les deux, j'ai saisi l'occasion ce matin de lire l'ensemble de différentes communications que vous avez publiées à la suite dans les *Comptes rendus*. Je vois que maintenant vous avez réellement démontré (8 août) : *que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes et que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une*

variable auxiliaire⁽¹²⁾. Tout en vous félicitant pour les résultats que vous avez obtenus, je voudrais vous faire une proposition qui respecte, à la fois, votre intérêt et le mien. Je vous demande de m'envoyer, pour les *Mathematische Annalen*, un article, plus ou moins long, ou, si vous ne trouvez pas le temps de le rédiger, une *lettre* dans laquelle vous exposerez, à grands traits, vos points de vue et vos résultats. J'accompagnerai alors cette lettre avec une note dans laquelle j'exposerai comment je vois la question, et comment justement le programme, que vous accomplissez en ce moment, a servi de fondement du principe d'orientation de mes travaux sur les fonctions modulaires. Naturellement, cette note vous sera soumise, pour avis, avant l'envoi à l'imprimeur. Par une telle publication nous obtiendrons un double effet : d'une part, ce que probablement vous souhaitez, l'attention des lecteurs des *Math. Annalen* serait attirée définitivement sur vos travaux ; d'autre part, vos travaux seraient présentés au grand public, en lui montrant ainsi les liens qui existent réellement avec les miens. Vous avez l'intention, comme vous me l'avez écrit, d'analyser ces relations dans votre mémoire détaillé ; mais sa rédaction demandera du temps, et je tiens que ce soit dit aussi dans les *Annalen*.

Pour ma part, j'ai, entre-temps, rédigé un petit traité sur la « théorie de Riemann » [Kle1882c], qui pourrait vous intéresser, car il présente une conception de la surface de Riemann avec laquelle, d'après moi, Riemann lui-même avait réellement travaillé. Peut-être M. Brunei vous a-t-il informé à ce sujet. Je me suis occupé de plus, ces derniers temps, de différentes preuves d'existence que l'on avait élaborées pour remplacer le principe de Dirichlet, et je suis convaincu que les méthodes exposées par Schwarz dans les *Berliner Monatsberichten*, 1870, p. 767 et suivantes [Schw1870a], suffisent en effet complètement pour démontrer, par exemple, le théorème général, sur lequel j'ai écrit, occasionnellement, cet été.

Veillez agréer l'assurance de ma considération distinguée.

F. Klein

12. En français dans la lettre.

XI

8 décembre 1881
Paris, rue Gay-Lussac 66

Monsieur,

Je vous remercie infiniment de l'offre obligeante que vous voulez bien me faire et je suis tout disposé à en profiter. Je vous enverrai prochainement la lettre que vous me demandez ; je vous prierai pourtant de me dire quelle place vous pouvez lui consacrer dans les *Annales*. Je sais que la clientèle de votre journal est nombreuse et que l'étendue que vous pouvez permettre à chaque travail est forcément limitée et je ne voudrais pas abuser de votre bienveillance. Quand je saurai quelle longueur je puis donner à ma lettre, je vous l'écrirai immédiatement.

J'aurai prochainement l'honneur de vous envoyer diverses notes relatives à la théorie générale des fonctions, si vous voulez bien les accepter.

J'ai lu dernièrement le mémoire de Schwarz dans les *Monatsberichten* [Schw1870a] et ses démonstrations m'ont paru rigoureuses.

Veuillez agréer, Monsieur, mes remerciements et l'expression de ma grande considération.

Poincaré

XII

Leipzig, le 10 décembre 1881

Monsieur,

Que ma proposition vous ait été agréable, voilà qui me réjouit : *voilà une loi de réciprocité*. En ce qui concerne la question que vous me posez, je voudrais vous répondre, avant tout, que votre article sera d'autant plus à propos qu'il me parviendra rapidement. Si je le reçois avant le 20 courant, je l'inclurai dans le fascicule 4 du tome 19 des *Annalen* qui est en train de paraître ; il sera donc publié au début de mars (au plus tard). En ce qui concerne son étendue, je peux prévoir, si vous le souhaitez, environ un placard (16 pages). Cela est assez pour que vous puissiez exprimer nettement l'essentiel, et sans être aussi trop long pour un lecteur rapide. Je voudrais, de plus, vous demander de donner notamment aussi des indications nécessaires sur les méthodes de vos démonstrations, c'est-à-dire comment vous construisez réellement les

fonctions considérées, etc. Cependant je vous laisse juge, étant donné que je ne puis vous prescrire quoi que ce soit à ce sujet.

Encore une question. Votre adresse permanente est-elle maintenant à Paris ? Et quelle est l'adresse actuelle de Picard ? Je serais heureux si vous pouviez obtenir également de lui une contribution pour les *Annalen*.

Veillez agréer l'assurance de ma considération distinguée et dévouée.

F. Klein

XIII

Paris, le 17 décembre 1881
rue Gay-Lussac 66

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous adresser le petit travail en question [Poin1882c] ; je n'ai pas, comme vous me le demandiez, exposé succinctement mes méthodes de démonstration. Je n'aurais pu le faire sans dépasser de beaucoup les limites que vous m'aviez fixées. Je sais que ces limites n'avaient rien d'absolu. Mais d'un autre côté je ne crois pas qu'une démonstration puisse être résumée ; on ne peut en retrancher sans lui enlever sa rigueur et une démonstration sans rigueur n'est pas une démonstration. Je préférerais donc vous adresser de temps en temps une série de courtes lettres où je démontrerais successivement les résultats énoncés ou du moins les principaux. Ces lettres, vous en feriez ce que bon vous semblerait. J'habite en effet Paris, je suis maître de conférences à la Faculté des Sciences.

Voici l'adresse de Picard : Professeur Suppléant à la Faculté des Sciences, rue Michelet 13, Paris.

Je vous donne par la même occasion celle d'Appell : Maître de Conférences à l'École Normale Supérieure, rue Soufflot 22, Paris.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

XIV

Leipzig, le 13 janvier 1882

Monsieur,

Je ne vous ai pas encore remercié personnellement pour l'envoi de votre article, pour lequel je me sens en effet votre obligé. Nous allons pouvoir l'imprimer dans quelques jours. Vous en recevrez des épreuves, que je vous demanderai de renvoyer, après correction, à l'imprimerie Teubner à Leipzig. Voulez-vous examiner à cette occasion, en particulier, le court commentaire que j'ai joint à votre article, dans le sens précédemment spécifié, et dans lequel je proteste, autant que je peux, contre les deux dénominations : *fuchsiennes* et *kleinéennes* en citant Schottky en ce qui concerne cette dernière et désignant, au demeurant, Riemann comme étant celui qui est à l'origine de toutes ces recherches ? Je me suis efforcé de conserver à ce commentaire un caractère aussi mesuré que possible, mais je vous prie de m'écrire immédiatement si vous souhaitez encore y apporter des modifications. Je n'ai voulu aucunement diminuer le mérite de vos travaux. En outre, j'ai rédigé maintenant encore un petit article [Kle1882a] qui doit être imprimé à la suite du vôtre. Il expose, également sans démonstration, quelques-uns des résultats appartenant au domaine concerné, avant tout celui-ci : *que toute équation algébrique $f(w, z) = 0$ peut être résolue d'une manière et d'une seule par $w = \varphi(\eta)$, $z = \psi(\eta)$, du moment qu'ont été tracées sur la surface de Riemann correspondante p coupures de rebroussement indépendantes, où η est un groupe discontinu, tels ceux dont vous m'avez entretenu à la suite de ma lettre.* Ce théorème est d'autant plus beau que ce groupe a exactement $3p - 3$ paramètres essentiels, c'est-à-dire autant que les équations du p donné possèdent de modules. Ici se greffent quelques réflexions supplémentaires qui me paraissent intéressantes. Afin de vous en faire part, aussi complètement que possible, j'ai donné des ordres à l'imprimerie de vous envoyer également les épreuves de mon article, que vous pouvez ensuite conserver.

En ce qui concerne la *démonstration*, elle est difficile. J'opère toujours avec des idées de Riemann, respectivement avec la *geometria situs*. C'est très difficile à rédiger clairement. Je vais m'efforcer de le faire ultérieurement. En attendant, je souhaite très vivement correspondre avec vous à ce sujet et aussi au sujet de vos démonstrations. Soyez persuadé que j'étudierai avec le plus grand intérêt les lettres à ce sujet

que vous me laissez espérer et y répondrai rapidement. Si vous désirez les publier, sous une forme ou une autre, les *Annalen* sont naturellement à votre disposition.

Veillez agréer l'assurance de ma considération distinguée et dévouée.

F. Klein

XV

[Paris, janvier 1882]

Monsieur,

J'ai reçu les épreuves de Teubner, et je vais les lui renvoyer. J'ai lu votre note et je ne vois pas qu'il y ait lieu d'y changer quoi que ce soit. Vous me permettrez cependant de vous adresser quelques lignes pour chercher à justifier mes dénominations. J'attends avec impatience le théorème que vous m'annoncez et qui me paraît des plus intéressants.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

XVI

Paris, 28 mars 1882

Monsieur,

Vous avez ajouté à mon travail : *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires* [Poin1882c], une note où vous exposez les raisons qui vous ont fait rejeter mes dénominations. Vous avez eu la bonté de m'en envoyer les épreuves imprimées en me demandant si j'y désirais quelque changement. Je vous remercie de la délicatesse de votre procédé, mais je ne pouvais en abuser pour vous demander de taire la moitié de votre pensée.

Vous comprenez cependant que je ne puis laisser les lecteurs des *Annales* sous cette impression que j'ai commis une injustice. C'est pourquoi je vous ai écrit, vous vous le rappelez peut-être, que je ne vous demandais aucun changement à votre note, mais que je vous demanderais la permission de vous adresser quelques lignes pour justifier mes dénominations.

Voici ces lignes ; peut-être jugerez-vous convenable de les insérer. À mon tour, je vous demanderai si vous désirez que je fasse quelque

changement à la rédaction de cette petite note. Je suis prêt à faire tous ceux qui n'altéreraient pas ma pensée.

Veillez excuser mon importunité et me pardonner ce petit plaidoyer *pro domo*.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

Je vous serais obligé si vous voulez bien me dire l'adresse de M. Hurwitz à qui je désirerais faire hommage d'un exemplaire de mon travail.

Je vous serais bien reconnaissant aussi, si vous pouviez m'indiquer les traits généraux de la démonstration par laquelle vous établissez le théorème énoncé dans votre dernier travail : « *Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich* » [Kle1882a].

Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires

(Extrait d'une lettre adressée à M. F. Klein)

Par H. Poincaré à Paris

... Vous avez eu dernièrement la bonté de faire insérer aux *Mathematische Annalen* (t. XIX, p. 553-564) [Poin1882c] mon travail sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires et vous l'avez fait suivre d'une note où vous exposez les raisons qui vous font trouver peu convenables les noms que j'ai donnés à ces transcendentes. Permettez-moi de vous adresser quelques lignes pour défendre mes dénominations, que je n'ai pas choisies au hasard. Si j'ai cru devoir donner aux fonctions nouvelles le nom de M. Fuchs, ce n'est pas que je méconnaisse la valeur des travaux de M. Schwarz et des vôtres, je suis le premier, au contraire, à en apprécier la haute importance. Mais il ne m'était pas possible d'oublier les découvertes si remarquables que le savant professeur d'Heidelberg a publiées dans le *Journal de Crelle*. Elles sont le fondement de la théorie des équations linéaires et, sans elles, je n'aurais pu aborder l'étude de mes transcendentes qui se lient directement à cette théorie. Dans ses premiers travaux, M. Fuchs se place, il est vrai, à un point de vue un peu différent du mien et ne se préoccupe ni de la discontinuité des groupes, ni de l'uniformité des fonctions. Mais M. Schwarz, dans ses Mémoires

des tomes 70 et 74 du *Journal de Crelle*, ne s'en préoccupe pas non plus ; il en dit quelques mots dans un cas très particulier, dans le mémoire du tome 75 que j'ai cité dans ma note. C'est là seulement qu'il se trouve *dans le domaine* des fonctions fuchsiennes. Dans vos belles recherches sur les fonctions modulaires votre façon d'envisager les choses différait peu de la mienne, mais vous aviez plutôt en vue alors l'étude des fonctions elliptiques que celle des équations linéaires. Quant à M. Fuchs, dans ses mémoires des tomes 83 et 89 du *Journal de Crelle*, il s'est élevé à un point de vue nouveau et a mis en lumière le lien étroit qui unit la théorie des équations différentielles à celle de certaines fonctions uniformes. Ce fut la lecture de ces mémoires qui devint le point de départ de mes recherches.

En ce qui concerne les fonctions kleinéennes, j'aurais cru commettre une injustice, si je leur avais donné un autre nom que le vôtre. C'est M. Schottky qui a découvert la figure qui faisait l'objet de votre lettre, mais c'est vous qui avez *souligné leur importance comme fondement** ; comme vous dites à la fin de votre savant travail : *Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich* [Kle1882a].

Quant à ce que vous dites de Riemann, je ne puis qu'y souscrire pleinement. C'était un de ces génies qui renouvellent si bien la face de la Science qu'ils impriment leur cachet, non seulement sur les œuvres de leurs élèves immédiats, mais sur celles de tous leurs successeurs pendant une longue suite d'années. Riemann a créé une théorie nouvelle des fonctions, et il sera toujours possible d'y retrouver le germe de tout ce qui s'est fait et se fera après lui en analyse mathématique.

Paris, le 30 mars 1882

XVIII

Düsseldorf, le 3 avril 1882

Adresse : Bahnstraße 15

Monsieur,

Votre envoi, qui m'a été retransmis de Leipzig, m'est parvenu hier au moment où j'allais vous écrire afin d'accompagner de quelques mots ma dernière note des *Annalen* [Kle1882a], dont une épreuve doit être déjà entre vos mains. Entre-temps, j'ai reçu la note du Prof. Fuchs des *Göttingen Nachrichten*. Si je devais dire deux mots de cette dernière, ce serait que je la juge complètement manquée. J'ai simplement indiqué que Fuchs n'avait jamais rien publié sur les fonctions fuchsiennes. Il en

résulte que le second mémoire qu'il cite (que d'ailleurs je vais me procurer pour l'étudier de plus près) est sans objet. Le premier se rapporte bien sûr aux fonctions fuchsiennes en ce qu'il traite des fonctions modulaires, mais Fuchs, faute d'intuition géométrique, n'a pas reconnu le caractère propre de ces dernières qui réside dans la nature des lignes singulières, ainsi que Dedekind l'a montré dans le tome 83 de *Borchardt* [Ded1877]. Quant, enfin, aux insinuations à la fin de la note, que mes propres travaux ont été profondément influencés par ceux de Fuchs, c'est tout simplement historiquement faux. Mes recherches ont débuté en 1874 par la détermination de tous les groupes finis de transformations linéaires d'une variable [Kle1875]. Ensuite, j'ai montré en 1876 que le problème soulevé, à l'époque, par Fuchs, à savoir la détermination de toutes les équations différentielles linéaires algébriques du second ordre intégrables, était, par là-même, résolu [Kle1877a]. La réalité est à l'opposé de ce que présente Fuchs. Ce n'est pas moi qui ai puisé des idées dans son mémoire, mais j'ai montré que son sujet devait être traité avec *mes* idées.

Je ne suis pas, comme vous pouvez le penser, d'accord avec votre présentation. S'il s'agissait d'une appréciation générale de l'œuvre de Fuchs, je serais volontiers prêt à donner son nom à une *nouvelle* classe quelconque de fonctions que personne n'aurait encore étudiée, ou même, par exemple, aux fonctions de plusieurs variables que Fuchs a proposées. (Sont-elles réellement *uniformes*? Je comprends seulement que, dans tout ensemble de valeurs qu'elles prennent, elles sont sans ramification. Pourtant, je peux me tromper.) Mais les fonctions, auxquelles vous donnez le nom de Fuchs, appartenaient déjà à d'autres, avant même que vous ayez proposé de les dénommer. Je suis aussi persuadé que vous n'auriez pas fait cette proposition si, à l'époque (au début), vous aviez eu connaissance de la bibliographie. Vous m'offrez alors, un peu à titre de dédommagement, les fonctions *kleinéennes*. Autant je reconnais l'intention amicale qui est la vôtre, autant il m'est impossible de l'accepter, car cela justement impliquerait une contre-vérité historique. Si mon mémoire dans le tome XIX [Kle1882a] peut donner l'impression que je me suis occupé maintenant particulièrement des *kleinéennes*, mon récent article dans le tome XX [Kle1882b] montre que, avant comme après, je considère aussi les *fuchsiennes* comme étant de mon domaine.

Mais assez sur ce sujet. J'ai envoyé, sans tarder, votre note à l'imprimerie, en y joignant seulement une remarque : j'en reste, pour ma part, à ma présentation précédente (et à cette occasion j'attire expressément l'attention du public sur la note de M. Fuchs). Vous allez recevoir, incessamment, les épreuves et je vous prie donc de me les retourner rapidement ici (où je passe les vacances de Pâques), après quoi je ferai le nécessaire avec l'imprimerie. (Votre note paraîtra immédiatement après la mienne.) En ce qui concerne le passage sur Schottky, je voudrais attirer votre attention sur un mémoire posthume dans les œuvres de Riemann, p. 413, où sont développées exactement les mêmes idées. Il est vrai, il est difficile de déterminer l'apport éventuel de l'éditeur M. le Prof. Weber. Les œuvres de Riemann sont parues en 1876, la thèse de Schottky en 1875, puis en 1877 sous la forme d'un mémoire dans le *Journal de Borchardt* [Schot1877]. Mais la thèse de 1875 ne représente qu'une partie du mémoire de 1877 et je ne me souviens pas si la figure concernée se trouvait déjà dans le texte de 1875.

Je dois ajouter que, pour ma part, je n'ai pas l'intention de prolonger le débat au sujet de la *dénomination* (après avoir joint la note dont il a été question ci-dessus à votre explication). Pourtant, si j'étais conduit à intervenir à nouveau, je donnerai, c'est sûr, une présentation très complète et franche de l'état des choses. Laissez-nous plutôt rivaliser pour savoir lequel de nous sera le mieux à même de faire avancer la théorie en question ! Je pense, pour ma part, avoir réalisé un certain progrès par ma nouvelle note. Toute une suite de théorèmes sur les fonctions algébriques se démontre immédiatement grâce à la nouvelle fonction η , par exemple le théorème, que j'ai seulement d'abord indiqué comme vraisemblable dans mon livre sur Riemann, qu'une surface de genre $p > 0$ ne peut jamais posséder une infinité de transformations en soi uniformes *discrètes* (car elle pourrait alors se décomposer en un nombre ∞ de « polygones fondamentaux équivalents »). Mais aussi le théorème que les différents théorèmes donnés par Picard pour $p = 0$ peuvent être généralisés pour p quelconque, etc.

En ce qui concerne les méthodes, par lesquelles je démontre mes théorèmes, je vous en écrirai dès que je les aurai un peu plus clarifiées. Entre-temps, pourriez-vous m'exposer les idées que vous poursuivez actuellement ? Je n'ai pas besoin de vous préciser que nous aurons plaisir à publier dans les *Mathematische Annalen* tout article que vous voudrez nous adresser. Il me tient à cœur de rester en liaison active avec

vous. Un contact vivant avec les mathématiciens travaillant dans le même domaine a toujours constitué, pour moi, une condition préalable pour mes propres travaux mathématiques.

Veillez agréer l'assurance de ma considération distinguée et dévouée.

F. Klein

L'adresse du Dr. Hurwitz est jusqu'à nouvel ordre : *Hildesheim*, Langer Hagen.

XIX

Paris, le 4 avril 1882

Monsieur,

Je viens de recevoir votre lettre et je m'empresse de vous répondre. Vous me dites que vous désirez clore un débat stérile pour la Science et je ne puis que vous féliciter de votre résolution. Je sais qu'elle ne doit pas vous coûter beaucoup puisque, dans votre note ajoutée à ma dernière lettre, c'est vous qui dites le dernier mot, mais je vous en sais gré cependant. Quant à moi, je n'ai ouvert ce débat et je n'y suis entré que pour dire une fois et une seule mon opinion qu'il m'était impossible de taire. Ce n'est pas moi qui le prolongerai, et je ne prendrais de nouveau la parole que si j'y étais forcé ; d'ailleurs je ne vois pas trop ce qui pourrait m'y forcer.

Si j'ai donné votre nom aux fonctions kleinéennes, c'est pour les raisons que j'ai dites et non pas, comme vous l'insinuez, « *à titre de dédommagement** » ; car je n'ai à vous dédommager de rien ; je ne reconnâtrai un droit de propriété antérieur au mien que quand vous m'aurez montré que l'on a avant moi étudié la discontinuité des groupes et l'uniformité des fonctions dans un cas tant soit peu général et qu'on a donné de ces fonctions des développements en séries. Je réponds à une interrogation que je trouve en note à la fin d'une page de votre lettre. Parlant des fonctions définies par M. Fuchs au tome 89 de *Crelle*, vous dites : « *Sont-elles réellement uniformes ? Je comprends seulement que, dans tout ensemble de valeurs qu'elles prennent, elles sont sans ramification** . » Voici ma réponse, les fonctions étudiées par M. Fuchs se partagent en trois grandes classes ; celles des deux premières sont effectivement uniformes ; celles de la troisième ne sont en général que *sans ramification** ; elles ne sont uniformes que si on ajoute une condition à celles énoncées par M. Fuchs. Ces distinctions

ne sont pas faites dans le premier travail de M. Fuchs ; on les trouve dans deux notes additionnelles, malheureusement trop concises et insérées l'une au *Journal de Borchardt*, l'autre aux *Göttingen Nachrichten* 1880 [Fuc1880, Fuc1881].

Je vous remercie beaucoup de votre dernière note que vous avez eu la bonté de m'envoyer. Les résultats que vous énoncez m'intéressent beaucoup, voici pourquoi : je les avais trouvés il y a déjà quelque temps, mais sans les publier parce que je désirais éclaircir un peu la démonstration ; c'est pourquoi je désirerais connaître la vôtre quand vous l'aurez éclaircie de votre côté.

J'espère que la lutte, à armes courtoises, d'ailleurs, à laquelle nous venons de nous livrer à propos d'un nom, n'altérera pas nos bonnes relations. Dans tous les cas, ne vous en voulant nullement pour avoir pris l'offensive, j'espère que vous ne m'en voudrez pas non plus de m'être défendu. Il serait ridicule, d'ailleurs, de nous disputer plus longtemps pour un nom. *Name ist Schall und Rauch*⁽¹³⁾ et après tout ça m'est égal, faites comme vous voudrez, je ferai comme je voudrai de mon côté.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

XX

Paris, 7 avril 1882

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous renvoyer corrigée l'épreuve de ma lettre. Maintenant que ce petit débat est terminé et je l'espère pour ne plus se renouveler, permettez-moi de vous remercier de la courtoisie dont vous n'avez cessé de faire preuve pendant tout le temps qu'il a duré. Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

13. « Le nom n'est que bruit et fumée », traduction par Nerval du *Faust* de Goethe.

XXI

Leipzig, le 7 mai 1882
Sophienstraße 10

Monsieur,

Il y a peu, j'ai lu votre note dans les *Comptes rendus* du 10 avril [Poin1882a]. Elle m'a d'autant plus intéressé que, je crois, vos considérations actuelles se rapprochent des miennes, même quant à la méthode. Je démontre mes théorèmes à l'aide de la *continuité* en m'appuyant sur les deux lemmes suivants : 1) à tout *groupe discontinu* appartient une surface de Riemann et 2) à une surface de Riemann convenablement découpée ne peut appartenir qu'un seul de ces groupes (dans la mesure même où elle appartient à un groupe). Jusqu'à présent, je n'ai pas encore pris du tout en considération les développements en séries tels que vous les établissez. Comment démontrez-vous en effet l'existence du nombre m pour lequel $\sum \frac{1}{(\gamma_i \eta + \delta_i)^m}$ converge absolument ? Et avez-vous pour celui-ci une borne inférieure exacte ou seulement approximative ?

Moi-même, j'ai, entre-temps, donné une forme encore plus générale aux théorèmes considérés, et je vous écris de nouveau à ce sujet, car la rédaction d'une note pour les *Annalen* se fera attendre ; pour le moment, j'ai trop peu de temps pour la faire. Dans le cas de mon premier théorème, toute la sphère η , à l'exception d'une infinité de points, sera recouverte par des images du recouvrement du domaine fondamental. Dans le cas du second théorème, l'intérieur d'une surface circulaire⁽¹⁴⁾, et d'une seule, n'est pas recouvert. Maintenant j'ai établi l'existence des représentations (qui existent toujours aussi, pour les surfaces de Riemann déterminées, de façon unique) qui excluent une infinité de *surfaces circulaires*. Dans cette direction, je formule ici seulement le théorème le plus simple (dans lequel je suppose essentiellement une représentation sans ramification de la surface de Riemann). Soit $p = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m$, où d'abord aucun des μ n'est égal à 1. Prenons sur la surface de Riemann m points O_1, \dots, O_m , et effectuons à partir de O_1 , de la manière connue, $2\mu_1$ coupures transversales $A_1, B_1 ; A_2, B_2 ; \dots ; A_m, B_m$; à partir de O_2 , $2\mu_2$ coupures transversales, etc. D'autre part, on construit sur la sphère η m cercles disjoints et à l'intérieur de l'espace limité par ces derniers un polygone à

14. On pourrait dire « intérieur d'un disque ».

arcs circulaires qui est limité par $4\mu_1$ cercles normaux au premier cercle fondamental, puis ensuite $4\mu_2$ cercles qui sont normaux au deuxième cercle fondamental, etc. (ainsi un polygone à arcs circulaires est m -fois connexe). Les cercles limites seront ordonnés ensemble par couples dans l'ordre connu $A_1, B_1, A_1^{-1}, B_1^{-1}, A_2, B_2, \dots$ à savoir par des substitutions linéaires de η , qui laissent chaque fois invariant le cercle fondamental. Supposons, en outre, que le produit des substitutions linéaires correspondantes, à savoir par exemple $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_{\mu_1}^{-1} B_{\mu_1}^{-1}$, soit toujours égal à l'identité. *Alors il existe toujours une fonction analytique, et une seule, qui applique la surface de Riemann découpée sur un polygone à arcs circulaires engendré de cette façon.* Le cas où un des μ est égal à 1 ne diffère que par le fait que le cercle fondamental correspondant se réduit à un point et que les substitutions linéaires correspondantes se transforment en « paraboliques », qui laissent fixe ce point. Donc assez pour aujourd'hui. Serait-il possible d'obtenir une collection complète des tirés à part de vos travaux à ce sujet ? Je dois commencer, après Pentecôte, dans mon séminaire, une série de conférences sur les fonctions uniformes à transformations linéaires en soi et je souhaiterais pouvoir, si cela est possible, mettre à la disposition de mes auditeurs une telle collection.

Veillez agréer l'assurance de ma considération distinguée et dévouée.

F. Klein

XXII

Paris, 12 mai 1882

Monsieur,

J'ai bien tardé à vous répondre et je vous prie de m'en excuser, car j'ai été forcé de faire une petite absence. Je crois comme vous que nos méthodes se rapprochent beaucoup et diffèrent moins par le principe général que par les détails. Pour les lemmes dont vous me parlez, le premier, je l'ai établi par les considérations des développements en séries et vous, à ce que je pense, à l'aide du théorème dont vous m'avez parlé dans une de vos lettres de l'année dernière. Pour le second lemme, il ne présente pas de difficulté et il est probable que nous l'établissons de la même manière. Une fois ces deux lemmes établis, et c'est en effet par là que je commence, ainsi que vous le faites vous-même, j'emploie comme vous la continuité, mais il y a bien des manières de l'employer et

il est possible que nous différions dans quelques détails. Vous me demandez comment j'établis la convergence de la série $\sum \frac{1}{(\gamma_i \eta + \delta_i)^{2m}}$.

J'en ai deux démonstrations mais qui sont toutes deux trop longues pour tenir dans une lettre ; je les publierai prochainement. La première est fondée en principe sur ce fait que la surface du cercle fondamental est finie. La seconde exige la même hypothèse, mais elle est fondée sur la géométrie non euclidienne. Quelle est maintenant la limite inférieure du nombre m ? C'est $m = 2$. Ici si l'on suppose m entier on a une limite exacte. En ce qui concerne les séries relatives aux fonctions *zétafuchsiennes*, je n'ai au contraire qu'une limite approximative. Ce qui m'a le plus intéressé dans votre lettre c'est ce que vous me dites au sujet des fonctions qui admettent comme espaces lacunaires une infinité de cercles. J'ai rencontré aussi de semblables fonctions et j'en ai donné un exemple dans une ou deux de mes notes. Mais j'y suis arrivé par une voie absolument différente de la vôtre. Il est probable que vos fonctions et les miennes doivent avoir une étroite parenté ; cependant il n'est nullement évident qu'elles soient identiques. Je croirais volontiers que votre méthode ainsi que la mienne est susceptible d'une généralisation très étendue et qu'elles conduiraient toutes deux à une grande classe de transcendentes comprenant comme cas particuliers celles que nous avons déjà rencontrées.

Vous me parlez de tirages à part de mes travaux. Voulez-vous parler de mes notes des *Comptes rendus* ? Je n'en ai pas fait faire de tirages à part et il serait malheureusement difficile maintenant d'en obtenir, au moins pour les premières d'entre elles.

Je vous enverrai prochainement et dès que je les aurai reçus les tirages à part de deux travaux plus récents ; le premier *Sur les courbes définies par les équations différentielles* [Poin1885a]. Il s'agit d'étudier la forme géométrique des courbes définies par les équations différentielles du premier ordre. Malheureusement la première partie de ce mémoire est seule imprimée jusqu'ici et ne contient que les préliminaires. Le second travail a pour objet les formes cubiques ternaires, dont je veux faire l'étude arithmétique. J'ai voulu rappeler d'abord certains résultats algébriques qui remplissent la première partie du mémoire. Cette première partie a seule été imprimée dans le 50^e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, le reste devant paraître dans le 51^e [Poin1882b]. Cette première partie ne vous intéressera donc pas beaucoup. Il y a

cependant une étude sur les transformations linéaires et sur certains groupes *continus* contenus dans le groupe linéaire à 3 et 4 variables.

À propos, je ne me souviens plus si je vous ai envoyé ma thèse, ainsi que des travaux plus anciens sur les équations différentielles et un travail sur les fonctions à espaces lacunaires.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

XXIII

Leipzig, le 14 mai 1882

Monsieur,

En réponse à votre lettre, que je viens de recevoir, je voudrais, en deux mots, vous expliquer comment j'utilise la « continuité ». En principe, bien sûr ; car l'exposé en détail, dont la rédaction coûterait de gros efforts, peut de toute façon être modifié de bien des manières. Je veux me limiter au cas des fonctions η de deuxième espèce sans ramification, comme je les ai appelées dans ma note. Il s'agit ici, avant tout, de démontrer que les deux variétés que l'on compare : l'ensemble des systèmes de substitutions considérés et, d'autre part, l'ensemble des surfaces de Riemann effectivement existantes, possèdent non seulement le même nombre de dimensions ($6p - 6$ dimensions réelles), mais qu'ils sont des ensembles analytiques avec des frontières analytiques (au sens de la terminologie introduite par Weierstrass). Ces deux ensembles sont liés maintenant l'un à l'autre de façon $(1-x)$ -forme, en raison du premier lemme énoncé dans ma précédente lettre, où x ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1 pour les différentes parties du second ensemble, en vertu du second lemme. Mais maintenant cette relation s'avère être une relation analytique et même, comme il ressort des deux propositions, une relation *analytique* dont le *déterminant fonctionnel ne s'annule nulle part*. J'en déduis que x doit avoir toujours la valeur 1. S'il existait, en effet, un passage d'un domaine avec $x = 0$ à un domaine avec $x = 1$, alors aux points du domaine de passage devraient correspondre, à cause du caractère analytique de la correspondance, des points déterminés (effectivement atteints) de l'autre ensemble et pour ceux-ci, contrairement à ce qui a été noté, le déterminant fonctionnel de la relation devrait s'annuler. Telle est ma démonstration. M. Schwarz m'a communiqué une autre toute

différente, bien qu'également basée sur des considérations de continuité, lors de la visite que je lui ai rendue récemment (le 11 avril) à Göttingen. Sans avoir reçu de lui une autorisation explicite, je pense tout de même devoir vous écrire à ce sujet. Schwarz se représente une surface de Riemann découpée d'une manière appropriée, ensuite recouverte une infinité de fois et les différents recouvrements liés dans les sections de telle sorte qu'il en résulte une surface totale qui correspond à l'ensemble des polygones placés les uns à côté des autres dans le plan. Cette surface totale, pour autant que l'on puisse donner un tel nom à une surface infiniment étendue (ce qu'il faut justement éclaircir), est dans le cas d'une fonction η de seconde espèce (cas auquel Schwarz s'est d'abord limité) *simplement connexe et à contour simple*, et il ne s'agit donc maintenant que de voir si on peut appliquer, de manière habituelle, aussi une telle surface simplement connexe et à contour simple sur l'intérieur d'un cercle. Ce cheminement de la pensée de Schwarz est en tout cas très beau.

Vous m'interrogez au sujet des tirés à part. Je ne voudrais pas, naturellement, vous déranger avec cela, et d'autant moins que je peux me procurer tous vos travaux, à l'exception de votre *thèse*. Mais, à dire vrai, je préférerais disposer d'une collection aussi complète que possible des tirés à part. Si donc vous pouvez m'envoyer quelque chose (je n'en possède aucun) cela me serait très agréable.

Avez-vous eu l'occasion de lire la théorie des groupes de transformations de Lie ? Lie se représente toujours le paramètre qui intervient dans ses groupes comme un nombre complexe ; il serait intéressant de voir comment ses résultats pourraient être complétés, si on considère également des groupes engendrés seulement par une itération *réelle* de certaines opérations ∞ petites.

Hermite m'a envoyé, il y a quelque temps, un fascicule de son *Cours d'analyse* lithographié. Serait-il possible (naturellement contre paiement) d'obtenir tous les fascicules ? Cela me ferait un plaisir particulier pour mon séminaire, en raison des buts que je poursuis actuellement.

Je vous prie de croire à l'assurance de mes sentiments les plus dévoués.

F. Klein

XXIV

Paris, 18 mai 1882

Monsieur,

Je n'ai pas besoin de vous dire combien votre dernière lettre m'a intéressé. Je vois clairement maintenant que votre démonstration et la mienne ne peuvent différer que par la terminologie et par des détails ; ainsi il est probable que nous n'établissons pas de la même manière le caractère analytique de la relation qui lie les deux *variétés** dont vous parlez ; pour moi, je relie ce fait à la convergence de mes séries, mais il est évident qu'on peut arriver au même résultat sans passer par cette considération.

Les idées de M. Schwarz ont une portée bien plus grande ; il est clair que le théorème général en question, s'il était démontré, aurait son application dans la théorie d'un très grand nombre de fonctions et en particulier dans celle des fonctions définies par des équations différentielles *non linéaires*. C'est en étudiant de pareilles équations que j'avais été conduit de mon côté à chercher si une surface de Riemann à une infinité de feuillets pouvait être étendue sur un cercle, et j'avais été amené au problème suivant, qui permettrait de démontrer la possibilité de cette extension :

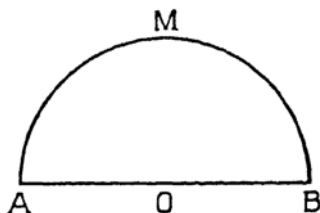


FIGURE 4. Une demi-circonférence

On donne une équation aux différences partielles

$$X_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + X_2 \frac{d^2 u}{dx dy} + X_3 \frac{d^2 u}{dy^2} + X_4 \frac{du}{dx} + X_5 \frac{du}{dy} = 0$$

et une demi-circonférence $AMBO$ ⁽¹⁵⁾. X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont des fonctions données de x et de y ; ces fonctions sont analytiques à

15. Voir figure 4.

l'intérieur de la demi-circonférence et cessent de l'être sur son périmètre. Peut-on trouver toujours une fonction u de x et de y satisfaisant à l'équation, analytique à l'intérieur de la demi-circonférence, tendant vers 1 quand le point x, y se rapproche de la demi-circonférence et vers 0 quand il se rapproche du diamètre AOB ? Tous mes efforts dans ce sens ont été jusqu'ici infructueux, mais j'espère que M. Schwarz, qui a si bien résolu le problème dans le cas le plus simple, sera plus heureux que moi.

Je vous envoie les tirages à part de mes travaux anciens, et j'espère pouvoir vous adresser d'ici peu les autres mémoires plus récents que je vous ai annoncés et dont je ne saurais tarder à recevoir le tirage à part.

Quant au cours lithographié de M. Hermite il est édité chez Hermann, Librairie des Lycées, rue de la Sorbonne ; le prix de l'abonnement est 12 francs. Je ne crois pas que l'éditeur envoie de tirage à part à M. Hermite.

Veuillez agréer l'assurance de mes sentiments les plus dévoués et de mon estime sincère.

Poincaré

XXV

Leipzig, le 19 septembre 1882
Sophienstraße 10/11

Monsieur,

Pour ma part, sur le point de terminer un travail assez long sur les nouvelles fonctions, j'ai relu justement encore une fois votre article dans le tome 19 des *Annalen* [Poin1882c]. Il y a là un point que je ne comprends pas. Vous mentionnez, en deux endroits (au milieu de la page 558 et en bas de la page 560), les *fonctions fuchsiennes* qui n'existent que dans un espace limité par une infinité de cercles normaux au cercle principal. Je connais en effet très bien ces fonctions (ainsi que je vous l'ai écrit il y a trois mois) qui ont comme frontière naturelle une infinité de cercles. Mais au groupe correspondant appartiennent toujours les substitutions qui laissant invariant seulement un seul cercle limite, choisi au hasard. Vous désignez maintenant par *fuchsiennes* les fonctions dont *toutes* les substitutions sont réelles (p. 554), et cette définition ne se trouve pas sensiblement modifiée par la généralisation à la page 557, où vous remplacez l'axe réel par un cercle quelconque. Les fonctions que je connais ne rentrent pas

dans votre définition des fonctions *fuchsiennes*. Y a-t-il, de ma part, une mauvaise interprétation, ou, de votre part, une imprécision dans la formulation ? En ce qui concerne mon travail, je me suis limité à l'exposé de la conception géométrique, grâce à laquelle je pense avoir défini les nouvelles fonctions au sens de Riemann. On y trouve, comme il est dans l'ordre des choses, beaucoup de points de contact avec votre conception géométrique du sujet. Les groupes les plus généraux que je considère sont engendrés par un nombre quelconque de substitutions « isolées » et par un certain nombre de groupes « avec un cercle principal » (qui peut être réel ou imaginaire, ou aussi réduit à un point) qui sont « emboîtés les uns dans les autres ». Les théorèmes de mes deux notes des *Annalen* deviennent alors des cas particuliers d'un théorème général, que l'on énonce ainsi : *à chaque surface de Riemann avec ramification quelconque donnée et coupure correspond une fonction η , et une seule, du type concerné.*

J'ai appris par Mittag-Leffler que vous êtes justement aussi occupé par d'importants travaux. Je n'ai pas besoin de vous dire combien je serai intéressé d'en savoir davantage à leur sujet. Si vous êtes dans un mois à Paris, vous ferez la connaissance de mon ami S. Lie, qui vient justement de passer quelques jours chez moi, et qui, bien que lui-même jusqu'à présent n'était pas un théoricien des fonctions, s'intéresse vivement aux progrès faits ces derniers temps par la théorie des fonctions.

Je vous prie de croire à l'assurance de mes sentiments distingués et dévoués.

F. Klein

XXVI

Nancy, le 22 septembre 1882

Monsieur,

Voici quelques détails sur ces fonctions dont j'ai parlé dans ma note des *Annalen* et dont la limite naturelle est formée d'une infinité de cercles. Pour plus de simplicité dans l'exposition, je prendrai pour exemple un cas très particulier. Supposons quatre points a, b, c, d sur le cercle fondamental et quatre cercles coupant orthogonalement celui-ci : le 1^{er} en a et en b , le 2^e en b et en c ; le 3^e en c et en d ; le 4^e en d et en a . On obtient ainsi un quadrilatère curviligne. Considérons deux substitutions (hyperboliques ou paraboliques) la 1^{ère} changeant le

cercle ab dans le cercle ad ; la 2^e changeant le cercle cb dans le cercle cd . Les *itérations** de notre quadrilatère vont recouvrir la surface du cercle fondamental, ou une portion seulement de cette surface ; mais dans tous les cas le groupe sera évidemment discontinu. On reconnaît aisément que le cercle fondamental ne sera recouvert tout entier que dans un seul cas ; lorsque les quatre points $abcd$ seront harmoniques et que les deux substitutions (ab, ad) et (cb, cd) seront paraboliques. On a affaire alors à la fonction modulaire. Dans tous les autres cas, on trouve que les *itérations** en question ne recouvrent qu'un domaine limité par une infinité de cercles. Maintenant le plan tout entier peut être *représenté** sur notre quadrilatère et de telle façon que deux points *correspondants* du périmètre correspondent au même point du plan. Cette *représentation** définit une fonction n'existant que dans le domaine recouvert par les *itérations**. Mais ici il faut faire une remarque importante. Le groupe dérivé des deux substitutions (ab, ad) et (cb, cd) peut être considéré comme engendré d'une autre manière. Considérons quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 coupant tous quatre orthogonalement le cercle fondamental et ne se coupant pas entre eux de façon à être extérieurs les uns aux autres. Soit deux substitutions changeant C_1 en C_2 et C_3 en C_4 ; le groupe qui en dérive est évidemment discontinu et si les quatre cercles sont convenablement choisis, il peut être identique au groupe dont il a été question plus haut. La portion du plan extérieure aux quatre cercles est une sorte de quadrilatère qui peut être *représentée** sur une surface de Riemann de genre 2 et qui engendre ainsi une fonction existant dans tout le plan. Voilà donc le même groupe donnant naissance à deux fonctions essentiellement différentes. On peut se poser à ce sujet une foule de questions délicates que je ne puis aborder ici.

En résumé, vous voyez qu'il s'agit bien de fonctions n'existant que dans un domaine limité par une infinité de cercles et cependant de « fonctions fuchsienues » puisque toutes les substitutions du groupe conservent le cercle fondamental. Chacun des cercles de la frontière est conservé par une des substitutions du groupe, laquelle conserve en même temps le cercle fondamental. Vous savez en effet que toute substitution hyperbolique conserve tous les cercles qui passent par les deux points doubles.

J'apprends avec plaisir que vous préparez un grand travail sur l'objet qui nous intéresse tous deux. Je le lirai avec le plus grand plaisir. Comme

vous l'a dit M. Mittag-Leffler je prépare moi-même un travail sur ce sujet ; mais vu sa longueur je l'ai partagé en cinq mémoires ; le 1^{er}, qui va paraître cette année, sur les groupes à substitutions réelles (que j'ai appelés groupes fuchsien) [Poin1882c] ; le 2^e sur les fonctions fuchsien ; j'en achèverai prochainement la rédaction [Poin1882d] ; le 3^e sur les groupes et fonctions plus générales que j'ai appelées kleinéennes [Poin1883a]. Dans le 4^e, j'aborderai un ordre de questions que j'ai laissées de côté dans le deuxième mémoire ; c'est-à-dire la démonstration de l'existence de fonctions satisfaisant à certaines conditions, par exemple la démonstration de ce fait qu'à toute surface de Riemann correspond une semblable fonction et la détermination des constantes correspondantes [Poin1884b].

Enfin dans le 5^e, je parlerai des fonctions zétafuchsien et de l'intégration des équations linéaires [Poin1884a].

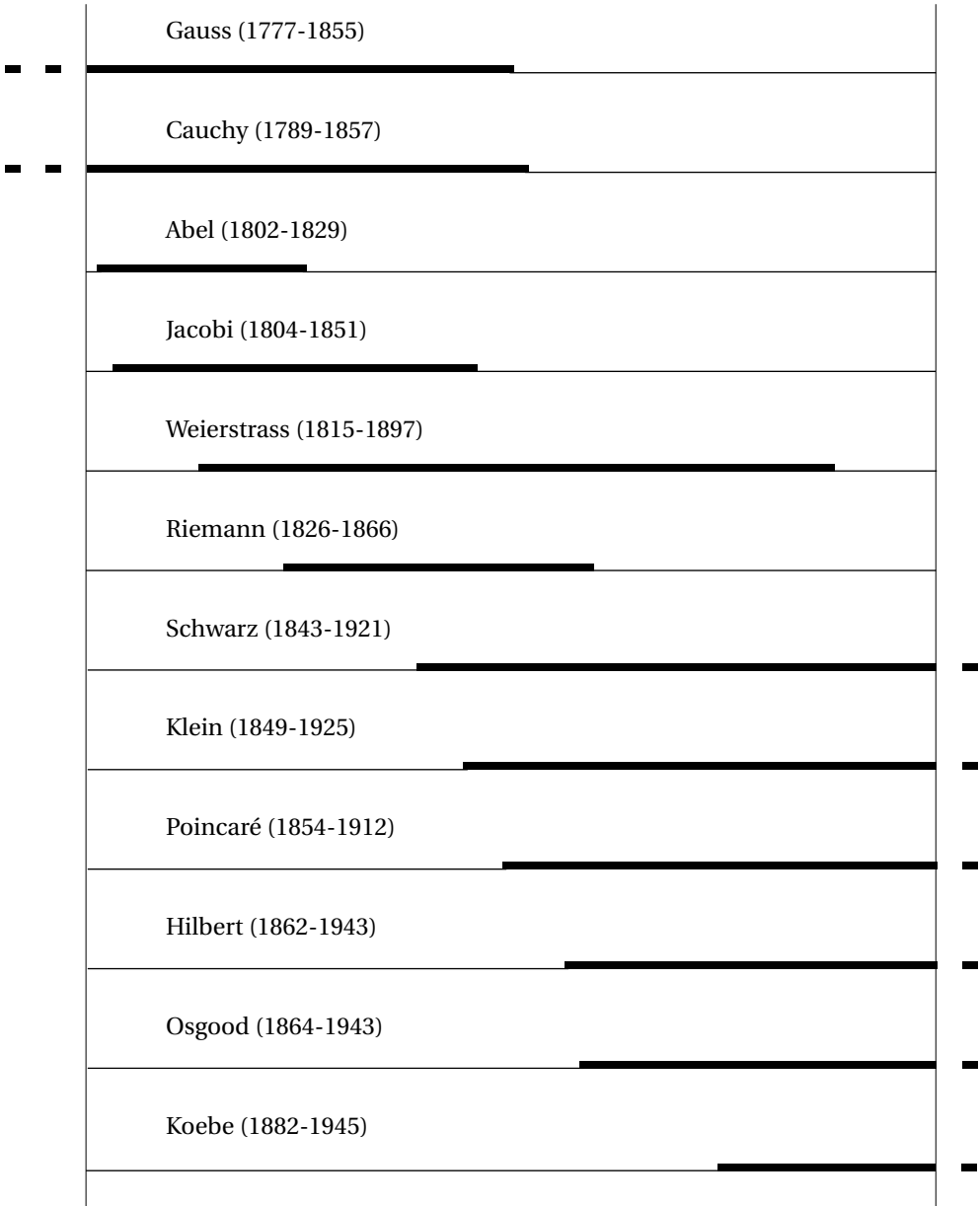
Je dois retourner à Paris après-demain ; je serai donc là au moment du passage de M. Lie. Je serais désolé de perdre l'occasion de voir ce célèbre géomètre. Vous avez dû recevoir la première partie de mon travail sur les courbes définies par les équations différentielles. Je vous en enverrai prochainement la seconde partie ; je vous enverrai en même temps mon mémoire sur les formes cubiques.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

1800

1900



Quelques repères historiques

Dans les pages qui suivent, nous proposons quelques repères chronologiques au fil de l'« aventure de l'uniformisation ». Pour chaque décennie, de 1800 à 1910, nous indiquons quelques événements marquants de l'époque, regroupés dans les rubriques suivantes :

- le thème de ce livre : le Théorème d'Uniformisation ;
- les mathématiques en général ;
- les sciences ;
- la technologie ;
- les arts, la philosophie et les sciences humaines ;
- l'histoire (franco-allemande, puisque c'est dans ces deux pays que vivent les protagonistes de cette aventure).

Il va de soi que les choix qui ont été faits sont extrêmement subjectifs, en particulier pour les dernières rubriques. Nous espérons cependant que ces clins d'œil chronologiques aideront le lecteur à mieux placer le théorème d'uniformisation dans son contexte scientifique, culturel, social et historique.

Le caractère « léger » de ces quelques pages nous dispense de fournir des références précises de cet « inventaire à la Prévert » ; elles sont inspirées d'un grand nombre de frises ou chronologies historiques qu'on trouve un peu partout.

1800-1809

Uniformisation

1806 : La *représentation géométrique des nombres complexes*, esquissée par Euler, est formalisée par Argand et Buée.

Mathématiques

1801 : Gauss publie « *Disquisitiones arithmeticae* ». Ce livre reste un modèle de rigueur. Il fait le point sur la théorie des nombres mais contient surtout des bijoux comme la *réciprocité quadratique* ou les critères de *construction des polygones réguliers* à la règle et au compas, préfigurant la théorie de Galois.

1803 : L. Carnot publie son livre « *Géométrie de position* » dans lequel il attribue systématiquement des signes à des grandeurs géométriques orientées.

1806 : Legendre introduit la *méthode des moindres carrés* qui permet d'ajuster au mieux une courbe théorique à des données expérimentales, entachées d'erreurs. Cette méthode jouera un rôle important dans le développement des sciences expérimentales.

1806 : Poincot découvre les deux derniers *polyèdres réguliers* (étoilés) de Kepler-Poincot.

1807 : Fourier soumet son premier mémoire important « *Sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* », dans lequel il décompose une fonction périodique en une somme infinie d'harmoniques : l'*analyse harmonique* était née.

Sciences

1800-1805 : Cuvier publie les cinq volumes de ses « *Leçons d'anatomie comparée* ».

1801 : Dans « *On the theory of light and colours* », Young met en évidence le *caractère ondulatoire de la lumière*.

1801 : Pinel publie son « *Traité médico-philosophique sur l'aliénation mentale* » : la première classification des maladies mentales.

1802 : Publication de la *loi de Dalton* sur la pression des gaz.

1804 : Dans ses « *Recherches chimiques sur la végétation* », de Saussure prouve qu'il y a consommation d'eau lors de la *photosynthèse*.

1807 : Davy isole le *sodium* et le *potassium*.

1808 : Dalton, dans « *New system of chemical philosophy* », propose une *théorie atomique* dans laquelle tous les corps se décrivent à partir d'un (petit) nombre d'éléments.

1808 : Malus découvre la *polarisation de la lumière*.

1809 : Lamarck publie « *Philosophie zoologique* » qui propose la théorie du transformisme : première tentative d'explication matérialiste et mécaniste de l'*évolution des êtres vivants*.

Avancées technologiques

- 1801 : Jacquard développe le *métier à tisser*.
- 1801 : Volta met au point la *pile électrique*.
- 1803 : Fulton rend opérationnel le premier *bateau à vapeur* sur la Seine.
- 1804 : Trevithick fabrique la première *locomotive*.
- 1805 : Appert développe la première technique de *conserves* efficace pour aliments.
- 1806 : La *morphine* est isolée par Setürner.
- 1806 : L'ingénieur britannique William Murdoch installe l'éclairage au gaz dans une filature cotonnière de Manchester, au Royaume-Uni. Première usine à gaz ouverte à Salford.

Arts, Philosophie et Sciences Humaines

- 1801 : Dans « René », Chateaubriand décrit pour la première fois le « vague des passions » qui deviendra un lieu commun du romantisme. L'année suivante paraîtra le « Génie du christianisme », dans lequel il entend démontrer que le christianisme n'est pas moins favorable à l'art que les « fictions » de l'Antiquité.
- 1802 : Le philologue Grotefend déchiffre l'écriture cunéiforme.
- 1804-1805 : Beethoven compose l'« Appassionata », sa sonate pour piano n°23 en fa mineur, qualifiée de « torrent de feu dans un lit de granit » par l'écrivain Romain Rolland.
- 1808 : Parution du premier « Faust » de Goethe.
- 1808 : Ingres peint « La Grande Baigneuse » (dite « Valpinçon »), premier tableau d'une série représentant des femmes au bain qu'il poursuivra tout au long de sa vie.
- 1809 : Premier volume de la « Description de l'Égypte ou Recueil des observations et recherches qui ont été faites en Égypte pendant l'expédition française ».

Histoire franco-allemande

- 1804 : Napoléon promulgue le *code civil* français qui définit de nouveaux droits et obligations pour les Français.
- 1804 : Napoléon Bonaparte se fait proclamer *empereur des Français* par le Sénat en mai, puis sacrer à Notre-Dame le 2 décembre. Toute la symbolique impériale cherche à poser Napoléon I^{er} en héritier de l'empire romain et de Charlemagne.
- 1806 : Le 6 août, le dernier empereur du *Saint-Empire romain germanique*, se soumettant à un ultimatum de Napoléon, renonce à sa couronne. La Prusse réagit et entre en guerre contre Napoléon. En octobre, les *batailles d'Iéna et d'Auerstaedt* se terminent par une victoire totale de la Grande Armée de Napoléon sur l'armée prussienne. Napoléon entre à Berlin et fait défiler ses troupes sur Unter den Linden. Le traumatisme consécutif à cette humiliation sera le déclencheur du violent *nationalisme allemand* qui se développera au cours du dix-neuvième siècle et conduira à l'*unification de la nation allemande*.
-

1810-1819

Uniformisation

1811 : Dans une lettre à Bessel, Gauss explique l'*intégration des fonctions holomorphes le long de chemins*.

1814 : Premier article de Cauchy sur la *théorie des résidus*.

Mathématiques

1810 : Gergonne publie le premier volume des « Annales de mathématiques pures et appliquées » qui jouera un rôle important dans la diffusion des mathématiques.

1811 : Poisson publie son « Traité de mécanique » contenant des applications à l'électricité, au magnétisme et bien sûr à la mécanique.

1812 : Les deux volumes de la « Théorie analytique des probabilités » de Laplace installent définitivement les probabilités au cœur des mathématiques.

1814 : Publication des « Tables de Barlow » qui contiennent les carrés, les cubes, les racines carrées, les logarithmes, etc. des nombres entiers de 1 à 10 000.

1815 : Pfaff publie un article sur les *systèmes d'équations aux dérivées partielles* qui influencera plus tard Jacobi et Lie.

1817 : Bolzano publie « Rein analytischer Beweis ». On y trouve en particulier la définition des fonctions continues sans utiliser les infinitésimaux et le théorème de Bolzano-Weierstrass.

1817 : Bessel découvre une nouvelle classe de transcendentes, aujourd'hui appelées *fonctions de Bessel*, qui vérifient une équation différentielle algébrique du second ordre.

Sciences

1811 : Avogadro avance l'idée que des volumes égaux de gaz à la même température et la même pression contiennent le même nombre de molécules.

1813 : Von Fraunhofer invente un *spectroscope* qui lui permettra de repérer les raies du spectre solaire (1814) puis de classer les étoiles selon leur spectre lumineux (1822).

1815 : Prout affirme que les *poids atomiques* des éléments sont des multiples de celui de l'hydrogène.

1815 : Ampère établit la distinction entre l'*atome* et la *molécule*.

1816 : Fresnel montre que les *interférences* et la *diffraction* peuvent s'expliquer par la théorie ondulatoire de la lumière.

1817 : Pelletier et Caventou isolent la *chlorophylle*.

Avancées technologiques

- 1816 : Laennec invente le *stéthoscope*.
- 1816 : La *lampe de Davy* est une lampe de sûreté permettant aux mineurs de travailler en présence de gaz inflammables comme le grisou.
- 1817 : Drais invente la *draisienne* (ou *vélocipède*).
- 1819 : Le navire à vapeur Savannah traverse l'océan Atlantique (même si une partie du voyage est à la voile).
- 1819 : Pelletier invente la *quinine*.

Arts, Philosophie et Sciences Humaines

- 1811-1816 : Quatre romans de Jane Austen paraissent successivement : « Sense and Sensibility », « Pride and Prejudice », « Mansfield Park » et « Emma ».
- 1812 : Première publication des « Kinder und Hausmärchen » (Contes de l'enfance et du foyer) des frères Grimm.
- 1814 : Goya peint « El tres de mayo », toile représentant l'exécution de prisonniers espagnols par les soldats de l'armée napoléonienne le 3 mai 1808, à la suite de la révolte de la veille. La toile est commissionnée par le gouvernement provisoire espagnol sur suggestion de Goya.
- 1817 : Friedrich peint « Der Wanderer über dem Nebelmeer » (Le Voyageur contemplant une mer de nuages), emblématique de la *peinture romantique allemande*.
- 1818-1819 : Géricault peint « Le Radeau de la Méduse ».

Histoire franco-allemande

- 1812 : La *campagne de Russie*, marquée par l'incendie de Moscou par les Russes dès le lendemain de l'entrée des Français dans la ville, se termine par une retraite catastrophique de l'armée napoléonienne à travers la Pologne et l'Allemagne. Le froid, la neige et les attaques des cosaques conduisent à des pertes considérables ; la Grande Armée est détruite.
- 1813 : Napoléon réussit à reconstituer une armée de 200 000 hommes mais la *Bataille des Nations* à Leipzig se solde par une défaite décisive de l'armée française face à une coalition regroupant presque toute l'Europe.
- 1814 : Napoléon doit abdiquer et s'exiler à l'île d'Elbe. La royauté est restaurée en France et les coalisés installent Louis XVIII sur le trône. Le défunt *Saint-Empire romain germanique* est remplacé par la *Confédération germanique* qui regroupe trente-neuf États sous la direction honorifique des Habsbourg.
- 1815 : Napoléon rentre en France à la tête d'une petite armée et réussit à reprendre le pouvoir. Mais les alliés n'acceptent pas ce retour et reprennent les armes contre la France ; l'armée napoléonienne est finalement défaite à la *bataille de Waterloo*. Napoléon est exilé à Sainte-Hélène. Il laisse une France exsangue.
-

1820-1829

Uniformisation

1825 : Gauss démontre son *théorème d'uniformisation locale* : toute surface est localement conformément équivalente au plan euclidien. Ce résultat permettra plus tard de voir toute *surface riemannienne* comme une *surface de Riemann*.

1827-1829 : Abel et Jacobi comprennent que les réciproques des intégrales elliptiques sont des fonctions *uniformes* doublement périodiques ; la voie est ouverte pour l'uniformisation des *courbes elliptiques*.

Mathématiques

1821 : Cauchy publie son « Cours d'analyse » qui présente l'analyse mathématique le plus rigoureusement possible.

1824 : Abel démontre que l'équation générale de degré 5 n'est pas résoluble par radicaux.

1825 : Le théorème de Fermat est démontré pour $n = 5$ par Dirichlet et Legendre.

1826 : Lobachevsky annonce qu'il a développé une géométrie dans laquelle le 5^e *postulat d'Euclide* n'est pas vérifié : par un point pris hors d'une droite on peut mener une infinité de parallèles à cette droite.

1826 : Fondation de la « Journal für die reine und angewandte Mathematik » par Crelle.

1828 : Dans « Disquisitiones generales circa superficies », Gauss démontre son « *Theorema Egregium* » qui ouvre la voie au concept de *courbure* associée à une surface *abstraite*, indépendamment d'un plongement dans l'espace.

1829 : Démonstration du théorème de Sturm qui permet de calculer le nombre de racines réelles distinctes d'un polynôme comprises dans un intervalle.

Sciences

1820 : Oersted observe qu'un courant électrique produit un *champ magnétique*, initiant ainsi l'étude de l'*électromagnétisme*.

1821 : Arago et Gay-Lussac inventent l'*électroaimant*.

1822 : Grâce à l'étude de la pierre de Rosette, Champollion parvient à déchiffrer l'égyptien hiéroglyphique.

1824 : Carnot publie ses « *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* ». Elles contiennent la théorie du cycle de Carnot qui sera fondamentale pour le développement des machines à vapeur et plus généralement de la *thermodynamique*.

1827 : Le botaniste Brown observe les mouvements erratiques de particules de pollen en suspension dans un liquide ; c'est le *mouvement brownien*.

1829 : Lyell publie ses « *Principles of Geology* » dans lesquels il affirme en particulier que la surface de la Terre change très lentement mais continûment ; ce sera une idée importante pour la théorie de l'évolution.

Avancées technologiques

- 1820 : Fabian von Bellingshausen découvre le *continent antarctique*.
- 1821 : Mary Anning découvre le premier squelette complet de plésiosaure.
- 1821 : Faraday met au point le *moteur électrique*.
- 1822 : Mantell découvre les premiers fossiles de *dinosaure* : des dents d'un iguanodon.
- 1823 : Macintosh dépose son brevet de *vêtement imperméable*.
- 1825 : Chevreul et Gay-Lussac fabriquent des *bougies* à la stéatite.
- 1825 : Inauguration de la première *ligne ferroviaire marchande* Stockton-Darlington ; premier train de voyageurs tiré par une locomotive à vapeur inventée par Stephenson.
- 1826 : Moray construit le premier *moteur à combustion interne* qui fonctionne avec un mélange d'éthanol et de térébenthine.
- 1826 : La première *photographie*, « Point de vue du Gras », est réalisée par Niepce.

Arts, Philosophie et Sciences Humaines

- 1823 : Pouchkine entame l'écriture de son chef d'œuvre « Eugène Onéguine ».
- 1824 : Beethoven compose sa neuvième et dernière symphonie.
- 1826 : Mendelssohn compose son ouverture au « Songe d'une nuit d'été ».
- 1827 : Un an avant sa mort, Schubert compose « Le Voyage d'hiver ».
- 1829 : Chopin compose son premier livre d'*Études*, à l'âge de 19 ans.
- 1829 : En mai 1829, le jeune Gérard, qui ne se fait pas encore appeler de Nerval, est convoqué par Hugo pour apporter son soutien à « Hernani ». Il avait fait paraître l'année précédente une traduction de « Faust » dont le compositeur Berlioz s'est inspiré pour son opéra « La Damnation de Faust ». Comme Galois, il passe une partie de l'année 1831 à la prison de Sainte-Pélagie.
- 1829 : « Guillaume Tell », le dernier opéra de Rossini, est représenté à Paris le 3 août.

Histoire franco-allemande

- 1824 : À la mort de Louis XVIII, son frère monte sur le trône, sous le nom de Charles X, à l'âge de 66 ans. Charles X renoue avec la tradition du sacre, à Reims, le 29 mai 1825, dans un faste qui rappelle les grands jours de l'Ancien Régime. Son règne sera marqué par la domination des ultra-royalistes, et il s'aliénera l'opinion par ses concessions d'indemnités aux émigrés, sa loi punissant de mort toute personne coupable de sacrilège et son rétablissement de la censure.
-

1830-1839

Uniformisation

- 1830 : Publication des trois volumes du « Traité des fonctions elliptiques » de Legendre. Ce monument, qui fait référence pour la manipulation et le calcul des intégrales elliptiques, est cependant dépassé d'un point de vue théorique par les travaux de Gauss, Abel et Jacobi.
- 1835 : Jacobi invente les *fonctions ϑ* qui fournissent un procédé très général de construction de fonctions elliptiques.
-

Mathématiques

- 1831 : Cauchy démontre que les fonctions holomorphes peuvent se développer en *séries*.
- 1832 : Le travail de Bolyai sur la *géométrie non euclidienne* est publié.
- 1832 : Galois meurt à la suite d'un duel. Dans la nuit précédant sa mort, il esquisse à la hâte la théorie qui porte aujourd'hui son nom et qui influencera en profondeur presque toutes les mathématiques.
- 1834 : Hamilton publie « On a general Method in Dynamics ».
- 1835 : Quételet publie « Sur l'homme et le développement de ses facultés, essai de physique sociale ».
- 1837 : Dans son livre « Recherches sur la probabilité des jugements », Poisson introduit la loi de probabilité qui porte son nom et l'applique à des problèmes concrets liés au fonctionnement des tribunaux.
- 1837 : Dirichlet publie la première version du *théorème de la progression arithmétique* fondant la théorie analytique des nombres.
-

Sciences

- 1833 : Dans « On a general method of expressing the paths of light and of the planets by the coefficients of a characteristic function », Hamilton fonde la *dynamique hamiltonienne*, centrée sur le concept d'*action*. Le principe que cette action est *stationnaire* généralise le principe de moindre action et reste encore aujourd'hui l'un des piliers de la science.
- 1834 : Payen et Persoz isolent le premier *enzyme* : la diastase.
- 1834 : Babbage imagine une *machine à calculer mécanique et programmable* utilisant des cartes perforées.
- 1838 : Schleiden constate que les plantes sont constituées de *cellules* et montre l'importance de leurs *noyaux*.
-

Avancées technologiques

- 1831 : La découverte de l'*induction électromagnétique* par Faraday permet de produire des courants alternatifs. Pixii construit le premier *alternateur* qui sera bientôt amélioré.
- 1833 : Gauss et Weber développent le *télégraphe électromagnétique*.
- 1835 : Colt invente le *revolver*.
- 1835 : Invention du *code Morse*.
- 1836 : Madersperger invente la *machine à coudre*.

Arts, Philosophie et Sciences Humaines

- 1830 : Publication de la troisième et dernière version de « Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse » (Encyclopédie des sciences philosophiques) dans lequel Hegel expose sa philosophie sous forme de système.
- 1830-1842 : Comte expose les principes du *positivisme scientifique* dans son « Cours de philosophie positive ».
- 1831 : Le tableau de Delacroix « La Liberté guidant le peuple », représentant la Révolution de juillet, est exposé au Salon de Paris.
- 1831 : « La Peau de chagrin », publiée dans la collection « Romans et contes philosophiques », est le premier volume de ce qui deviendra la « Comédie humaine » de Balzac.
- 1831 : Le 26 décembre, « Norma » est créé à la Scala de Milan.
- 1835 : Chopin publie sa « Ballade n°1 en sol mineur », une *odyssée à l'âme de Chopin* comme dira Liszt, mêlant bonheur, mélancolie, tristesse ou encore allégresse.
- 1837 : Büchner meurt, laissant son « Woyzeck » inachevé.
- 1839 : « La Chartreuse de Parme » de Stendhal est publiée en deux volumes.

Histoire franco-allemande

- 1830 : Le 11 mai, prenant prétexte d'une altercation entre le Dey d'Alger et le consul de France, Charles X lance la *campagne d'Algérie*. Cette date marque le début de la conquête du *second espace colonial français* (le premier ayant été entièrement dissous à la chute du premier Empire).
- 1830 : En juillet, une tentative de Charles X de dissoudre la Chambre des députés, de changer la loi électorale et d'abolir la liberté de la presse, déclenche une émeute qui se transforme vite en *révolution populaire*. Paris se couvre de barricades, les forces armées sont prises en étau et Charles X doit fuir. Les députés libéraux, majoritairement monarchistes, réussissent à récupérer cette révolution et conservent une monarchie constitutionnelle au prix d'un changement de dynastie. Louis-Philippe I^{er} est proclamé « roi des Français ». Il sera le « Roi bourgeois » ; son règne sera caractérisé par le développement et l'enrichissement rapide de la bourgeoisie manufacturière et financière.
-

1840-1849

Uniformisation

- 1844 : Dans son mémoire sur la *géodésie supérieure*, Gauss introduit le mot *conforme*.
- 1847-51 : Publication des travaux d'Eisenstein sur les *fonctions elliptiques* : les séries qu'il introduit permettent de relier les coefficients du polynôme qui apparaît dans une intégrale elliptique aux périodes de la fonction réciproque.
- 1847 : À Göttingen, Riemann suit les cours d'Eisenstein sur les fonctions elliptiques.
-

Mathématiques

- 1841 : Quételet ouvre le premier *bureau statistique*. Les statistiques se développent et deviennent un domaine à part entière des mathématiques.
- 1843-1845 : Le concept d'espace vectoriel à *n dimensions* est indépendamment dégagé par Cayley et Grassmann.
- 1843 : Hamilton découvre les *quaternions*.
- 1844 : Liouville explicite les premiers *nombres transcendants*.
- 1845 : Cayley étudie la composition des applications linéaires dans « Theory of linear transformations ».
- 1847 : Boole montre qu'on peut *algébriser* la logique dans « The Mathematical Analysis of Logic ».
- 1847 : Kummer publie « Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren ». Il parvient à résoudre le grand théorème de Fermat pour tout entier *n* plus petit que 100 et différent de 37, 59 et 67.
- 1847 : Von Staudt publie « Geometrie der Lage », le premier traité de géométrie projective sans notion métrique.
-

Sciences

- 1843 : Joule et Mayer montrent indépendamment l'*équivalence entre la chaleur et l'énergie mécanique*.
- 1843 : Schwabe découvre le cycle des *taches solaires*.
- 1844 : Darwin écrit, mais ne publie pas, un essai qui préfigure sa *théorie de l'évolution des espèces*.
- 1847 : Helmholtz formule le *principe de conservation de l'énergie* dans « Über die Erhaltung der Kraft ».
- 1848 : Kelvin propose une *échelle absolue des températures* qui portera son nom.
- 1849 : Fizeau mesure la *vitesse de la lumière* en utilisant des roues dentées en rotation.
-

Avancées technologiques

- 1841 : Le *marteau-pilon* est une machine-outil de forge mise au point par Bourdon. Il a fait faire un bond à l'industrie métallurgique alors en plein développement.
- 1842 : Long est le créateur de *l'anesthésie* à l'éther. Il persuade un de ses patients, James Venable, qu'il pourrait lui enlever une tumeur sans douleur.
- 1844 : Manzetti suggère la possibilité d'un *télégraphe parlant*, le futur *téléphone*, qui sera progressivement amélioré.
- 1846 : Hoe invente la *presse rotative* qui permet d'imprimer plus rapidement.
- 1847 : Krupp produit ses premiers *canons en acier*.
- 1848 : Lambot et Joseph Monier inventent le *béton armé*.
-

Arts, Philosophie et Sciences Humaines

- 1840 : Parution du second tome de « De la démocratie en Amérique » de Tocqueville.
- 1840 : Publication de « *Über die Grundlage der Moral* » (Fondement de la morale) de Schopenhauer.
- 1844 : Heine, installé à Paris depuis 1831, fait un dernier voyage en Allemagne où le gouvernement proscrit ses œuvres et écrit « *Deutschland : Ein Wintermärchen* » (Allemagne : un conte d'hiver).
- 1844 : Turner peint « *Rain, Steam and Speed - The Great Western Railway* ».
- 1845 : Schumann achève son « *Concerto pour piano en la mineur op. 54* ».
-

Histoire franco-allemande

- 1848 : Le 23 juillet, sous l'impulsion des républicains, Paris se soulève. Louis-Philippe, refusant de lancer l'assaut contre les Parisiens, est contraint d'abdiquer. Les révolutionnaires mettent en place un gouvernement provisoire républicain, supprimant la monarchie de Juillet et créant la *deuxième République*, le 25 février 1848. Louis-Napoléon Bonaparte, neveu de Napoléon I^{er}, sera élu *président de la République française* au suffrage universel masculin en décembre.
- 1848 : En mars 1848, à la nouvelle des révolutions parisiennes et viennoises, l'Allemagne s'embrase à son tour. Les révolutionnaires veulent créer une Allemagne unifiée et démocratique. Ils se heurteront au roi Frédéric-Guillaume IV de Prusse qui convoquera dans un premier temps une assemblée constituante mais la dissoudra bientôt, quand le rapport de force sera inversé. Les révolutions de 1848 échoueront à faire l'unité allemande mais la plupart des états allemands concéderont des constitutions donnant satisfaction à la bourgeoisie libérale.
-

1850-1859

Uniformisation

- 1851 : Dans sa thèse, Riemann développe une théorie systématique des *fonctions holomorphes* ; il invente les surfaces qui portent son nom, explique comment les manipuler, comment y construire des fonctions méromorphes ; il « démontre » son théorème de représentation conforme.
- 1854 : Weierstrass publie un article dans lequel il expose son point de vue sur les fonctions elliptiques développées en séries de fonctions normalement convergentes.
- 1857 : Dans un article au journal de Crelle, Riemann construit une théorie générale des *fonctions algébriques* et des *intégrales abéliennes*. Il y explique en particulier comment voir les courbes algébriques comme des surfaces de Riemann compactes abstraites et décrit la topologie, la géométrie analytique de ces surfaces, les espaces de modules, etc.
-

Mathématiques

- 1852 : Chasles introduit les concepts de *birapports*, de *pinceaux* de coniques et d'*involutions*, dans son « Traité de Géométrie ».
- 1854 : Dans son habilitation intitulée « Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen », Riemann jette les bases de la *géométrie différentielle*, introduisant en particulier le concept de variété à n dimensions.
- 1854 : Cayley définit la notion de *groupe* abstrait de permutations.
- 1858 : Dedekind propose une construction rigoureuse des nombres réels, à l'aide des *coupures de Dedekind*.
- 1859 : Riemann publie un mémoire intitulé « Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse », dans lequel il utilise entre autres la *fonction zêta* pour estimer le nombre de nombres premiers plus petits qu'une quantité donnée.
- 1859 : Mannheim invente la *règle à calculer* moderne avec sa réglette et son curseur.
-

Sciences

- 1850 : Clausius introduit le concept d'*entropie* et formule le *second principe de la thermodynamique* qui généralise le principe de Carnot.
- 1851 : Le *pendule de Foucault* démontre expérimentalement la rotation de la Terre.
- 1859 : Darwin publie « On the Origin of Species by Means of Natural Selection or the Preservation of Favored Races in the Struggle for Life ».
-

Avancées technologiques

- 1850 : Un *câble commercial sous-marin télégraphique* entre la France et l'Angleterre fonctionnera pendant plus de 40 ans.
- 1852 : Giffard construit le premier *ballon dirigeable* qui, grâce à une machine à vapeur placée dans la nacelle, peut modifier sa direction par rapport au vent.
- 1853 : Otis crée la compagnie Otis Elevator Company et vend les premiers *ascenseurs sécurisés*, ouvrant ainsi la voie à la construction de gratte-ciel.
- 1859 : Le colonel Drake fore le *premier puits* de pétrole en Pennsylvanie.

Arts, Philosophie et Sciences Humaines

- 1850 : « Les Chouans » est le dernier volume de « La Comédie humaine » de Balzac.
- 1850 : Melville commence la rédaction de « Moby Dick ».
- 1851-1854 : Comte rédige son « Système de politique positive » : on est passé du *positivisme scientifique* au *positivisme religieux*.
- 1852-1853 : Liszt compose sa « Sonate en si mineur », dédiée à Schumann.
- 1856 : « Madame Bovary » paraît sous forme de feuilleton dans la « Revue de Paris ». L'année suivante, le gérant de la revue, l'imprimeur et Flaubert seront jugés pour « outrage à la morale publique et religieuse et aux bonnes mœurs » ; ils seront acquittés.
- 1857 : Publication des « Fleurs du Mal », recueil contenant la quasi-totalité de la production poétique de Baudelaire depuis 1840.

Histoire franco-allemande

- 1850 : Cette année marque le début d'une période de *développement industriel* très important en Allemagne. Ce développement, qui touche tous les états, aboutit à une union économique autour de la Prusse qui précédera l'union politique.
- 1851-1852 : Le coup d'état du 2 décembre, organisé par Louis-Napoléon Bonaparte, met fin à la deuxième République. L'Assemblée nationale est dissoute et le mandat du prince-président prolongé à dix ans. Les députés démocrates-socialistes et républicains sont massivement condamnés à l'exil, seule la presse conservatrice est autorisée à paraître. Quelques mois plus tard, la « dignité impériale » est rétablie par référendum. Louis-Napoléon Bonaparte devient officiellement « Napoléon III, Empereur des Français » le 2 décembre 1852. Le régime prendra une tournure nettement plus libérale à partir de 1859.
- 1853 : Napoléon III nomme Haussmann préfet de la Seine. Jusqu'en 1870, il conduira une transformation radicale de Paris, symbole de l'ère de développement économique et d'explosion du capitalisme que sera le second Empire.
-

1860-1869

Uniformisation

- 1865 : Clebsch démontre que toute surface de Riemann compacte de genre nul est bi-holomorphe à la sphère de Riemann et que toute surface de Riemann compacte de genre 1 est biholomorphe au quotient du plan par un réseau.
- 1866 : Fuchs publie les travaux sur les *équations différentielles linéaires* d'ordre 2 qui seront à la base de ceux de Poincaré.
- 1869 : Schwarz publie des *exemples d'uniformisation explicites* d'ouverts du plan à bords polygonaux. Le lien qu'il découvre entre la *dérivée schwarzienne* et le problème de l'uniformisation est l'ancêtre direct de l'approche de Poincaré de l'uniformisation *via* les équations différentielles.
-

Mathématiques

- 1861 : Weierstrass construit une courbe continue qui n'est dérivable en aucun point.
- 1863 : Construction de l'ensembles des nombre réels par Weierstrass.
- 1865 : Plücker introduit les coordonnées qui portent son nom pour décrire les droites dans l'espace (projectif complexe) de dimension 3. C'est l'une des premières fois que l'on considère un *espace* dont les éléments ne sont pas nécessairement des points.
- 1868 : Beltrami construit le premier *modèle concret* pour la géométrie non euclidienne de Lobachevsky et Bolyai.
-

Sciences

- 1861 : Bunsen et Kirchhoff jettent les bases de la *spectrographie*.
- 1861 : Pasteur réfute la théorie de la *génération spontanée*.
- 1862 : Pasteur publie sa théorie des germes : les infections sont produites par des *micro-organismes* qui se reproduisent.
- 1862 : Foucault mesure avec précision la *vitesse de la lumière*.
- 1865 : Les *équations de Maxwell*, écrites pour la première fois dans « A Dynamical theory of the electromagnetic field », unifient les champs électriques et magnétiques en un seul champ *électromagnétique*.
- 1866 : Dans « Versuche Über Pflanzenhybriden », Mendel interprète l'*hérédité* en termes de paires de caractères dominants ou récessifs.
- 1869 : Mendéléev et Meyer formulent indépendamment la *classification périodique des éléments*, laissant en particulier des cases vides pour les éléments qui n'avaient pas encore été découverts.
-

Avancées technologiques

- 1860 : Fowler contribue à construire le premier *métro* à Londres, la ligne « Metropolitan », une courte ligne construite par la méthode de tranchée couverte.
- 1862 : Gatling dépose un brevet protégeant une *mitrailleuse* fondée sur le principe de six à dix canons rotatifs, ce qui permet de paralléliser les opérations nécessaires au tir et d'augmenter le temps de refroidissement sans réduire la cadence.
- 1866 : La *machine à écrire Sholes et Glidden* (connue plus tard sous le nom de « Remington N° 1 ») est la première à connaître un succès commercial.
- 1867 : Nobel dépose un brevet pour l'invention de la *dynamite* : le premier explosif puissant, peu coûteux et *stable*.
- 1867 : L'ingénieur Eiffel crée ses ateliers.

Arts, Philosophie et Sciences Humaines

- 1862 : Publication des « Misérables » de Hugo qui sera immédiatement un grand succès populaire.
- 1865-1869 : « Guerre et Paix » de Tolstoï est publié dans « Russkii Vestnik ». Le roman narre l'histoire des guerres napoléoniennes en Russie.
- 1866 : Courbet peint « L'Origine du monde ».
- 1867 : Parution du livre 1 du « Capital » de Marx, consacré au développement de la *production capitaliste*. Les livres 2 et 3 seront publiés en 1885 et 1894 par Engels, à partir de brouillons de Marx, après la mort de ce dernier.
- 1869 : Publication de la première partie du roman « Vingt mille lieux sous les mers » de Jules Verne. La seconde partie sera publiée l'année suivante.

Histoire franco-allemande

- 1864 : En France, une loi abroge le « délit de coalition » et donne le droit aux employés d'exiger de meilleures conditions de travail en organisant des grèves.
- 1867 : La *Confédération de l'Allemagne du Nord*, regroupant vingt-deux états allemands situés au nord de la ligne du Main, est créée sur initiative du ministre-président de Prusse von Bismarck, à la suite de la victoire prussienne sur l'Autriche et de la dissolution de la Confédération germanique. De fait, le Royaume de Prusse annexe les États ayant soutenu l'Autriche. Si von Bismarck n'inclut pas les États du Sud de l'Allemagne pour ne pas heurter Napoléon III, ces derniers signent avec la Prusse des traités d'alliance militaire.
-

1870-1879

Uniformisation

1870 : Schwarz invente sa *méthode alternante* qui permet de montrer que les ouverts simplement connexes, relativement compacts et à bords polygonaux d'une surface de Riemann sont biholomorphes au disque.

1878-79 : Klein publie une série d'articles sur les *équations modulaires*. Ces articles contiennent en particulier le premier exemple d'uniformisation explicite d'une surface de Riemann de genre supérieur (privé d'un nombre fini de points).

Mathématiques

1871 : Dedekind introduit les notions de *corps, anneau, module, idéal*.

1872 : Dans son *Programme d'Erlangen*, Klein voit une géométrie comme l'ensemble des structures laissées invariantes par un groupe de transformations.

1872 : Fondation de la *Société mathématique de France*.

1872 : Sylow démontre ses théorèmes sur les groupes finis dans « Théorèmes sur les groupes de substitutions ».

1873 : Hermite démontre la *transcendance du nombre e*.

1874 : Cantor jette les bases de la *théorie des ensembles*, introduisant en particulier la notion de dénombrabilité.

1878 : Sylvester fonde l'« American Journal of Mathematics ».

Sciences

1872 : Boltzmann explique que l'augmentation de l'entropie et le second principe de la thermodynamique ne peuvent être compris qu'en termes de grandes populations de particules, et non pas en termes de trajectoires individuelles ; ce sont les débuts de la *physique statistique*.

1873 : Schneider décrit les *chromosomes* pendant la mitose.

1873 : Dans « Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires », Plateau montre expérimentalement que, sans forces extérieures, les surfaces des liquides minimisent l'aire.

1878 : Gibbs développe le concept général d'*équilibre thermodynamique* dans « On the equilibrium of heterogenous substances ».

Avancées technologiques

- 1873 : Première *automobile* produite en série à des fins de commercialisation : « L'Obéissante » d'Amédée Bollée.
- 1877 : Edison invente le *phonographe* et le teste en enregistrant « Mary had a little lamb ».
- 1879 : Edison présente sa première *ampoule électrique à incandescence*. Une centrale hydraulique de 7 kW est construite la même année à Saint-Moritz.
- 1879 : Début de l'*exploitation commerciale du téléphone* en France.

Arts, Philosophie et Sciences Humaines

- 1871 : À l'Opéra Khédival du Caire, a lieu la première représentation d'« Aïda » de Verdi.
- 1872 : Monet peint « Impression, soleil levant », une vue de l'ancien port du Havre. C'est ce tableau qui a donné son nom au *mouvement impressionniste*.
- 1873 : Rimbaud écrit « Une saison en enfer ».
- 1875 : Le 3 mars, à l'Opéra-Comique de Paris, a lieu la première représentation de *Carmen* de Bizet.
- 1876 : Le « Festspielhaus » de Bayreuth, salle spécialement conçue par Wagner pour la représentation de ses opéras, ouvre ses portes à l'occasion de la création de « L'Anneau du Nibelung ».
- 1879-1880 : « Les Frères Karamazov », dernier roman de Dostoïevski, est publié sous forme de feuilleton dans le magazine « Russkii Vestnik ».

Histoire franco-allemande

- 1870 : La France déclare la guerre à la Prusse le 19 juillet 1870. L'impréparation française la conduit au désastre : Napoléon III est fait prisonnier, le siège de Paris commence le 19 septembre.
- 1871 : Le 18 janvier, l'*Empire allemand* est proclamé, très symboliquement à Versailles. La constitution prévoit que le Reichstag vote les lois, mais le pouvoir réel est entre les mains de Guillaume I^{er} et de son chancelier von Bismarck.
- 1871 : La France capitule officiellement le 28 janvier. L'Alsace et une partie de la Lorraine (re-)deviennent allemandes. La Garde nationale et les ouvriers de Paris, qui refusent d'accepter la défaite, prennent le contrôle de la capitale et mettent en place un gouvernement insurrectionnel : c'est la *Commune de Paris*. Avec l'accord tacite des Prussiens, celle-ci est écrasée lors de la *Semaine sanglante* par le gouvernement de Thiers réfugié à Versailles.
- 1871-1880 : En Allemagne, c'est la période du *Kulturkampf* menée par von Bismarck contre l'Église catholique qui lui apparaît comme un élément étranger menaçant l'unité du nouvel Empire allemand.
-

1880-1889

Uniformisation

- 1881 : Klein présente sa vision des travaux de Riemann ; il développe des interprétations hydrodynamiques et électrostatiques des résultats d'existence de formes méromorphes.
- 1881 : Ses recherches sur les équations linéaires d'ordre 2 amènent Poincaré à « inventer » les groupes fuchsien.
- 1882 : À la suite des travaux de Poincaré sur les groupes fuchsien, Klein et Poincaré « démontrent » le théorème d'uniformisation pour les surfaces de Riemann algébriques, *via la méthode de continuité*.
- 1883 : Poincaré démontre son *théorème d'uniformisation des fonctions* : la surface de Riemann associée à un germe de fonction analytique quelconque peut être paramétrée par un ouvert du plan (avec d'éventuels points de ramification).
-

Mathématiques

- 1882 : Lindemann démontre la *transcendance de π* , montrant ainsi l'impossibilité de la quadrature du cercle à la règle et au compas.
- 1884 : Volterra publie ses travaux sur les équations intégrales.
- 1885 : Dans son mémoire « Sur les courbes définies par les équations différentielles », Poincaré « invente » la théorie des *systèmes dynamiques*.
- 1888 : Engel et Lie publient le premier volume de « Theorie der Transformationsgruppen » qui pose les fondements de la *théorie des groupes de Lie*.
- 1889 : Dans son mémoire sur le problème des trois corps, Poincaré découvre la possibilité du *chaos déterministe*.
- 1890 : Peano exhibe une *courbe continue qui recouvre complètement un carré*.
-

Sciences

- 1882 : Tesla invente le *moteur à induction* sur le principe d'un champ magnétique en rotation.
- 1883 : Roux suggère que les filaments visibles dans les noyaux des cellules sont les vecteurs de l'hérédité.
- 1885 : Pasteur *vaccine* le jeune Joseph Meister, mordu par un chien enragé.
- 1886 : Hertz met en évidence expérimentalement les *ondes radio*.
- 1887 : Michelson et Morley démontrent expérimentalement l'*inexistence de l'éther* en comparant la vitesse de la lumière dans diverses directions.
-

Avancées technologiques

- 1885 : Benz développe le « Benz Patent Motorwagen » en installant un monocylindre de cinq cent soixante watts sur un tricycle.
- 1886 : La *Linotype* de Mergenthaler imprime le « New York Tribune » : c'est une machine qui utilise un clavier alphanumérique permettant de composer une ligne de texte complète en un seul bloc de plomb.
- 1887 : Berliner propose une *machine à disque de zinc* et à gravure horizontale du son. Le procédé Edison utilise lui un cylindre et une gravure verticale.
- 1888 : Le nom « Kodak » apparaît pour la première fois en 1888 au lancement des premiers appareils photo à pellicule photographique.

Arts, Philosophie et Sciences Humaines

- 1880-1881 : « The Portrait of a Lady » d'Henry James est publié sous forme de feuilleton dans l'« Atlantic Monthly » et « Macmillan's Magazine ».
- 1885 : Le roman « Germinal » de Zola, décrivant la vie quotidienne, le labeur, les souffrances des mineurs, connaît un succès populaire important.
- 1888 : Mahler commence à composer ses deux premières symphonies (« Titan » et « Résurrection ») qu'il achèvera en 1896 et 1894.
- 1889 : Publication de « Jenseits von Gut und Böse » (Par-delà le bien et le mal), dans lequel Nietzsche propose de dépasser « la croyance aux oppositions des valeurs ».
- 1889 : Van Gogh peint « Nuit étoilée ».

Histoire franco-allemande

- 1880-1887 : Guillaume I^{er}, affaibli, laisse de plus en plus le pouvoir à von Bismarck. Celui-ci signe la *Triple Alliance* avec l'Autriche-Hongrie et le Royaume d'Italie en 1882.
- 1879-1885 : En France, Jules Ferry est la personnalité dominante des premiers gouvernements républicains. Il établit la gratuité de l'enseignement primaire, son caractère obligatoire et laïque. Il fait voter des lois assurant la liberté de la presse et la liberté syndicale. C'est aussi un partisan très actif de l'expansion coloniale française. Il s'oppose sur ce point à Clémenceau qui considère que les aventures colonialistes détournent l'attention des provinces perdues d'Alsace et de Lorraine ; pour la même raison, il bénéficie de la bienveillance de von Bismarck.
- 1888 : À la mort de Guillaume I^{er} et après un très court règne de Frédéric III, Guillaume II est proclamé empereur.
-

1890-1899

Uniformisation

1890 : La Société royale des sciences de Göttingen propose une nouvelle approche du théorème d'uniformisation, *via* l'étude de l'équation $\Delta u = k.e^u$. Cette suggestion permettra bientôt à Picard et Poincaré de donner une nouvelle preuve du théorème d'uniformisation pour les surfaces de Riemann compactes.

Mathématiques

- 1894 : Dans sa thèse, É. Cartan classe les *algèbres de Lie semi-simples complexes*.
- 1895 : Poincaré publie son premier article sur l'« Analysis Situs », dans lequel il fonde la *topologie algébrique*.
- 1895 : Weber publie son livre célèbre « Lehrbuch der Algebra ».
- 1895 : « Leçons de Stockholm » : Painlevé remplace Poincaré (sous les conseils de Mittag-Leffler) pour présenter devant le roi Oscar II de Suède les derniers développements de la théorie analytique des équations différentielles.
- 1896 : Hadamard et de la Vallée Poussin démontrent indépendamment le *théorème des nombres premiers*, donnant ainsi une estimation du nombre de nombres premiers inférieurs à une quantité donnée.
- 1896 : Frobenius apporte une contribution majeure sur la représentation des groupes et la théorie des corps finis dans sa publication « Über die Gruppencharactere ».
- 1897 : Burnside publie « The Theory of Groups of Finite Order ».
- 1898 : L'article de Hadamard sur les géodésiques des *surfaces à courbure négative* pose les fondations de la *dynamique symbolique*.
-

Sciences

- 1891 : Dubois découvre les premiers restes d'*Homo erectus* à Trinil, à l'est de l'île de Java en Indonésie. Il le nomme pithécanthrope (*Pithecanthropus erectus*) dans une étude publiée en 1894.
- 1895 : Röntgen découvre les *rayons X*.
- 1896 : Becquerel découvre la *radioactivité de l'uranium*.
- 1897 : Thomson découvre l'*électron*.
- 1898 : P. et M. Curie découvrent le *radium et le polonium* et montrent que la radioactivité est une propriété atomique.
-

Avancées technologiques

- 1890 : À bord de son aéronef *Éole*, Ader décolle et rase le sol sur près de cinquante mètres.
- 1895 : Les frères Lumière organisent les premières projections de *cinéma*.
- 1895 : Diesel met au point un *moteur à combustion interne* dont l'allumage n'est pas commandé mais spontané, par phénomène d'auto-inflammation.
- 1899 : Hoffmann dépose le brevet de l'*aspirine*.

Arts, Philosophie et Sciences Humaines

- 1890 : La « Judith » de Klimt est considérée comme un *crime contre la création artistique*.
- 1891 : Gauguin s'installe à Tahiti où il espère pouvoir fuir la civilisation occidentale. Il peint soixante-dix toiles en quelques mois.
- 1893 : Édition définitive de l'« Histoire de France » de Michelet.
- 1895 : Durkheim décrit la méthode qu'il emploie pour garantir la scientificité de la discipline qu'il a créée dans « Règles de la méthode sociologique ».
- 1898 : Apollinaire commence son recueil d'« Alcools ».
- 1899 : « Au cœur des ténèbres », la longue nouvelle de Conrad, paraît en feuilleton dans la revue écossaise « Magazine ».

Histoire franco-allemande

- 1890 : Von Bismarck est contraint de démissionner. La *Realpolitik* fait place à la *Weltpolitik* dont le but est de trouver pour l'Allemagne une « place au soleil » proportionnelle à sa puissance industrielle. La politique coloniale est relancée et la construction d'une marine capable de rivaliser avec la Royal Navy érigée en priorité nationale.
- 1891 : Création de la *Ligue pangermaniste* qui aura un rapide succès et existera jusqu'en 1939. Son but est de rassembler tous les germanophones, germaniser les allogènes du Reich, récupérer les provinces perdues et s'emparer des terres « nécessaires au développement de la race allemande ».
- 1893 : L'*Alliance franco-russe*, signée fin décembre, stipule que ces pays doivent se soutenir mutuellement s'ils sont attaqués par un pays de la Triple Alliance.
- 1894 : Le capitaine Dreyfus, accusé d'espionnage au profit de l'Allemagne, est condamné à la déportation en Guyane. Plusieurs personnalités tentent en vain de démontrer son innocence. L'affaire Dreyfus éclatera réellement en 1898, avec la publication de l'article « J'accuse » de Zola. La France se déchirera alors entre dreyfusards, pour lesquels la vérité doit l'emporter quelles qu'en soient les conséquences, et antidreyfusards pour lesquels, le prestige de l'armée — instrument de la revanche — exige de ne pas revenir sur la chose jugée.
-

1900-1909

Uniformisation

- 1900 : L'uniformisation des surfaces de Riemann est l'un des *vingt-trois problèmes* mis en avant par Hilbert au *Congrès international des mathématiciens*.
- 1900 : Osgood montre que tout ouvert simplement connexe borné du plan est biholomorphe au disque unité.
- 1907 : Poincaré et Koebe démontrent simultanément le *théorème d'uniformisation*.
-

Mathématiques

- 1900 : Hilbert publie « Grundlagen der Geometrie » qui propose une *axiomatisation* complète de la géométrie.
- 1902 : Dans sa thèse, Lebesgue donne naissance à la *théorie de l'intégration*.
- 1906 : Markov introduit les *processus aléatoires* qui portent son nom et qui resteront un outil fondamental dans la théorie des probabilités.
- 1907 : La thèse de Brouwer sur les fondements des mathématiques marque le début de l'*école intuitioniste*.
-

Sciences

- 1900 : Freud publie « Die Traumdeutung » (L'Interprétation des rêves). Ida Bauer commence une cure avec lui : la psychanalyse est née !
- 1900 : Planck pose les fondements de la *mécanique quantique* dans « Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum » : son *quantum d'action* permet de rendre compte des données expérimentales sur le rayonnement du corps noir.
- 1904 : Dans « Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light », Lorentz explicite le *groupe de transformations* qui portent son nom et qui sera au cœur de la théorie de la relativité restreinte.
- 1904-1905 : Weber publie sous forme d'articles « Die protestantische Ethik und der Geist des Kapitalismus » (L'éthique protestante et l'esprit du capitalisme). L'ouvrage, centré sur les motivations des individus à agir, aura une influence considérable sur la sociologie.
- 1905 : Dans « Drei Abhandlungen zur Sexualtheorie », Freud rassemble ses hypothèses sur la place de la sexualité et son devenir dans le développement de la personnalité.
- 1905 : Quatre articles fondamentaux d'Einstein révolutionnent la physique et ouvrent une nouvelle ère. Ils concernent l'*effet photoélectrique*, le *mouvement brownien*, la *théorie de la relativité restreinte* et l'*équivalence masse-énergie*.
- 1906 : De Saussure commence son étude des principes structuraux de la *linguistique*.
-

Avancées technologiques

- 1904 : Fleming, de la société Marconi, invente la *diode à vide*.
- 1907 : Premier vrai décollage au monde d'un *hélicoptère*, un engin inventé et piloté par Cornu.
- 1907 : La *bakélite* est l'une des premières matières plastiques, développée par le chimiste Baekeland.
- 1908 : Painlevé s'envole comme passager d'un des frères Wright sur leur biplan.
- 1910 : Claude invente les *lampes au néon*.

Arts, Philosophie et Sciences Humaines

- 1901 : La pièce de Tchekhov « Les Trois Sœurs » est créée au Théâtre d'art de Moscou.
- 1902 : Le 30 avril à l'Opéra-Comique de Paris, Messager dirige « Pelléas et Mélisande », drame lyrique en cinq actes de Debussy sur un livret de Maeterlinck.
- 1904-1905 : Weber publie « L'éthique protestante et l'esprit du capitalisme ». L'ouvrage, centré sur les motivations des individus à agir, aura une influence considérable sur la sociologie.
- 1906 : Parution du roman « Die Verwirrungen des Zöglings Törless » (Les Désarrois de l'élève Törless) de Musil dont les « Travaux préliminaires pour un roman » préfigurent « Der Mann ohne Eigenschaften » (L'homme sans qualité).
- 1907 : Proust commence à écrire « À la recherche du temps perdu » dont les différents volumes seront publiés entre 1913 et 1927.
- 1908-1911 : Schoenberg invente progressivement un langage musical, la « libre atonalité », libéré des fonctions et des hiérarchies tonales. Son « Quatuor à cordes n°2 » (1908), ses « Cinq pièces pour orchestre » (1909) et ses « Six petites pièces pour piano » (1911) marquent des étapes importantes vers ce nouveau langage.
- 1909 : Picasso peint « Les Demoiselles d'Avignon ». Ce tableau est considéré comme le point de départ du *cubisme*.

Histoire franco-allemande

- 1902 : En France, les élections législatives donnent le pouvoir à une alliance de radicaux et de socialistes : c'est le *Bloc des gauches*. Le programme du gouvernement d'Émile Combes est essentiellement de lutter contre l'influence de l'Église. Il aboutira à la *loi de séparation de l'Église et de l'État* de 1905 et la nationalisation des biens de l'Église.
- 1904 : La France et le Royaume-Uni signent un traité, l'*Entente cordiale*, qui marque un rapprochement diplomatique entre les deux pays, face à la Triple Alliance. L'Entente cordiale, l'Alliance franco-russe et la *Convention anglo-russe* qui sera signée en 1907, constitueront la *Triple Entente*.
- 1905 : En Allemagne, von Schlieffen présente son plan de stratégie offensive sur les deux fronts, français et russe.
-

Bibliographie

- [Abe1826] N. H. ABEL – « Mémoire sur une propriété générale d’une classe très étendue de fonctions transcendentes », présenté à l’Académie des sciences à Paris le 30 octobre 1826. = [Abe1881], p. 145–211.
- [Abe1881] ———, *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*, Deuxième édition, Christiania [Oslo], 1881. Réimpression : Gabay, Sceaux, 1992.
- [Abi1981] W. ABIKOFF – « The uniformization theorem », *Amer. Math. Monthly* **88** (1981), p. 574–592.
- [Adl1999] A. ADLER – « Hirzebruch’s curves $F_1, F_2, F_4, F_{14}, F_{28}$ for $\mathbf{Q}(\sqrt{7})$ », in [Levy1999b], p. 221–285.
- [Ahl1953] L. V. AHLFORS – « Development of the theory of conformal mapping and Riemann surfaces through a century », in *Contributions to the theory of Riemann Surfaces*, Ann. of Math. Studies 30, Princeton Univ. Press, 1953, p. 3–13.
- [Ahl1973] ———, *Conformal invariants : topics in geometric function theory*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [Ahl2006] ———, *Lectures on quasiconformal mapping, second edition. With supplemental chapters by C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura and J. H. Hubbard*. Univ. Lecture Series 38, Amer. Math. Soc., Providence (RI), 2006.
- [AhSa1960] L.V. AHLFORS & L. SARIO – *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.
- [Ale1920] J. W. ALEXANDER – « A proof of Jordan’s theorem about a simple closed curve », *Ann. of Math.* **21** (1920), n° 3, p. 180–184.
- [Ant1921] L. ANTOINE – « Sur l’homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. Thèses présentées à la Faculté des sciences de Strasbourg », *J. Math. Pures Appl. (8^e série)* **4** (1921), p. 221–325.

- [App1925] P. APPELL – *Henri Poincaré*, Plon, Paris, 1925.
- [ApGo1929] P. APPELL & É. GOURSAT – *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. I Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann*, Deuxième édition, Gauthier-Villars, Paris, 1929. Volume II : [Fat1930].
- [Arg1806] J.-R. ARGAND – *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires par des constructions géométriques*, Veuve Blanc, Paris, 1806. Deuxième édition : Gauthier-Villars, Paris, 1874.
- [Aub1998] T. AUBIN – *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1998.
- [Bea1983] A. F. BEARDON – *The geometry of discrete groups*, Grad. Texts in Math. 91, Springer, New York, 1983.
- [Bea1984] ———, *A primer on Riemann surfaces*, London Math. Soc. Lect. Note Series 78, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [BeSt1949] H. BEHNKE & K. STEIN – « Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen », *Math. Ann.* **120** (1949), p. 430–461.
- [Berg1971] M. S. BERGER – « Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds », *J. Differential Geometry* **5** (1971), p. 325–332.
- [Ber1976] L. BERS – « On Hilbert's 22nd problem », in *Mathematical developments arising from Hilbert problems (Symposium of the Amer. Math. Soc., De Kalb, 1974)*, Proc. Sympos. Pure. Math., Vol. XXVIII, Amer. Math. Soc., Providence (RI), 1976.
- [Bert1882] E. BERTINI – « Sui sistemi lineari », *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A Istituto (II)* **15** (1882), p. 24–28.
- [Bie1921] L. BIEBERBACH – « Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen », *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, vol. 2 partie 3, 2^e moitié, Teubner, Berlin, 1921, p. 379–532.
- [Bol1909] O. BOLZA – *Lectures on the Calculus of Variations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1909.
- [BoOt1988] F. BONAHOON & J.-P. OTAL – « Variétés hyperboliques à géodésiques arbitrairement courtes », *Bull. London Math. Soc.* **20** (1988), n° 3, p. 255–261.
- [Bos1992] J.-B. BOST – « Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and Abelian varieties », *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, Berlin, 1992, p. 64–211.
- [Bre1939] M. BRELOT – « Familles de Perron et problème de Dirichlet », *Acta Sci. Math. (Szeged)* **IX** (1939), p. 133–153.

- [BrKn1981] E. BRIESKORN & H. KNÖRRER – *Ebene Algebraische Kurven*, Birkhäuser, Bâle, 1981. Traduction anglaise : *Plane algebraic curves*, *ibid.*, 1986.
- [BrNo1874] A. BRILL & M. NÖTHER – « Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie », *Math. Ann.* **7** (1874), p. 269–316.
- [BrNo1894] A. BRILL & M. NOETHER – « Die Entwicklung der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit », *Jahresber. Deutschen Math.-Vereinigung* **3** (1894), p. 107–566.
- [BrBo1859] C. BRIOT & J.C. BOUQUET – *Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*, Mallet-Bachelier, Paris, 1859.
- [Bro1912] L. E. J. BROUWER – « Beweis der Invarianz des n -dimensionale Gebiets », *Math. Ann.* **71** (1912), p. 305–313.
- [Bué1806] A.-Q. BUÉE – « Mémoire sur les quantités imaginaires », *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **96** (1806), p. 23–88.
- [Car1906] C. CARATHEODORY – « Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen », *Math. Ann.* **62** (1906), p. 449–503.
- [Car1912] ———, « Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten », *Math. Ann.* **72** (1912), p. 107–144.
- [Car1913a] ———, « Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1913), p. 509–518.
- [Car1913b] ———, « Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis », *Math. Ann.* **73** (1913), p. 305–320.
- [Car1913c] ———, « Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete », *Math. Ann.* **73** (1913), p. 323–370.
- [Car1914a] ——— (éd.), *H.A. Schwarz-Festschrift. Mathematische Abhandlungen, Herrmann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern*, Springer, Berlin, 1914.
- [Car1914b] ———, « Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen », in [Car1914a], p. 19–40.
- [Car1932] ———, *Conformal Representation*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics Nr. 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932. Seconde édition 1952, réimprimée par Dover, Minaola, 1998.
- [Cat2004] F. CATANESE – « From Abel's Heritage : Transcendental Objects in Algebraic Geometry and Their Algebraization », in [LaPi2004], p. 349–394.

- [Cha1837] M. CHASLES – *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie : particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne*, suivi d'un *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie*, Hayez, Bruxelles, 1837.
- [CLT2006] X. CHEN, P. LU & G. TIAN – « A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow » *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), n° 11, p. 3391–3393.
- [Che1951] C. CHEVALLEY – *Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable*, Mathematical Surveys VI, Amer. Math. Soc., New York, 1951.
- [Cho2007] R. CHORLAY – *L'émergence du couple local-global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux*, Thèse d'histoire des sciences, Univ. Paris 7, 2007. Disponible à l'adresse <http://www.rehseis.cnrs.fr/spip/php?article35#these>.
- [Chr1867] E. B. CHRISTOFFEL – « Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie (trad. D. Formenti), *Ann. Mat. Pura Appl.* **1** (1867), p. 89–103. *Gesammelte Abhandlungen*, Teubner, Leipzig, 1910.
- [Cle1865a] A. CLEBSCH – « Über diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind », *J. Reine Angew. Math.* **64** (1865), p. 43–65.
- [Cle1865b] ———, « Ueber diejenigen curven, deren coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen », *J. Reine Angew. Math.* **64** (1865), p. 210–270.
- [Clif1877] W. K. CLIFFORD – « On the canonical form and dissection of a Riemann's surface », *Proc. of the London Math. Society* **VIII** n° 122, (1877), p. 292–304. = [Clif1882, p. 241–255].
- [Clif1882] ———, *Mathematical papers*, Macmillan, London, 1882. Réimprimé par Chelsea, New York, 1968.
- [Coh1967] H. COHN – *Conformal mapping on Riemann surfaces*, McGraw-Hill, New York, 1967. Réimprimé par Dover, New York, 1980.
- [Cra1750] G. CRAMER – *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Frères Cramer et Cl. Philibert, Genève, 1750.
- [CuSh1983] M. CULLER & P. SHALEN – « Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds », *Ann. of Math.* **117** (1983), p. 109–146.
- [Dal2007] F. DAL'BO – *Trajectoires géodésiques et horocycliques*, EDP Sciences & CNRS éditions, Paris, 2007.
- [Ded1877] R. DEDEKIND – « Über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen », *J. Reine Angew. Math.* **83** (1877), p. 265–292.

- [DeHe1907] M. DEHN & P. HEEGAARD – « Analysis Situs », *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* [vol. 3 partie 1, 1^{re} moitié], 1907, p. 153–250.
- [Desa1639] G. DESARGUES – *Brouillon-project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan*, Paris, 1639. *Ceuvres de Desargues*, Leiber, Paris, 1861, p. 103–181.
- [Desc1637] R. DESCARTES – *La Géométrie*, appendice au *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison...*, Joannes Maire, Leyde, 1637. Réimpression : Gabay, Sceaux, 1991.
- [Die1974] J. DIEUDONNÉ – *Cours de géométrie algébrique. 1 Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique*, Presses Univ. France, Paris, 1974.
- [Die1978] ——— (éd.), *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Hermann, Paris, 1978.
- [Die1982] ———, « La découverte des fonctions fuchsiennes », *Actes du sixième congrès des mathématiciens d'expression latine*, Gauthier-Villars, Paris, 1982, p. 3–23.
- [Die1989] ———, *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*, Birkhäuser, Boston, 1989.
- [DoTi1978] M. DOSTAL & R. TINDELL – « The Jordan curve theorem revisited », *Jahresber. Deutschen Math.-Vereinigung* **80** (1978), p. 11–128.
- [DoDo1977] R. & A. DOUADY – *Algèbre et théories galoisiennes*, CEDIC, Paris, 1977. Nouvelle édition augmentée, Cassini, Paris, 2005.
- [DrTr2002] T. A. DRISCOLL & L. N. TREFETHEN – *Schwarz-Christoffel mapping*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [Dyc1888] W. DYCK – « Beiträge zur Analysis Situs », *Math. Ann.* **32** (1888), p. 457–512.
- [Elk1998] N. ELKIES – « Shimura curve computations », *Proceedings of the 3rd Algorithmic Number Theory Symposium*, Lect. Notes in Comput. Sci. **1423** (1998), p. 1–47.
- [Elk1999] ———, « The Klein quartic in number theory », in [Levy1999b], p. 51–101.
- [Eul1777] L. EULER – « De repraesentatione superficiei sphaericae super plano / De projectione geographica superficiei sphaericae / De projectione geographica De Lislana in mappa generali imperii russi usitata », *Acta Acad. Sci. Imper. Petropol.* 1777. Traduction allemande : « Drei Abhandlungen über Kartenprojection », Engelmann, Leipzig, 1898.

- [FaKr1980] H. M. FARKAS, I. KRA – *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics 71, Springer, New York, 1980.
- [Fat1930] P. FATOU – *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. II Fonctions automorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1930. Volume I : [ApGo1929].
- [Fer1636] P. DE FERMAT – « Isagoge ad locos planos et solidos », 1636. *Ceuvres de Fermat*, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1891, p. 91–102.
- [Ford1929] L. A. FORD – *Automorphic functions*, McGraw-Hill, New York, 1929.
- [Forst1977] O. FORSTER – *Riemannsche Flächen*, Springer, Berlin, 1977. Traduction anglaise : *Lectures on Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math. 81, Springer, New York, 1981.
- [Forsy1902] A. R. FORSYTH – *Theory of differential equations, part III, ordinary linear equations, Vol. IV*, Cambridge Univ. Press, 1902.
- [Freu1955] H. FREUDENTHAL – « Poincaré et les fonctions automorphes », in *Le livre du centenaire de la naissance de Henri Poincaré*, Gauthier-Villars, Paris 1955, p. 212–219. Aussi dans [Poin1951], t. XI.
- [Fric1901] R. FRICKE – « Automorphe Funktionen und Modulfunktionen », *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften [vol. 2 partie 2, 2^e moitié]*, Teubner, Leipzig, 1901, p. 349–470.
- [FrKl1897] R. FRICKE & F. KLEIN – *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, deux tomes (le second en 3 parties), Teubner, Leipzig, 1897 à 1912.
- [Fub1906] ———, « Sul principio di Dirichlet (Da una lettera al Prof. Beppo Levi) », *Rend. mat. Palermo* **22** (1906), p. 383–386.
- [Fub1907a] G. FUBINI – « Il problema di Dirichlet considerato come limite di un ordinario problema di minimo », *Rom. Acc. L. Rend.* (5) **16**₁, 162-167 (1907).
- [Fub1907b] ———, « Il principio di minimo », *Rend. mat. Palermo* **23** (1907), p. 300–301.
- [Fub1907c] ———, « Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari », *Rend. mat. Palermo* **23** (1907), p. 53–84.
- [Fub1907d] ———, « Nuove applicazioni del principio di minimo », *Annali di Mat.* **14** (1907), p. 113-141.
- [Fuc1866] L. FUCHS – « Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coeffizienten », *J. Reine Angew. Math* **66** (1866), p. 121–160.

- [Fuc1880] ———, « Über die Functionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1880), p. 445–453.
- [Fuc1881] ———, « Auszug aus einem Schreiben des Herrn L. Fuchs an C.W. Borchardt », *J. Reine Angew. Math.* **90** (1881), p. 71–73.
- [Gard1979] L. GÄRDING – « The Dirichlet problem », *Math. Intelligencer* **2** (1979/80), p. 43–53.
- [Gars1961] A. M. GARSIA – « An imbedding of closed Riemann surfaces in Euclidean space », *Comment. Math. Hel.* **35** (1961), p. 93–110.
- [Gars1962] ———, « On the conformal types of algebraic surfaces of euclidean space », *Comment. Math. Hel.* **36** (1962), p. 49–60.
- [Gau1825] C. F. GAUSS – « Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche so auszubilden », in *Astronomische Abhandlungen [tome 3]*, éd. par H.C. Schumacher, Altona, 1825. = [Gau1863], vol. 4, p. 189–216. Traduit dans : « Solution générale de ce problème : représenter les parties d'une surface donnée sur une autre surface donnée », Hermann, Paris, 1915.
- [Gau1831] ———, « Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda ». *Göttingische gelehrte anzeigen* **8** (1831). = [Gau1863], t. 4, p. 169–178.
- [Gau1845] ———, « Untersuchungen über der höhere Geodäsie. Erste Abhandlung », *Abhand. Kön. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Kl.* **2** (1845), p. 3–45. = [Gau1863], t. 4, p. 259–300.
- [Gau1863] ———, *Werke*, 9 volumes, Universität-Druckerei, Göttingen, 1863-1906.
- [Glu2008] A. GLUTSYUK – « Simple proofs of uniformization theorem », in *Holomorphic Dynamics and Renormalization*, Field Instit. Com., **53**, Amer. Math. Soc., Providence, 2008, p. 125–143.
- [GolM1971] M. E. GOLDMAN – « An algebraic classification of noncompact 2-surfaces », *Trans. Amer. Math. Soc.* **156**, 1971, p. 241–258.
- [GolW1987] W. M. GOLDMAN – « Projective structures with Fuchsian holonomy », *J. Diff. Geom.* **25** (1987), p. 297–326.
- [GolW1988] ———, « Topological components of spaces of representations », *Invent. Math.* **93** (1988), p. 557–607.
- [Got1890] – *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **36** (1890).
- [Gra1986] J. GRAY – *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*, Birkhäuser, Boston, 1986. Seconde édition, 2000.

- [Gra1994] ———, « On the history of the Riemann mapping theorem, », *Rend. Mat. Circ. Palermo ser. II* **34** (1994), p. 47–94.
- [Gra1998] ———, « The Riemann-Roch theorem and geometry, 1854–1914 », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Berlin, 1998)*. Doc. Math. 1998, Extra Vol. III, 1998, Documenta Mathematica, Bielefeld, p. 811–822.
- [Gre1828] G. GREEN – *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, Nottingham, 1828. *Mathematical papers of the late George Green*, Macmillan, Londres, 1871, p. 1–82.
- [Gri1971] P. GRIFFITHS – « Complex-analytic properties of certain Zariski open sets on algebraic varieties », *Ann. of Math* **94** (1971), p. 21–51.
- [GrHa1978] P. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
- [Gun1967] R.C. GUNNING – « Special coordinate coverings of Riemann surfaces », *Math. Ann.* **170** (1967), p. 67–86.
- [Gun1972] ———, *Lectures on Riemann surfaces, Jacobi varieties*, Math. Notes 12, Princeton Univ. Press, 1972.
- [Had1906] J. HADAMARD – « Sur le principe de Dirichlet », *Bull. Soc. Math. France* **34** (1906), p. 135–138.
- [Had1999] ———, *Non-Euclidean geometry in the theory of automorphic functions*, Amer. Math. Soc., Providence (RI), 1999. Traduction d'une édition russe de 1951 d'un original français perdu des années 1920, avec une introduction historique de J. Gray.
- [HaPo1993] J. HADAMARD & H. POINCARÉ – *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique [Hadamard]. L'invention mathématique [Poincaré]*. Réimpression de la traduction de 1975 de l'essai de Hadamard et du texte de 1908 de Poincaré, Gabay, Sceaux, 1993.
- [Han1979] W. HANSEN – « The Dirichlet problem » *Equadiff IV. Proc. Czechoslovak Conf. Differential Equations and their Applications, Prague, (1977)*, Lecture Notes in Math. 703, Springer, Berlin, 1979.
- [HaMo1998] J. HARRIS & I. MORRISON – *Moduli of curves*, Grad. Texts in Math. 187, Springer, New York, 1998.
- [Hat2002] A. HATCHER – *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [Haw2000] T. HAWKINS – *Emergence of the theory of Lie groups, An essay in the History of Mathematics, 1869-1926*, Springer, 2000.

- [Hei1949] M. HEINS – « The conformal mapping of simply-connected Riemann surfaces », *Ann. of Math.* **50** (1949), p. 686–690.
- [HeLa1902] K. HENSEL & G. LANDSBERG – *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*, Teubner, Leipzig, 1902. Réimpression Chelsea, New York, 1965.
- [Her1858] C. HERMITE – « Sur la résolution de l'équation du cinquième degré », *C. R. Acad. Sci. Paris* **46** (1858), p. 508–515.
- [Hil1899] D. HILBERT – « Über das Dirichlet'schen Prinzip », *Jahresber. Deutschen Math.-Vereinigung* **8** (1899), p. 184–188.
- [Hil1900a] ———, « Über das Dirichletsche Prinzip », *Deutsche Math. Ver.* **81** (1900), p. 184–188. Traduit par L. Laugel : « Sur le principe de Dirichlet », *Nouv. Ann. (3e série)* **19** (1900), p. 337–544. Repris dans [Hil1905].
- [Hil1900b] ———, « Sur les problèmes futurs des mathématiques », Gauthier-Villars, Paris, 1902. Réédition Gabay, Sceaux, 1990.
- [Hil1904] ———, « Über das Dirichletsche Prinzip », *Math. Ann.* **59** (1904), p. 161–186.
- [Hil1905] ———, « Über das Dirichletsche Prinzip », *J. Reine Angew. Math.* **129** (1905), p. 63–67. Repris de [Hil1900a], avec des commentaires sur les travaux intermédiaires.
- [Hil1909] ———, « Zur Theorie der konformen Abbildung », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1909), p. 314–323.
- [HiCo1932] D. HILBERT & S. COHN-VOSSEN – *Anschauliche Geometrie*, Springer, Berlin, 1932. Traduction anglaise : *Geometry and the imagination*, Chelsea, New York, 1952. Réimpression, Amer. Math. Soc., Providence (RI), 1998.
- [Hil1976] E. HILLE – *Ordinary differential equations in the complex domain*, Wiley, New York, 1976. Réimpression Dover, Mineola (NY), 1997.
- [Hit1987] N. HITCHIN – « The self-duality equations on a Riemann surface », *Proc. London Math. Soc. (3)* **55** (1987), p. 59–126.
- [Hod1941] W. V. D. HODGE – *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*, Cambridge Univ. Press, 1941.
- [Hor1972] R. D. HOROWITZ – « Characters of free groups represented in the two-dimensional special linear group », *Comm. Pure Appl. Math.* **25** (1972), p. 635–649.
- [Hou1978] C. HOUZEL – *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*, in [Die1978], p. 1–113.

- [Hou2002] ———, *La géométrie algébrique – recherches historiques*, Blanchard, Paris, 2002.
- [Hub1981] J. HUBBARD – « The monodromy of projective structures », *Riemann surfaces and related topics. Proceedings of the 1978 Stony Brook conference*, Ann. of Math. Studies 97, Princeton Univ. Press, 1981, p. 257-275.
- [Hub2006] ———, *Teichmüller theory, vol. 1*, Matrix Editions, Ithaca NY, 2006.
- [HuTr1992] D. HULIN & M. TROYANOV – « Prescribing curvature on open surfaces », *Math. Ann.* **293** (1992), p. 277–315.
- [Iha1974] Y. IHARA – « Schwarzian equations », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **21** (1974), p. 97–118.
- [ImTa1992] Y. IMAYOSHI & M. TANIGUCHI – *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer, Tokyo, 1992.
- [Inc1944] E. L. INCE – *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1944.
- [IKSY1991] K. IWASAKI, H. KIMURA, S. SHIMOMURA & M. YOSHIDA – *From Gauss to Painlevé. A modern theory of special functions*, Aspects of Mathematics, Vieweg, Braunschweig 1991.
- [Jac1828] C. G. JACOBI – « Suite des notices sur les fonctions elliptiques », *J. Reine Angew. Math.* **3** (1828), p. 303–310 ; in [Jac1969], vol. I, p. 255–263.
- [Jac1969] ———, *Gesammelte Werke*, Chelsea, New York, 1969.
- [Joh1906a] S. JOHANSSON – « Ein Satz über die konforme Abbildung einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen auf den Einheitskreis. », *Math. Ann.* **62** (1906), p. 177–183.
- [Joh1906b] ———, « Beweis der Existenz linear-polymorpher Funktionen vom Grenzkreistypus auf Riemannschen Flächen », *Math. Ann.* **62** (1906), p. 184–193.
- [Jon1971] B.F. JONES – *Rudiments on Riemann surfaces*, Lectures Notes in Mathematics, **2**, Rice University, Houston, Texas, 1971.
- [Jor1866] C. JORDAN – « Sur la déformation des surfaces », *J. Math. Pures Appl. (2^e série)* **11** (1866), p. 105–109.
- [Jor1872] ———, « Sur les lignes de faite et de thalweg », *C. R. Acad. Sci. Paris* **74** (1872), p. 1457–1459, et **75** (1872), p. 625–627 et 1023–1025.
- [Jor1887] ———, *Cours d'analyse de l'École polytechnique. Tome III, Calcul intégral*, Gauthier-Villars, Paris, 1887.

- [Jos2002] J. JOST – *Compact Riemann surfaces, An introduction to Contemporary mathematics, Second edition*, Springer, New York, 2002.
- [Kap2001] M. KAPOVICH – *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Progr. in Math. 183, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [Kas1913] E. KASNER – « Conformal geometry », in *Proceedings of the fifth international congress of mathematicians (Cambridge 1912), vol 2.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1913, p. 81–87.
- [Kat1992] S. KATOK – *Fuchsian Groups*, The Univ. of Chicago Press, 1992.
- [KaWa1974] J. L. KAZDAN & F. W. WARNER – « Curvature functions for compact 2-manifolds », *Ann. of Math.* **99** (1974), p. 14–47.
- [Ker1923] B. KERÉKJÁRTÓ – *Vorlesungen über Topologie*, Springer, Berlin, 1923.
- [Kleim2004] S. L. KLEIMAN – « What is Abel's theorem anyway? », in [LaPi2004], p. 395–440.
- [Kle1875] F. KLEIN – « Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst », *Math. Ann.* **9** (1875), p. 183–208. = [Kle1921a], vol. II, p. 275–301.
- [Kle1877a] ———, « Über lineare Differentialgleichungen », *Math. Ann.* **12** (1877), p. 167–179. = [Kle1921a], t. II, p. 307–320.
- [Kle1877b] ———, « Weitere Untersuchungen über des Ikosaeder », *Math. Ann.* **12** (1877), p. 503–560. = [Kle1921a], t. II, p. 321–384.
- [Kle1878a] ———, « Über die Erniedrigung der Modulargleichungen », *Math. Ann.* **14** (1878), p. 417–427. = [Kle1921a], t. III, p. 76–89.
- [Kle1878b] ———, « Über die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades », *Math. Ann.* **14** (1878), p. 111–172. = [Kle1921a], t. III, p. 13–75.
- [Kle1878c] ———, « Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen », *Math. Ann.* **14** (1878), p. 428–471. = [Kle1921a], t. III, p. 90–135. Traduction anglaise : « On the Order-Seven Transformations of Elliptic Functions », in [Levy1999b], p. 287–331.
- [Kle1879a] ———, « Über Multiplcatorgleichungen », *Math. Ann.* **15** (1879), p. 86–88. = [Kle1921a], t. III, p. 137–139.
- [Kle1879b] ———, « Über die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen », *Math. Ann.* **15** (1879), p. 533–555. = [Kle1921a], t. III, p. 140–165.
- [Kle1880a] ———, « Zur Theorie der elliptischen Modulfuctionen », *Math. Ann.* **17** (1880), p. 62–70. = [Kle1921a], t. III, p. 169–178.

- [Kle1880b] ———, « Über gewisse Teilwerte der Θ -Function », *Math. Ann.* **17** (1880), p. 565–574. = [Kle1921a], t. III, p. 186–197.
- [Kle1881] ———, « Über die conforme Abbildung von Flächen », *Math. Ann.* **19** (1881), p. 159–160.
- [Kle1882a] ———, « Über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich », *Math. Ann.* **19** (1882), p. 565–569. = [Kle1921a], t. III, p. 622–626.
- [Kle1882b] ———, « Über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich », *Math. Ann.* **20** (1882), p. 49–51. = [Kle1921a], t. III, p. 627–629.
- [Kle1882c] ———, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig, 1882. Traduction anglaise (édition révisée) : *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals*, Dover, Mineola (NY), 2003.
- [Kle1882d] ———, « Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie », *Math. Ann.* **21**, (1882) p. 141–218. = [Kle1921a], t. III, p. 630–710.
- [Kle1884] ———, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Teubner, Leipzig, 1884. Traduction anglaise (édition révisée) : *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, Dover, Mineola (NY), 2003.
- [Kle1921a] ———, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 3 volumes, Springer, Berlin, 1921–1923.
- [Kle1921b] ———, *Zur Vorgeschichte der automorphen Functionen*, [Kle1921a], t. III, p. 577–586.
- [Kle1925] ———, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus : II*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1925. Traduit en anglais : *Elementary mathematics from an advanced standpoint*. Geometry, Dover, Mineola, 2004.
- [Kle1928] ———, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer, Berlin, 1928. Réimpression, Chelsea, New York, 1979. Traduit en anglais : *Lectures on the development of mathematics in the 19th century*, Math. Sci Press, Brookline (Mass.), 1979.
- [KlePoi1923] F. KLEIN, H. POINCARÉ – « La correspondance d'Henri Poincaré et de Félix Klein », *Acta Math.* **39** (1923), p. 94–132. = [Poi1951], t. XI, p. 26–65.
- [Koe1907a] P. KOEBE – « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1907), p. 191–210.
- [Koe1907b] ———, « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven (zweite Mitteilung) », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1907), p. 633–649.

- [Koe1908a] ———, « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven (dritte Mitteilung) », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1908), p. 337–358.
- [Koe1908b] ———, « Konforme Abbildung der Oberfläche einer von endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten körperlichen Ecke », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1908), p. 359–360.
- [Koe1909a] ———, « Sur un principe général d'uniformisation », *C.R. Acad. Sci. Paris* **148** (1909), p. 824–828.
- [Koe1909b] ———, « Fonction potentielle et fonction analytique ayant un domaine d'existence donné à un nombre quelconque (fini ou infini) de feuillettes », *C.R. Acad. Sci. Paris* **148** (1909), p. 1446–1448.
- [Koe1909c] ———, « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven (vierte Mitteilung) », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1909), p. 324–361.
- [Koe1909d] ———, « Über ein allgemeines Uniformisierungsprinzip », *Atti del IV congresso internazionale dei matematici (Roma 1908)* (1909), p. 25–30.
- [Koe1909e] ———, « Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven I », *Math. Ann.* **67** (1909), p. 145–224.
- [Koe1910a] ———, « Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II », *Math. Ann.* **69** (1910), p. 1–81.
- [Koe1910b] ———, « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Erster Teil : Das allgemeine Uniformisierungsprinzip », *J. Reine Angew. Math.* **136** (1910), p. 192–253.
- [Koe1910c] ———, « Über die Hilbertische Uniformisierungsmethode », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1910), p. 59–74.
- [Koe1911] ———, « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer kurven. Zweiter Teil : Die zentralen Uniformisierungsprobleme », *J. Reine Angew. Math.* **139** (1911), p. 251–292.
- [Koe1912] ———, « Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven III. (Erster Beweis der allgemeinen Kleinschen Fundamentaltheoreme) », *Math. Ann.* **72** (1912), p. 437–516.
- [Koe1913a] ———, « Ränderzuordnung bei konformer Abbildung », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1913), p. 286–288.
- [Koe1913b] ———, « Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie », *Annali di Mat.* **21** (1913), n° 1, p. 57–68.
- [Koe1914] ———, « Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven IV. Zweiter Existenzbeweis der allgemeinen kanonischen uniformisierenden Variablen : Kontinuitätsmethode », *Math. Ann.* **75** (1914), p. 42–129.

- [Koe1915] ———, « Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung : I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung », *J. Reine Angew. Math.* **145** (1915), p. 177–225.
- [Kor1914] A. KORN – « Zwei Anwendungen der Methode der sukzessive Annäherungen », in [Car1914a], p. 215–229.
- [Kram1996] D. KRAMMER – « An example of an arithmetic Fuchsian group », *J. Reine Angew. Math.* **473** (1996), p. 69–85.
- [Kran2006] S. G. KRANTZ – *Geometric function theory. Explorations in complex analysis*, Birkhäuser, Boston, 2006.
- [Lag1779] J.-L. LAGRANGE – « Sur la constructions des cartes géographiques », *Nouveau Mémoire de l'Académie de Berlin* (1779), p. 161–210. *Oeuvres*, Gauthier-Villars, Paris, 1867-1892, t. 4, p. 637–692.
- [Lam1772] J. H. LAMBERT – « Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten », *Beyträge zum gebrauchte der Mathematik und deren Anwendung [t. 3]*, Buchhandlung der Realschule, Berlin, 1772, 6^e article. Rééd. par A. Wangerin, W. Engelmann, Leipzig, 1894.
- [Lan2002] S. LANG – *Algebra. Revised third edition*, Grad. Texts in Math. 211, Springer, New York, 2002.
- [LaPi2004] O. A. LAUDAL & R. PIENE – *The legacy of Niels Hendrik Abel. Papers from the bicentennial conference at the University of Oslo, June 3-8 2002*, Springer, New York, 2004.
- [Leb1907a] H. LEBESGUE – « Sur le problème de Dirichlet », *C.R. Acad. Sci. Paris* **144** (1907), p. 316–318 et 622–623.
- [Leb1907b] H. LEBESGUE – « Sur le problème de Dirichlet », *Rend. mat. Palermo* **24** (1907), p. 371–402.
- [LeJa1875] A.-M. LEGENDRE & C. G. JACOBI – « Correspondance », *J. Reine Angew. Math.* **80** (1875), p. 205–279. = [Jac1969], vol. 1, p. 390–461.
- [Levi1906a] B. LEVI – « Sul principio di Dirichlet », *Rend. mat. Palermo* **22** (1906), p. 293–360.
- [Levi1906b] ———, « Sul principio di Dirichlet (Da una lettera al Prof. Guido Fubini) », *Rend. mat. Palermo* **22** (1906), p. 387–394.
- [Levy1999a] S. LEVY – « On the Order-Seven Transformations of Elliptic Functions, traduction de [Kle1878c] », in [Levy1999b].
- [Levy1999b] ——— (éd), *The eightfold way. The beauty of Klein's quartic curve*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 35, Cambridge Univ. Press, 1999. Chapitres téléchargeables à l'adresse : <http://www.msri.org/communications/books/Book35/index.html>.

- [Lic1916] L. LICHTENSTEIN – « Zur Theorie der konformen Abbildungen. Konforme Abbildung nichtanalytischer, singularitätenfreier Flächenstücke auf ebenen Gebiete », *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie A* (1916), p. 192–217.
- [Lic1921] ———, « Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildungen », *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften (vol. 2, partie 3, 1^e moitié)*, Teubner, Berlin (1921), p. 1–377.
- [Lin1920] E. LINDELÖF – « Sur la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur l'aire d'un cercle », *Quatrième congrès des math. scand. (Stockholm 1916)*, Almqvist & Wiksells, Uppsala, 1920, p. 59–90.
- [Lis1847] J. B. LISTING – « Vorstudien zur Topologie », *Göttinger Studien* (1847), p. 811–875.
- [Lis1861] ———, « Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerungen des Eulerschen Satzes von den Polyedern », *Abhandlungen der Math. Classe der Königl. Ges. der Wiss. Gött.* **10** (1861), p. 97–182.
- [Loe1988] F. LOESER – « Déformations de courbes planes (d'après Severi et Harris) », *Séminaire Bourbaki, vol. 1986/87*, Astérisque **152-153** (1988), p. 187–205.
- [MaRe2003] C. MACLACHLAN & A. W. REID *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, Grad. Texts in Math. 219, Springer, New York, 2003.
- [Mar1996] A. I. MARKUSHEVICH – « Analytic function theory », *Mathematics of the 19th century. Geometry, analytic function theory*, éd. par A. N. Kolmogorov et A. P. Yushkevich, Birkhäuser, Bâle, 1996. Traduit du russe 1981.
- [Mas1971] B. MASKIT – « On Poincaré's theorem for fundamental polygons », *Adv. in Math.* **7** (1971), p. 219–230.
- [Mas1988] ———, *Kleinian groups*, Grund. Math. Wiss. 287, Springer, New York, 1988.
- [Max1870] J. C. MAXWELL – « On Hills and Dales », *Philos. Mag. Series* **40** (1870), p. 421–427. In *Scientific papers (t. 2)*, Cambridge Univ. Press, 1890, p. 233–240.
- [McKMo1997] H. MCKEAN & V. MOLL – *Elliptic curves. Function theory, geometry, arithmetic*, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [Mil1965] J. MILNOR – *Topology from the differentiable viewpoint*, The Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [MiPo1999] *Correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler*, éditée par P. Nabonnand. Publications des Archives Henri-Poincaré, Birkhäuser, Bâle, 1999.

- [Möb1861] A. F. MÖBIUS – « Zur Theorie der Polyëder und der Elementarverwandtschaft », manuscrit. Publié dans [Möb1886], p. 519–559.
- [Möb1863] ———, « Theorie der elementaren Verwandtschaft, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl.* **15** (1863), p. 18–57. = [Möb1886], p. 473–512.
- [Möb1865] ———, « Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders », *Ber. Verh. Kön. Sächs. Ges. Wiss., Math.-phys. Klasse* **17**, p. 31–68. In [Möb1886], p. 433–471.
- [Möb1886] ———, *Gesammelte Werke (t. 2)*, S. Hirzel, Leipzig, 1886.
- [Moc1999] S. MOCHIZUKI – *Foundations of p -adic Teichmüller theory*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 11, Amer. Math. Soc., Providence (RI), 1999.
- [Mon1907] P. MONTEL – « Sur les suites infinies de fonctions », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **24** (1907), p. 233–334.
- [Mum1975] D. MUMFORD – *Curves and their Jacobians*, The Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [Mum1983] ———, *Tata lectures on theta I*, Progr. in Mathematics 28, Birkhäuser, Bâle, 1983.
- [Mum1999] ———, *The red book of varieties and schemes*, seconde édition. Contient [Mum1975]. Lecture Notes in Mathematics, 1358. Springer, Berlin, 1999.
- [Neh1952] Z. NEHARI – *Conformal mapping*, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [Neue1981] E. NEUENSCHWANDER – « Studies in the history of complex function theory. II Interactions among the French school, Riemann, and Weierstrass », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **5** (1981), p. 87–105.
- [Neum1865] C. NEUMANN – *Vorlesungen über Riemann's Theorie der abelschen Integrale*, Teubner, Leipzig, 1865.
- [Neum1870] ———, « Zur Theorie des Potentials », *Math. Ann.* **2** (1870), p. 514.
- [Neum1877] ———, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, Teubner, Leipzig, 1877.
- [Neum1884] ———, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der abelschen Integrale* (seconde édition), Teubner, Leipzig, 1884.
- [Nev1953] R. NEVANLINNA – *Uniformisierung*, Grund. Math. Wiss. LXIV. Springer, 1953.

- [New1671] I. NEWTON – *De methodis fluxionum et serierum infinitorum...*, 1671, non publié du vivant de Newton (aussi appelé *Artis analytica specimina sive Geometria analytica*). Traduction anglaise dans *The mathematical work of Isaac Newton, vol. III : 1670–1673*, Cambridge Univ. Press, 1969.
- [New1704] ———, « Enumeratio linearum tertii ordinis », appendice de *Opticks or a Treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light*, Smith et Walford, Londres, 1704. Traduction anglaise (de 1710) dans *The mathematical work of Isaac Newton, vol. I*, Johnson Reprint Corp., New York, 1969.
- [Noe1873] M. NOETHER – « Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen », *Math. Ann.* **3** (1873), p. 161–227.
- [OsgB1998] B. OSGOOD – « Old and new on the Schwarz derivative », in *Quasiconformal mappings and analysis (Ann Arbor, 1995)*, Springer, New York, 1998, p. 275–308.
- [OsgW1898] W. OSGOOD – « Selected topics in the general theory of functions », *American M. S. Bull.* (2) **5** (1898), p. 59–87.
- [OsgW1900] W. OSGOOD – « On the existence of the Green's function for the most general simply connected plane region », *Trans. Amer. Math. Soc.* **1** (1900), p. 310–314.
- [OsgW1901] ———, « Analytische Funktionen komplexe Grössen, in *Encyklopädie des mathematischen Wissenschaften*, vol. II partie 2 (1901) p. 1–114.
- [OsgW1902] ———, « On the transformation of the boundary in the case of conformal mapping », *Bull. Amer. Math. Soc.* **9** (1902) p. 233–235.
- [OsTa1913] W. OSGOOD & E. TAYLOR – « Conformal transformations on the boundaries of their regions of definition », *Trans. Amer. Math. Soc.* **14** (1913), p. 277–298.
- [OvTa2005] V. OVSIENKO & S. TABACHNIKOV – *Projective geometry, old and new. From the Schwarzian derivative to the cohomology of diffeomorphism groups*, Cambridge Univ. Press, 2005.
- [OvTa2009] ———, « What is...the Schwarzian derivative? », *Notices Amer. Math. Soc.* **56** (2009), p. 2–4.
- [PaSe2004] I. PAN & M. SEBASTIANI – *Les équations différentielles algébriques et les singularités mobiles*, Ensaios Matemáticos, vol. 8, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2004.
- [Per1923] O. PERRON – « Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$ », *Math. Zeit.* **18** (1923), p. 42–54.

- [Pfe1917] G. PFEIFER – « On the conformal mapping of curvilinear angles. The fundamental equation $\varphi(f(x)) = a\varphi(x)$ », *Trans. Amer. Math. Soc.* **18** (1917), p. 185–198.
- [Pic1890] É. PICARD – « Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives », *J. Math. Pures Appl. (4^e série)* **6** (1890), p. 145–210. = [Pic1979], p. 384–450.
- [Pic1893a] ———, « De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée », *J. Math. Pures Appl. (4^e série)* **9** (1893), p. 273–292. = [Pic1979], p. 525–543.
- [Pic1893b] ———, « Sur l'équation $\Delta u = e^u$ », *C.R. Ac. Sci. Paris* **116** (1893), p. 1015–1017. = [Pic1979], p. 521–523.
- [Pic1893c] ———, « Sur une équation aux dérivées partielles », *C.R. Ac. Sci.* **116** (1893), p. 454–456. = [Pic1979], p. 517–519.
- [Pic1893d] ———, *Traité d'analyse, t. II*, Gauthier-Villars, Paris, 1893. Réimpression : Gabay, Sceaux, 1991.
- [Pic1898] ———, « De l'équation $\Delta u = e^u$ », *J. de Math. Pures et Appl. (5^e série)* **4** (1898), p. 313–316. = [Pic1979], p. 601–604.
- [Pic1900] ———, « De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de Riemann fermée », *Bull. Sci. Math.* **24** (1900), p. 196–210. = *J. Reine Angew. Math* **130** (1905), p. 243–258. = [Pic1979], p. 649–664.
- [Pic1931] ———, *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [Pic1979] ———, *Œuvres*, vol. II, CNRS, Paris, 1979.
- [Plü1831] J. PLÜCKER – *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, vol. 2, Baedeker, Essen, 1831.
- [Poin1881a] H. POINCARÉ – « Sur les fonctions abéliennes », *C.R. Acad. Sci. Paris* **92** (1881), p. 958–959. = [Poin1951], t. IV, p. 299–301.
- [Poin1881b] ———, « Sur les fonctions fuchsienues », *C.R. Acad. Sci. Paris* **92** (1881), p. 333–335 (14 février) ; p. 395–396 (21 février) ; p. 859–861 (4 avril). = [Poin1951], t. II, p. 1–10.
- [Poin1881c] ———, « Sur les fonctions fuchsienues », *C.R. Acad. Sci. Paris* **92** (1881), p. 1198–1200. = [Poin1951], t. II, p. 19–22.
- [Poin1881d] ———, « Sur les fonctions fuchsienues », *C.R. Acad. Sci. Paris* **92** (1881), p. 1484–1487. = [Poin1951], t. II, p. 12–15.
- [Poin1881e] ———, « Sur les groupes kleinéens », *C.R. Acad. Sci. Paris* **93** (1881), p. 44–46. = [Poin1951], t. II, p. 23–25.

- [Poin1882a] ———, « Mémoire sur les fonctions fuchsiennes », *Acta Math.* **1** (1882), p. 193–294. = [Poin1951], t. II, p. 169–257.
- [Poin1882b] ———, « Sur les fonctions fuchsiennes », *C.R. Acad. Sci. Paris* **94** (1882), p. 1038–1040. = [Poin1951], t. II, p. 41–43.
- [Poin1882c] ———, « Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires », *Math. Ann.* **19** (1882), p. 565–568. = [Poin1951], t. II, p. 92–105.
- [Poin1882d] ———, « Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires », *J. Ec. Polytech.* **50/51** (1882), p. 199–253 et 45–91. = [Poin1951], t. V, p. 28–72 et 293–334.
- [Poin1882e] ———, « Théorie des groupes fuchsien », *Acta Math.* **1** (1882), p. 1–62. = [Poin1951], t. II, p. 108–168.
- [Poin1883a] ———, « Mémoire sur les groupes kleinéens », *Acta Math.* **3** (1883), p. 49–92. = [Poin1951], t. II, p. 258–299.
- [Poin1883b] ———, « Sur un théorème de la théorie générale des fonctions », *Bull. Soc. Math. France* **11** (1883), p. 112–125. = [Poin1951], t. IV, p. 57–69.
- [Poin1884a] ———, « Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes », *Acta Math.* **5** (1884), p. 209–278. = [Poin1951], t. II, p. 402–462.
- [Poin1884b] ———, « Sur les groupes des équations linéaires », *Acta Math.* **4** (1884), p. 201–312. = [Poin1951], t. II, p. 300–401.
- [Poin1885a] ———, « Sur les courbes définies par les équations différentielles », *J. Math. Pures Appl. (4^e série)* **1** (1885), p. 167–244. = [Poin1951], t. I, p. 3–84.
- [Poin1885b] ———, « Sur un théorème de M. Fuchs », *Acta Math.* **7** (1885), p. 1–32. = [Poin1951], t. III, p. 4–32.
- [Poin1887] ———, « Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique », *J. Math. Pures Appl. (4^e série)* **3** (1887), p. 405–464. = [Poin1951], t. II, p. 463–511.
- [Poin1888] ———, « Sur une propriété des fonctions analytiques », *Rend. mat. Palermo* **2** (1888), p. 197–200. = [Poin1951], t. IV, p. 11–13.
- [Poin1890] ———, « Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique », *Amer. J. Math.* **12** (1890), n^o 3, p. 211–294. = [Poin1951], t. IX, p. 28–113.
- [Poin1898] ———, « Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$ », *J. Math. Pures Appl. (5^e série)* **4** (1898), p. 137–230. = [Poin1951], t. IX, p. 512–591.

- [Poin1907] ———, « Sur l'uniformisation des fonctions analytiques », *Acta Math.* **31** (1907), p. 1–64. = [Poin1951], t. IV, p. 70–139.
- [Poin1908] ———, « L'invention mathématique », conférence à l'Institut de psychologie, 23 mai 1908. *Enseignement Math.* **10** (1908), p. 357–371.
- [Poin1921] ———, « Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même », *Acta Math.* **38** (1921), p. 1–153. = [Poin1951], t. I, p. I–CXXIX.
- [Poin1951] ———, *Œuvres*, 11 volumes, Gauthier-Villars, Paris, 1951.
- [Poin1985] ———, *Papers on Fuchsian functions*, traduits en anglais et présentés par J. Stillwell, Springer, 1985.
- [Poin1989] ———, « La correspondance avec des mathématiciens de J à Z », *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* **10** (1989), p. 83–229.
- [Poin1997] ———, *Trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsiennes*, édités par J. Gray et S.A. Walter. Publications des Archives Henri Poincaré, Blanchard, Paris, 1997.
- [Pois1820] S. D. POISSON – « Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par des séries de quantités périodiques », *J. Éc. Polytechnique* **11** (1820) p. 417–489.
- [Pom1975] C. POMMERENKE – *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [Ponc1822] J.-V. PONCELET – *Traité des propriétés projectives des figures*, Bachelier, Paris, 1822.
- [Pont1974] J.-C. PONT – *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presses Univ. France, Paris, 1974.
- [Pry1871] E. E. PRYM – « Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ », *J. Reine Angew. Math.* **73**, (1871) p. 340–364.
- [Pui1850] V. PUISEUX – « Recherches sur les fonctions algébriques », *J. Math. Pures Appl. (1^{re} série)* **15** (1850), p. 365–480.
- [Pui1851] ———, « Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques », *J. Math. Pures Appl. (1^{re} série)* **16** (1851), p. 228–240.
- [Rad1925] T. RADÓ – « Über den Begriffe der Riemannsche Fläche », *Acta Litt. Sci. Szeged* **2** (1925), p. 101–121.
- [Rey1989] É. REYSSAT – *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progr. Math. 77, Birkhäuser, Boston, 1989.

- [Ric1963] I. RICHARDS – « On the classification of noncompact surfaces », *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963), p. 259–269.
- [Rie1851] B. RIEMANN – « Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlicher komplexer Grösse », Inauguraldissertation, Göttingen, 1851. = [Rie1892], p. 3–45. Traduction : « Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe », in [Rie1898], p. 89–164.
- [Rie1854] ———, « Über die Hypothesen, welche der Geometrie in Grunde liegen », Habilitationsschrift, Göttingen, 1854. = [Rie1892], p. 213–251. Traduction : « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie », in [Rie1898], p. 280–299.
- [Rie1857] ———, « Theorie der Abelschen Functionen », *J. Reine Angew. Math.* **54** (1857), p. 115–155. = [Rie1892], p. 81–135. Traduction : « Théorie des fonctions abéliennes », in [Rie1898], p. 89–164.
- [Rie1892] ———, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, éd. par H. Weber et R. Dedekind, Teubner, Leipzig, 1892. Traduction française : [Rie1898]. Réimpression avec d'importants commentaires en anglais : Teubner, Leipzig, & Springer, Berlin, 1990.
- [Rie1898] ———, *Œuvres mathématiques de Riemann, traduites par L. Laugel*, Gauthier-Villars, Paris, 1898. Réimpression : Gabay, Sceaux, 1990.
- [Rit1908] W. RITZ – « Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. », *J. für Math.* **135** (1908), p. 1–61.
- [Roc1865] G. ROCH – « Über die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen », *J. Reine Angew. Math.* **64** (1865), p. 372–376.
- [Row1989] D. ROWE – « Klein, Hilbert, and the Göttingen mathematical tradition », *Osiris* (1989), p. 186–213.
- [Rud1987] W. RUDIN – *Real and complex analysis*, seconde édition, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [Sat1956] I. SATAKE – « On a generalization of the notion of manifold », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **42** (1956), p. 359–363.
- [Scha1991] N. SCHAPPACHER, « Développement de la loi de groupe sur une cubique », *Séminaire de Théorie des nombres Paris 1988/89*, Progress in Mathematics 91, (Birkhäuser) 1991, p. 159–184.
- [Schoe1896] A. SCHOENFLIES – « Über einen Satz auf der Analysis Situs », *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1899), p. 79–89.
- [Schoe1906] ———, « Beiträge zur Theorie der Punktmengen. III », *Math. Ann.* **62** (1906), p. 286–328.

- [Schol1980] E. SCHOLZ – *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [Schot1877] F. SCHOTTKY – « Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen », *J. Reine Angew. Math* **83** (1877), p. 300–351.
- [Schw1869] H. SCHWARZ – « Über einige Abbildungsaufgaben », *J. Reine Angew. Math* **70** (1869), p. 105–120.
- [Schw1870a] ———, « Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen », *Monatsber. der Königlich Akademie der Wissenschaft zu Berlin* (1870), p. 767–795.
- [Schw1870b] ———, « Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren », *Wolf J.* **XV** (1870), p. 272–286. = *Gesammelte mathematische Abhandlungen (2ter Band)* p. 133–143, Springer, Berlin, 1890.
- [Schw1873] ———, « Über diejenige Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt », *J. Reine Angew. Math.* **75** (1873), p. 292–335.
- [Sel1960] A. SELBERG – « On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces », *Contributions to function theory (Internat. Colloq. Bombay, 1960)*, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1960, p. 147–164.
- [Ser1970] J.-P. SERRE – *Cours d'arithmétique*, Presses Univ. France, Paris, 1970.
- [Shi1959] G. SHIMURA – « On the theory of automorphic functions », *Ann. of Math.* **70** (1959), p. 101–144.
- [Shi1971] ———, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Kanô Memorial Lectures, n° 1*, Publ. Math. Soc. Japan, n° 11. Iwanami Shoten, Tokyo, & Princeton Univ. Press, 1971.
- [Sieb2005] L. SIEBENMANN – « Vozvratchennié k teoreme Osgouda-Schoenflies », *Uspehi Math. Nauk.* **60** (2005), 4, p. 67–96. Version anglaise : « The Osgood-Schoenflies theorem revisited », *Russ. Math. Surv.* **60** (2005), 4, p. 645–672.
- [Sieg1942] C. L. SIEGEL – « Iteration of analytic functions », *Ann. of Math. (2)* **43** (1942), p. 607–612.
- [Sny1993] J. SNYDER – *Flattening the Earth : Two Thousand Years of Map Projections*, Univ. of Chicago Press, 1993.
- [Spr1957] G. SPRINGER – *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1957.
- [Ste1832] J. STEINER – *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander (1^{re} partie)*, G. Fincke, Berlin, 1832.

- [Sti2002] J. STILLWELL – *Mathematics and its history*, second edition, Undergrad. Texts in Math., Springer, New York, 2002.
- [Stu1913] E. STUDY – *Vorlesungen über ausgewählte Gegenständende der Geometrie (2ème partie). Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Be- reiche*, Teubner, Berlin, 1913.
- [Tak1977] K. TAKEUCHI – «Arithmetic triangle groups», *J. Math. Soc. Japan* **29** (1977), p. 91–106.
- [Taz1994] R. TAZZIOLI – «Il teorema di rappresentazione di Riemann : critica e inter- pretazione di Schwartz», *Rend. Circ. Mat. Palermo II*, **34** (1994), p. 95–132.
- [Thu1980] W. P. THURSTON – *The geometry and topology of three-manifolds*, tapuscrit, Princeton University, 1980. Version électronique : <http://www.msri.org/publications/books/gt3m>, 2002.
- [Tie1913] H. TIETZE – «Sur les représentations continues des surfaces en elles- mêmes», *C.R. Acad. Sci. Paris* **157** (1913), p. 509–512.
- [Tie1914] ———, «Über einige Abbildungen einer Quadratfläche», *Rend. Circ. Mat. Palermo* **38** (1914), p. 247–304.
- [Ull2000] P. ULLRICH – «The Poincaré-Volterra theorem : from hyperelliptic inte- grals to manifolds with countable topology», *Archiv Hist. Exact Sci.* **54** (2000), p. 375–402.
- [Val1945] G. VALIRON – *Équations Fonctionnelles. Applications*, Masson, Paris, 1945.
- [Veb1905] O. VEBLEN – «Theory on plane curves in non-metrical Analysis Situs», *Trans. Amer. Math. Soc.* **6** (1905), n° 1, p. 83–98.
- [Viv1888a] G. VIVANTI – «Sulle funzioni ad infiniti valori», *Rend. Circ. Mat. Palermo* **2** (1888), p. 135–138.
- [Viv1888b] ———, «Ancora sulle funzioni ad infiniti valori», *Rend. Circ. Mat. Pa- lermo* **2** (1888), p. 150–151.
- [Vol1888] V. VOLTERRA – «Sulle funzioni analitiche polidrome», *Atti Acc. Lincei, S. Quarta, Rend.* **4** (1888), n° 2, p. 355–361. = [Vol1964], p. 356–362.
- [Vol1964] ———, *Opere matematiche. Memorie e Note, I*, Acc. Lincei, 1964.
- [Wae1941] B. L. VAN DER WAERDEN – «Topologie und Uniformisierung der Riemann- schen Flächen. Paul Koebe zum 60. Geburtstag am 15 Februar 1942 gewid- met», *Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl.* **93** (1941), p. 147– 160.
- [Weie1870] K. WEIERSTRASS – «Über das sogenannte Dirichlet'sche Princip», lu le 14/7/1870 à l'Académie de Göttingen. In *Mathematische Werke*, Mayer & Müller, Berlin, 1895, p. 49–54.

- [Weil1981] A. WEIL – « Sur les origines de la géométrie algébrique », *Compositio Math.* **44** (1981), p. 395–406.
- [Wes1799] C. WESSEL – « Om directionens analytiske betegning », *Nye Samling af del Kongelige Danske Videnskabernes Selkabs Skrifter*, Femte Del., Kjøbenhavn, 1799. p. 469–518. Traduction commentée : « Essai sur la représentation analytique de la direction », Andr.-Fred Host og son, Copenhague, 1897.
- [Wey1913] H. WEYL – *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, Leipzig, 1913. Réimpression avec commentaires en anglais, Teubner, Stuttgart, 1997.
- [Wey1955] ———, *Die Idee der Riemannschen Fläche* [3^e édition], Teubner, Stuttgart, 1955. Traduction anglaise : *The concept of a Riemann surface*, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1964.
- [Wiel1977] N. J. WIELENBERG – « Discrete Moebius groups : fundamental polyhedra and convergence », *Amer. J. Math.* **99** (1977), p. 861–877.
- [Wien1924a] N. WIENER – « Certain notions in potential theory », *J. Math. and Phys. (MIT)* **3** (1924), p. 24–51.
- [Wien1924b] ———, « The Dirichlet problem », *J. Math. and Phys. (MIT)* **3** (1924), p. 127–146.
- [Wien1925] ———, « Note on a paper by O. Perron », *J. Math. and Phys. (MIT)* **4** (1925), p. 21–32.
- [Wil1949] R. L. WILDER – *Topology of Manifolds*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 32, Amer. Math. Soc., New York, 1949.
- [You1924] G. C. YOUNG – Compte-rendu de lecture du volume 3 des œuvres de Klein [Kle1921a], *Enseignement Math.* **24** (1924-1925), p. 349–352.
- [ZVC1970] H. ZIESCHANG, E. VOGT & H.-D. COLDEWEY – *Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen*. Lect. Notes in Math. 122, Springer, Berlin, 1970. Traduit par J. Stillwell : *Surfaces and planar discontinuous groups*, Lect. Notes in Math. 835, *ibid.*, 1980.

Index

- $\overline{\mathbb{C}}$, 64
- \mathbb{D} , 64, 84
- Δu , 61
- \mathbb{H} , 65
- $*\vec{v}$, 118
- $*a$, 118
- \mathcal{M}_g , 105
- $\varphi_U(\cdot, z_0)$, 84
- \emptyset , 56
- $\{s, z\}$, 149
- g_2 , 56
- g_3 , 56
- Abel, 21
- Action propre, 203
- Angle d'un cycle, 201
- Argument d'Osgood, 413
- Axe d'une transformation hyperbolique, 196
- Base symplectique, 91
- Birapport, 149
- Borne d'Hurwitz, 170
- Bout, 161
- Branche, 66
- Côté d'un polygone, 197
- Caractéristique d'Euler, 77
- Caractéristique d'Euler-Poincaré orbifold, 207
- Caractère d'une représentation, 237
- Carte conforme, 46
- Circulation, 119
- Classe d'Euler, 243
- Clebsch, 26
- Cobord d'une représentation, 233
- Cocycle d'une représentation, 233
- Commensurable, 331
- Compatibilité, 117
- Conforme, 19
- Courbe algébrique, 13, 69
- Courbe elliptique, 21
- Courbe nodale, 272
- Courbe rationnelle, 19
- Courbe transcendante, 13
- Courbe unicursale, 19
- Courbure, 349
- Cramer, 16
- Cubique, 19, 21
- Cycle (d'un polygone fondamental), 201
- Cycle à l'infini, 205
- Cycle hyperbolique, 205
- Cycle parabolique, 205
- Dénombrabilité, 407
- Dérivée schwarzienne, 149, 266
- Degré, 98
- Demi-plan supérieur, 64, 195
- Desargues, 15
- Descartes, 13
- Deuxième espèce, 88
- Disque, 64
- Divergence, 119
- Diviseur, 98
- Domaine de Dirichlet, 198
- Dualité de Serre, 98
- Équation de Heun, 313
- Équation de Lamé, 314
- Équation de Riccati, 249

- Équation différentielle linéaire, 459, 470, 476, 478, 484, 491
- Équation différentielle, 330
- Équation différentielle linéaire, 28, 262
- Équation fuchsienne, 252, 290, 330
- Équation globalisable, 268
- Équation hypergéométrique, 294
- Équation modulaire, 158, 164, 465
- Équation normale, 271
- Équation réduite, 262
- Équation uniformisante, 331
- Équations de Cauchy–Riemann, 61
- Équations de Cauchy–Riemann, 49
- Équations de Maxwell, 126
- Équivalence birationnelle, 102, 224
- Équivalence projective, 264, 330
- Ératosthène, 38
- Espèce d'une forme, 88
- Espace de Teichmüller, 230
- Espace des modules grossier, 105
- Étale, 263
- Euler, 38
- Famille génératrice standard, 233
- Fermat, 13
- Flux, 119
- Fonction ϑ , 55, 467
- Fonction \wp de Weierstrass, 56
- Fonction à transformations linéaires en soi, 457, 460, 469, 483
- Fonction abélienne, 467, 469
- Fonction algébrique, 51, 59
- Fonction conjuguée, 61
- Fonction de Green, 83, 397
- Fonction doublement périodique, 457
- Fonction elliptique, 56, 456
- Fonction fuchsienne, 30, 224, 460, 462, 463, 469, 470, 474, 477, 478, 488, 491
- Fonction harmonique, 61
- Fonction kleinéenne, 469, 474, 477, 478, 480, 491
- Fonction modulaire, 456, 458, 461, 465, 471, 477, 478, 490
- Fonction modulaire elliptique, 456, 458, 460
- Fonction multiforme, 21, 65, 66
- Fonction périodique, 457
- Fonction sous-harmonique, 435
- Fonction uniforme, 22, 66, 456, 457, 460, 475, 476, 480, 483
- Fonction zétafuchsienne, 470, 484, 491
- Forme automorphe, 163, 218
- Forme harmonique, 127
- Forme modulaire, 160, 163
- Formule de Poisson, 80, 81
- Formule de Schwarz-Christoffel, 147
- Fuchsienne, 330
- Géométrie birationnelle, 17
- Géométrie projective, 15
- Gauss, 19, 21, 38, 46
- Genre, 76, 77, 463, 465, 490
- Groupe des transformations linéaires, 460
- Groupe discontinu, 459, 461, 464, 466, 470, 474, 476, 480, 482, 490
- Groupe fondamental, 75
- Groupe fuchsien, 28, 197, 463, 491
- Groupe kleinéen, 491
- Halley, 42
- Hipparque, 38
- Homographie, 65
- Horoboule, 161
- Icosaèdre, 457, 459
- Inégalité de Harnack, 421
- Inégalité de Riemann, 96
- Indice de ramification, 79
- Intégrale abélienne, 59
- Intégrale de deuxième espèce, 88
- Intégrale de troisième espèce, 88
- Intégrale elliptique, 21
- Intégrale abélienne, 51
- Invariant modulaire, 157, 160, 164
- Invariants fondamentaux, 237, 239
- Involution de Fricke, 165, 168
- Irrotationnel, 119
- Jacobi, 21
- Jacobienne, 108, 109
- Klein, 27, 28
- Koebe, 31
- Lagrange, 38, 43
- Lambert, 38, 43
- Laplacien, 345
- laplacien, 61
- Lemme de Margulis, 242
- Lemme de Weyl, 130
- Lemniscate, 51
- Longueur extrémale, 247

- Méthode de continuité, 482, 483, 485
 Méthode de continuité, 29
 Métrique hyperbolique, 195, 343
 Métrique riemannienne, 44
 Majorante de Green, 413
 Mercator, 37, 42
 Module, 23, 102
 Module de périodicité, 74
 Monodromie d'une équation, 279
 Newton, 18
 Nombre complexe, 16
 Noyau régularisant, 131
 Octaèdre, 457
 Orbifold, 206
 Orbifold quotient, 207
 Ordre de connexion, 74, 77
 Osgood, 395
 Période, 74
 Paramètres locaux, 69
 Partie principale, 87
 Pavage du plan hyperbolique, 197
 Picard, 31, 82, 341
 Plücker, 17
 Poid, 163
 Poincaré, 28, 29, 31, 75
 Poincaré-Volterra, 407
 Point de ramification, 66, 79, 206, 467
 Point de ramification simple, 69
 Point sextactique, 173
 Point singulier, 18
 Pointe, 162
 Polygone (hyperbolique), 197
 Polygone à arcs circulaires, 459–462, 465, 467, 468, 483
 Polygone adapté, 199
 Polygone fini, 197
 Polygone fondamental, 197, 456, 458, 461, 463, 464, 466, 479
 Poncelet, 17
 Potentiel, 120
 Première espèce, 88
 Principe de Dirichlet, 81, 469, 471
 Principe de Harnack, 421
 Principe de symétrie, 144
 Principe du maximum, 62, 359
 Problème d'inversion de Jacobi, 109
 Problème de Dirichlet, 80
 Projection stéréographique, 41, 64
 Ptolémée, 37
 Puiseux, 18
 Puit, 122
 Quartique de Klein, 28, 158, 160, 172
 Réseau marqué des périodes, 157
 Résolvante de Galois, 158
 Représentation conforme, 44
 Représentation de monodromie, 279
 Représentation fidèle et discrète, 240
 Revêtement universel, 23
 Revêtement universel d'une orbifold, 207
 Riemann, 25
 Rotationnel, 119
 Série hypergéométrique, 456
 Schwarz, 26, 27, 31, 144
 Schwarzien, 149
 Simplement connexe, 23, 75
 Singularité apparente, 292
 Singularité logarithmique, 292, 396
 Singularité mobile, 255
 Somme d'Eisenstein, 56
 Sommet à l'infini, 205
 Sommet d'un polygone, 197
 Source, 122
 Sous-groupe de congruence, 463, 464
 Sous-groupe principal de congruence, 158
 Sphère de Riemann, 64
 Steiner, 17
 Structure projective, 268
 Substitution linéaire, 475, 476
 Surface de Klein, 158, 160, 166, 169
 Surface de révolution, 44
 Surface de Riemann, 22, 25, 63, 471, 482, 483, 485, 487, 489, 490
 Surface fermée, 76
 Surface modulaire, 160
 Théorème d'uniformisation des fonctions, 381
 Théorème d'uniformisation général, 31
 Théorème de dualité de Serre, 98
 Théorème de Gauss, 46
 Théorème de représentation conforme de Riemann, 83
 Théorème de Riemann-Hurwitz, 79
 Théorème de Riemann-Roch, 97, 98
 Théorie de Hodge, 127
 Tourbillon, 122
 Transformation elliptique, 196

Transformation hyperbolique, 196
Transformation parabolique, 196
Triangle d'inflexion, 174, 179

Troisième espèce, 88
Uniformisante locale, 69
Variété des représentations, 232
Weierstrass, 82

Uniformisation des surfaces de Riemann

Retour sur un théorème centenaire

En 1907, Paul Koebe et Henri Poincaré démontraient presque simultanément le théorème d'uniformisation : Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe au plan, au disque ou à la sphère.

Il a fallu tout un siècle avant d'oser énoncer ce théorème et d'en donner une démonstration convaincante, grâce aux travaux de Gauss, Riemann, Schwarz, Klein, Poincaré et Koebe (entre autres). Ce livre propose quelques points de vue sur la maturation de ce théorème.

L'évolution du théorème d'uniformisation s'est faite en parallèle avec l'apparition de la géométrie algébrique, la création de l'analyse complexe, les premiers balbutiements de l'analyse fonctionnelle, avec le foisonnement de la théorie des équations différentielles linéaires et la naissance de la topologie. Le théorème d'uniformisation est l'un des fils conducteurs du XIX^e siècle mathématique.

Il ne s'agit pas ici de décrire l'histoire d'un théorème mais de revenir sur des preuves anciennes, de les lire avec des yeux de mathématiciens modernes, de s'interroger sur la validité de ces preuves et d'essayer de compléter celles-ci en respectant autant que possible les connaissances de l'époque, voire, si cela s'avère nécessaire, en utilisant des outils mathématiques modernes qui n'étaient pas à la disposition de leurs auteurs.

Ce livre sera utile aux mathématiciens d'aujourd'hui qui souhaitent jeter un regard sur l'histoire de leur discipline. Il pourra également permettre à des étudiants de niveau master d'accéder à ces concepts si importants de la recherche contemporaine en utilisant une voie inhabituelle.

29 euros

